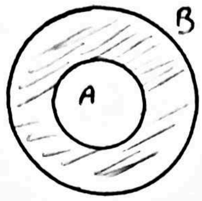
۱۰۱ - گزینهٔ «۴»



مطابق شکل، اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و $A\subset B$ باشد،

آنگاه مجموعهٔ $A\cap B'$ یا $A-B$ معادل ناحیهٔ هاشورخورده در شکل

و درنتیجه غیرتهی است.

برای سایر گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ «۱»: $B-A' = B\cap(A')' = B\cap A \xrightarrow{A\subseteq B} A$

گزینهٔ «۲»: $A-B' = A\cap(B')' = A\cap B \xrightarrow{A\subseteq B} A$

گزینهٔ «۳»: $A\cap B' = A-B \xrightarrow{A\subset B} \emptyset$

---

۱۰۲ - گزینهٔ «۴»

$$(A-B)\cup\Big[(B\cap C)'\cap\big((B'\cup A)-B\big)\Big]$$

$$=(A\cap B')\cup\Big[\underbrace{(B\cap C)'}_{\text{قانون دمورگان}}\cap\underbrace{\big((B'\cup A)\cap B'\big)}_{\text{قانون جذب}}\Big]$$

$$=(A\cap B')\cup\Big[\underbrace{(B'\cup C')\cap B'}_{\text{قانون جذب}}\Big]=\underbrace{(A\cap B')\cup B'}_{\text{قانون جذب}}=B'$$

---

۱۰۳ - گزینهٔ «۳» با توجه به غیرتهی بودن مجموعه‌های A و B، از تساوی $A\times B=B\times A$ نتیجه می‌گیریم $A=B$ است و درنتیجه داریم:

$$\begin{cases} x+2=5 \Rightarrow x=3 \\ y=7 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x+2=7 \Rightarrow x=5 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=1 \\ t-1=4 \Rightarrow t=5 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} z=4 \\ t-1=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$$

بنابراین زوج مرتب (x,y) به یکی از دو صورت $(3,7)$ یا $(5,3)$ و زوج مرتب (z,t) به یکی از دو صورت $(1,5)$ یا $(4,2)$ است و درنتیجه تعداد مجموعه‌ها به صورت $\{(x,y),(z,t)\}$ برابر $2\times2=4$ است.

۱۰۴- گزینهٔ ۱

روش اول: طبق قوانین گزاره‌ها داریم:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\equiv [(q \vee \sim p) \wedge p] \vee [(q \vee \sim p) \wedge \sim q]$$

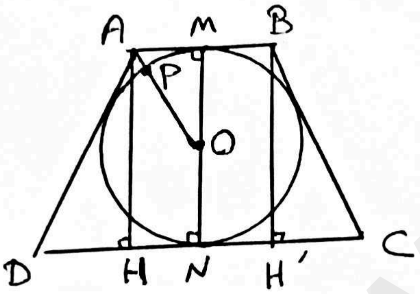
$$\equiv [(q \wedge p) \vee \underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F}] \vee [\underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F} \vee (\sim p \wedge \sim q)]$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$$

روش دوم: طبق جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	د	د	د

۱۲۲- گزینهٔ ۴



چهارضلعی $ABCD$ محیطی است، بنابراین داریم:

$$AB + DC = AD + BC \xrightarrow{AD = BC} ۹ + ۱۶ = ۲AD$$

$$\Rightarrow AD = \frac{۲۵}{۲} = ۱۲٫۵$$

$$DH = CH' = \frac{۱۶ - ۹}{۲} = \frac{۷}{۲} = ۳٫۵$$

$$\overset{\triangle}{AHD}: AH^۲ = AD^۲ - DH^۲ = (۱۲٫۵)^۲ - (۳٫۵)^۲$$

$$= (۱۲٫۵ - ۳٫۵)(۱۲٫۵ + ۳٫۵) = ۹ \times ۱۶ \Rightarrow AH = ۱۲$$

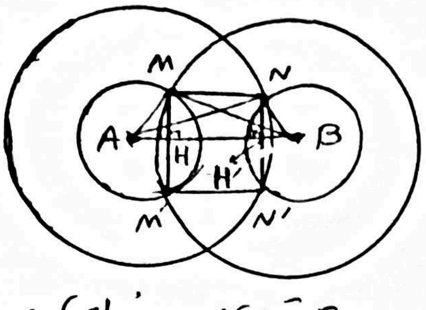
$$\Rightarrow ۲R = ۱۲ \Rightarrow R = ۶$$

$$\overset{\triangle}{AOM}: OA^۲ = OM^۲ + AM^۲ = ۶^۲ + (۴٫۵)^۲ = ۵۶٫۲۵$$

$$\Rightarrow OA = ۷٫۵$$

$$AP = OA - OP = ۷٫۵ - ۶ = ۱٫۵ = \frac{۳}{۲}$$

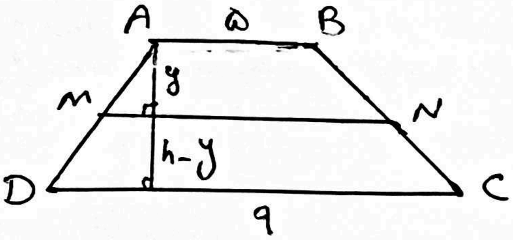
۱۲۳ - گزینه «۳»



نقاط A و B هر کدام از دو نقطهٔ M و M' به یک فاصله هستند،
پس AB عمود منصف پاره خط MM' است.
به طور مشابه AB عمود منصف پاره خط NN' است.
از طرفی مثلث های AMB و ANB هم‌نهشت هستند (به حالت تساوی سه ضلع)،
پس ارتفاع های MH و NH و در نتیجه پاره خط های MM' و NN' برابر یکدیگرند و
چهارضلعی MNN'M' مستطیل است.

---

۱۲۵ - گزینهٔ «۲»



فرض کنید $MN = x$ باشد. داریم:

$$S_{ABNM} = S_{MNCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(5+x)y = \frac{1}{2}(x+9)(h-y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(5+9)h$$

$$\Rightarrow (5+x)y = (h-y)(x+9) \Rightarrow 2y(7+x) = h(x+9) \quad (*)$$

$$S_{ABNM} + S_{MNCD} = S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow (5+x)y + (h-y)(x+9) = 14h \Rightarrow 4y = h(x-5) \quad (**)$$

$$(*),(**) \Longrightarrow \frac{h(x-5)}{2}(x+7) = h(x+9)$$

$$\Longrightarrow x^2 + 2x - 35 = 2x + 18 \Rightarrow x^2 = 53 \Rightarrow x = \sqrt{53}$$

۱۲۴- گزینهٔ «۱»

$\overset{\triangle}{BAD}: \quad OM \parallel AD \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DO}{BD} \quad (1)$

$\overset{\triangle}{ABC}: \quad ON \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \dfrac{BN}{AB} = \dfrac{CO}{AC} \quad (2)$

$\overset{\triangle}{DOC} \sim \overset{\triangle}{AOB} \Rightarrow \dfrac{DO}{OB} = \dfrac{CO}{OA} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \dfrac{DO}{BD} = \dfrac{CO}{AC} \quad (3)$

$(1),(2),(3) \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{BN}{AB} \Rightarrow AM = BN \Rightarrow \dfrac{AM}{BN} = 1$

۱۲۶- گزینهٔ «۳»

$AF \parallel DE \xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{AFG} \sim \overset{\triangle}{DGE} \Rightarrow \dfrac{S_{AGF}}{S_{DGE}} = \left(\dfrac{AG}{DG}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{AGB} \sim \overset{\triangle}{DGC} \Rightarrow \dfrac{S_{AGB}}{S_{DGC}} = \left(\dfrac{AG}{DG}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \dfrac{S_{ABCD}}{S_{DGC}} = \dfrac{5}{9}$

دو مثلث DGE و DGC در ارتفاع وارد از رأس G مشترک اند، پس نسبت مساحت آنها برابر نسبت قاعده هاست، در نتیجه داریم:

$\dfrac{S_{DGE}}{S_{DGC}} = \dfrac{ED}{DC} = \dfrac{2}{5}$

$\dfrac{S_{AGF}}{S_{ABCD}} = \dfrac{\frac{4}{9} S_{DGE}}{\frac{5}{9} S_{DGC}} = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{8}{25} = \dfrac{32}{100}$

۱۲۷- گزینهٔ «۱»

طبق قضیهٔ استیوارت در مثلث ABD داریم:

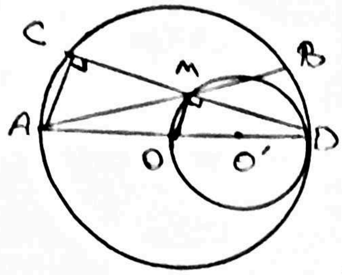
$AB^2 \times CD + AD^2 \times BC = AC^2 \times BD + BC \times CD \times BD$

$\Rightarrow 81 \times 8 + AD^2 \times 4 = 49 \times 12 + 4 \times 8 \times 12$

$\Rightarrow 81 \times 8 + 4AD^2 = 12(49 + 32) = 12 \times 81$

$\Rightarrow 4AD^2 = 81(12 - 8) = 81 \times 4 \Rightarrow AD^2 = 81 \Rightarrow AD = 9$

۱۲۸ - گزینهٔ «۴»



اگر $\widehat{AC}=\alpha$ باشد، آنگاه داریم:

$$\widehat{AC}\ \text{طول کمان} = \frac{\pi R\alpha}{180} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi\times 4\times\alpha}{180^\circ} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\longrightarrow \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

زاویهٔ C زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر AD است، پس $\hat{C}=90^\circ$ و درنتیجه مثلث ACD قائم‌الزاویه است.

$$\hat{D}=30^\circ \Rightarrow AC = \frac{1}{2}AD = 4$$

$$\overset{\triangle}{ACD}: CD^2 = AD^2 - AC^2 = 64-16 = 48 \Longrightarrow CD = 4\sqrt{3}$$

به طور مشابه زاویهٔ OMD زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر OD در دایرهٔ کوچک‌تر است و درنتیجه $O\hat{M}D=90^\circ$ است، پس $OM \parallel AC$ و داریم:

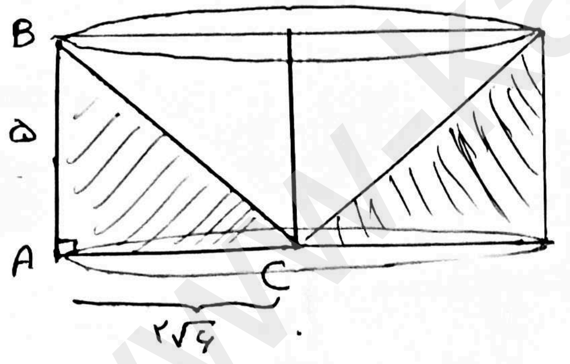
$$OM \parallel AC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{MD}{MC} = \frac{OD}{OA} = 1 \Rightarrow MC = MD = \frac{CD}{2} = 2\sqrt{3}$$

طبق روابط طولی در دایرهٔ بزرگ‌تر داریم:

$$MA \times MB = MC \times MD = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12$$

---

۱۳۰ - گزینهٔ «۴»

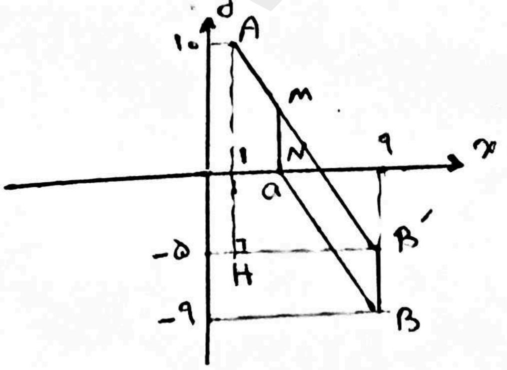


از دوران مثلث ABC حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، یک استوانه حاصل می‌شود که یک مخروط از میان آن برداشته شده است.

$$V_{\text{حجم حاصل از دوران}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(2\sqrt{6})^2\times 5 - \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{6})^2\times 5 = 120\pi - 40\pi = 80\pi$$

---

۱۲ - گزینهٔ «۱»



برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر AMNB (طول خط شکستهٔ AMNB) کافی است نقطهٔ B را ۴ واحد به طرف بالا انتقال دهیم.

مطابق شکل داریم:

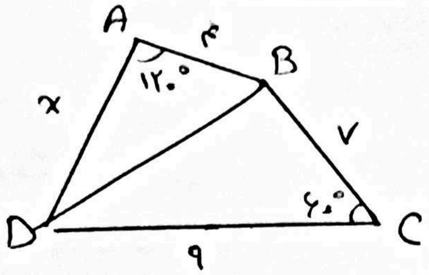
$$\overset{\triangle}{AHB'}: AB'^2 = AH^2 + B'H^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Rightarrow AB' = 17$$

$$AMNB\ \text{طول خط شکستهٔ} = AB' + BB' = 17 + 4 = 21$$

۱۳۱- گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(زاویه‌ی ظلی)} & \hat{BAC} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \\ \text{(زاویه‌ی محاطی)} & \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{BAC} = \hat{D}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{BAC} = \hat{D} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \overset{\triangle}{ACB} \sim \overset{\triangle}{DCA} \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DA} \xrightarrow{AB=AC} DA = DC$$



۱۳۲- گزینه‌ی «۲»

چهارضلعی ABCD محاطی است، پس داریم:

$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{C} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2\,BD \times DC \times \cos\hat{C}$$

$$= 49 + 81 - 2 \times 7 \times 9 \times \frac{1}{2} = 67$$

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\,AB \times AD \times \cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow 67 = 16 + x^2 - 2 \times 4 \times x \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 51 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{220}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{55}}{2} = -2 \pm \sqrt{55}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{55} \Rightarrow x + 2 = \sqrt{55} \\ x = -2 - \sqrt{55} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۳۳- گزینه‌ی «۱»

کوچک‌ترین دایره‌ی گذرنده از نقاط A و B، دایره‌ای است که نقاط A و B دو سر قطری از آن هستند.

مرکز این دایره نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB و شعاع آن برابر نصف طول پاره‌خط AB است.

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{2-4}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (-1, 3)$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(2+4)^2 + (5-1)^2}}{2} = \sqrt{13}$$

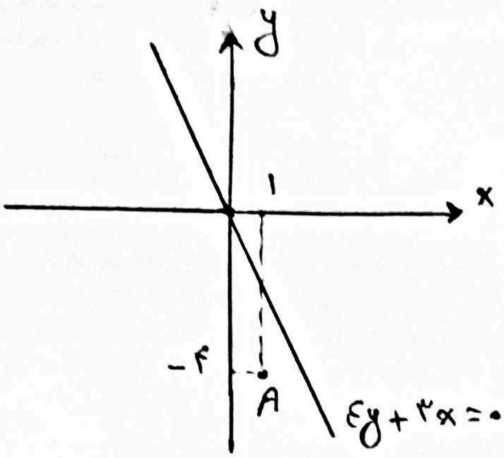
معادله‌ی دایره: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 13 \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 + 9 = 13$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

۱۳۴- گزینه‌ی «۲»

مرکز دایره از محور yها (خط $x=0$) و خط $4x+3y=0$ به یک فاصله است، بنابراین داریم:

$$\frac{|4x+3y|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|x| \Rightarrow |4x+3y|=5|x| \Rightarrow \begin{cases}4x+3y=5x \Rightarrow y=\frac{1}{3}x\\ 4x+3y=-5x \Rightarrow y=-3x\end{cases}$$



مطابق شکل برای اینکه دایره از نقطه‌ی $A(1,-4)$ بگذرد و بر محور yها و خط $4x+3y=0$ مماس باشد، لزوماً باید در ناحیه‌ی چهارم دستگاه مختصات قرار بگیرد و در نتیجه مرکز آن روی خط $y=-3x$ واقع است.

مرکز دایره از نقطه‌ی A و محور yها به یک فاصله است، بنابراین داریم:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}=|x| \xrightarrow{y=-3x}$$

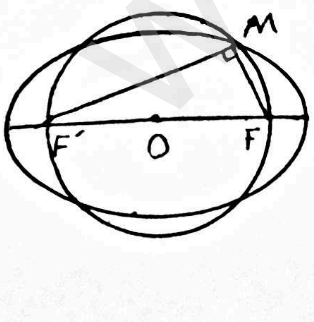
$$\sqrt{(x-1)^2+(-3x+4)^2}=|x| \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$x^2-2x+1+9x^2-24x+16=x^2 \Rightarrow 9x^2-26x+17=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=\frac{17}{9}\end{cases}$$

بنابراین بیشترین مقدار شعاع، برابر $R=\frac{17}{9}$ است.

۱۳۵- گزینه‌ی «۳»



$$2a=8 \Rightarrow a=4$$

$$2b=2\sqrt{7} \Rightarrow b=\sqrt{7}$$

$$c^2=a^2-b^2=16-7=9 \Rightarrow c=3 \Rightarrow FF'=2c=6$$

زاویه‌ی M زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر FF' است، بنابراین $\hat{M}=90^\circ$ و در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است و داریم:

$$MF^2+MF'^2=FF'^2=36$$

روی بیضی است $M \Rightarrow MF+MF'=2a=8 \Rightarrow (MF+MF')^2=64 \Rightarrow \underbrace{MF^2+MF'^2}_{36}+2MF\times MF'=64$

$$\Rightarrow MF\times MF'=14$$

بنابراین MF و MF' ریشه‌های معادله‌ی $x^2-8x+14=0$ هستند و داریم:

$$x=\frac{8\pm2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=4\pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases}MF=4-\sqrt{2}\\ MF'=4+\sqrt{2}\end{cases}$$

۱۳۶ـ گزینهٔ «۲»

باتبدیل معادلهٔ سهمی به حالت متعارف داریم:

$$y^2+ay+bx+1=0 \Rightarrow y^2+ay+\frac{a^2}{4}=-bx-1+\frac{{}^{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \left(y+\frac{a}{2}\right)^2=-b\left(x+\frac{1-\frac{a^2}{4}}{b}\right)$$

بنابراین عرض رأس سهمی و در نتیجه کانون سهمی برابر $-\frac{a}{2}$ است، داریم:

$$-\frac{a}{2}=-2 \Rightarrow a=4$$

با فرض $b>0$، سهمی رو به راست باز می‌شود. همچنین طول رأس سهمی با جایگذاری مقدار $a=4$ برابر $\frac{3}{b}$ است. داریم:

$$\text{طول کانون}=\frac{3}{b}-\frac{b}{4}=-\frac{1}{4}\xrightarrow{\times 4b}12-b^2=-b \Rightarrow b^2-b-12=0$$

$$\Rightarrow (b-4)(b+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=4 & \text{غ‌ق‌ق} \\ b=-3 \end{cases}$$

۱۳۷ـ گزینهٔ «۴»

کافی است سطر اول ماتریس A^2 را به دست آورده و در ماتریس A ضرب کنیم:

$$A^2\ \text{سطر اول}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -3 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 2 & 24\end{bmatrix}$$

$$A^3\ \text{سطر اول}=\begin{bmatrix}6 & 2 & 24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -3 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & 6 & 86\end{bmatrix}$$

۱۳۸ـ گزینهٔ «۳»

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}20 & -24\\ -16 & 16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-36 & -28\\ 16 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 7\\ -4 & -4\end{bmatrix}$$

۱۳۹- گزینهٔ «۳».

اگر دترمینان را بر حسب سطر اول ماتریس محاسبه کنیم، داریم:

$$-4\begin{vmatrix}2-x & 1\\ 2 & 3-x\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3-x\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2-x\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4(x^2-5x+6-2)-(3-x-3)+(2-6+3x)=0$$

$$\Rightarrow -4x^2+20x-16+x-4+3x=0 \Rightarrow 4x^2-24x+20=0$$

$$\Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=5\end{cases}$$

۱۴۰- گزینهٔ «۱».

طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$(2x+3)^2=(2x+1)^2+(x+1)^2 \Rightarrow 4x^2+12x+9=4x^2+4x+1+x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow x^2-6x-7=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1 & \text{غ ق ق}\\ x=7\end{cases}$$

بنابراین طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه برابر ۸، ۱۵ و ۱۷ است و در نتیجه مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\times 8\times 15=60$$

۱۴۱- گزینهٔ «۲».

رقم یکان عدد موردنظر صفر یا ۵ است.

حالت اول: رقم یکان صفر باشد: $\underline{9}\times\underline{8}\times\underline{7}\times\underline{1}=504$

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد: $\underline{8}\times\underline{8}\times\underline{7}\times\underline{1}=448$

تعداد کل اعداد موردنظر $=504+448=952$

۱۴۲- گزینهٔ «۴».

تعداد جملات بسط عبارت $(a+b+c)^{12}$ برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=12$ است که x_1، x_2 و x_3 به‌ترتیب توان‌های a، b و c هستند. داریم:

$$\text{تعداد جواب‌ها}=\binom{12+3-1}{3-1}=\binom{14}{2}=91$$

تذکر: در هر جمله از بسط عبارت $(a+b+c)^{12}$، مجموع توان‌های a، b و c، برابر ۱۲ است.

۱۴۳- گزینهٔ «۲»

در صورتی که ۳ کتاب ادبی، ۲ کتاب هنر و ۳ کتاب ریاضی برداریم، هدف مسئله برآورده نشده است ولی با انتخاب نهمین کتاب، قطعاً ۴ کتاب از یکی از دو موضوع ادبی یا ریاضی وجود خواهد داشت.

۱۴۴- گزینهٔ «۳»

اگر مجموعهٔ اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۳ و ۵ را به ترتیب با A و B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$|A| = \left[\frac{۹۹}{۳}\right] - \left[\frac{۹}{۳}\right] = ۳۰$$

$$|B| = \left[\frac{۹۹}{۵}\right] - \left[\frac{۹}{۵}\right] = ۱۸$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{۹۹}{۱۵}\right] - \left[\frac{۹}{۱۵}\right] = ۶$$

$$|A \cup B| = ۳۰ + ۱۸ - ۶ = ۴۲$$

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|S|} = \frac{۴۲}{۹۰} = \frac{۷}{۱۵}$$

۱۴۵- گزینهٔ «۱»

در پرتاب ۳ تاس، در مجموع $۶^۳ = ۲۱۶$ حالت وجود دارد که در نیمی از حالت‌ها، مجموع ۳ تاس فرد است. حالت‌هایی که حداقل یکی از تاس‌ها ۲ بیاید و مجموع فرد باشد را به ۲ دسته تقسیم می‌کنیم:

دستهٔ اول: دو تاس ۲ بیاید و تاس دیگر عددی فرد باشد:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \underbrace{۳}_{\{۱,۳,۵\}} \times \underbrace{۳}_{\text{جایگشت عدد غیر ۲}} = ۹$$

دستهٔ دوم: یک تاس ۲ و دو تاس دیگر یکی فرد و دیگری زوج غیر ۲ بیاید:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{عدد فرد}} \times \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{عدد زوج}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ۳ عدد}} = ۳ \times ۳ \times ۶ = ۳۶$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{۳۶ + ۹}{۱۰۸} = \frac{۴۵}{۱۰۸} = \frac{۵}{۱۲}$$

۱۴۶ـ گزینهٔ «۲»

متمم پیشامد آنکه حداقل یکی از دو مهره سیاه باشد، آن است که هر دو مهره سفید باشند.

اگر پیشامد سفید بودن دو مهره را با A نمایش دهیم، طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} \times \frac{6}{36}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{18} \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

۱۴۷ـ گزینهٔ «۲»

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0/25 = \frac{P(B \cap A)}{0/4} \Rightarrow P(B \cap A) = 0/1$$

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0/3 - 0/1 = 0/2$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{1 - P(A)} = \frac{0/2}{0/6} = \frac{1}{3}$$

۱۴۸ـ گزینهٔ «۳»

$$\bar{x} = \frac{7 \times 12 + 12 \times 18 + 13 \times 35 + 17 \times 10 + 19 \times 25}{12 + 18 + 35 + 10 + 25} = \frac{1400}{100} = 14$$

۱۴۹ـ گزینهٔ «۲»

$$a = 430q + q^2$$

$$r < b \Rightarrow q^2 < 430 \Rightarrow q \leqslant 20 \xrightarrow{\text{عدد طبیعی } q} 1 \leqslant q \leqslant 20$$

$$a = 430q + q^2 = q(430 + q)$$

برای اینکه حاصل این عبارت مضرب ۹ باشد، داریم:

حالت اول: q مضرب ۹ باشد. در این صورت q یکی از دو عدد ۹ یا ۱۸ است.

حالت دوم: $430 + q$ مضرب ۹ باشد. در این صورت q یکی از سه عدد ۲، ۱۱ یا ۲۰ است.

حالت سوم: q مضرب ۳ و $430 + q$ مضرب ۳ باشد ولی چون ۴۳۰ مضرب ۳ نیست، این حالت امکان‌پذیر نمی‌باشد.

بنابراین در مجموع ۵ عدد با مشخصات مورد نظر وجود دارد.

۱۵۰- گزینهٔ «۴»

فرض کنید $(a,b)=d$ و $[a,b]=M$ باشد. اگر دو عدد a و b را به صورت $a'd$ و $b'd$ بنویسیم، آنگاه $(a',b')=1$ و داریم:

$$M=\frac{a\times b}{d}=a'b'd \Rightarrow ۶۰d=a'b'd \Rightarrow a'b'=۶۰$$

$$a+b=۱۳۶ \Rightarrow (a'+b')d=۱۷\times ۸ \Rightarrow \begin{cases} a'+b'=۱۷ \\ d=۸ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'b'=۶۰ \\ a'+b'=۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'=۱۲ \\ b'=۵ \end{cases}$$

$$a-b=(a'-b')d=(۱۲-۵)\times ۸=۵۶$$

۱۵۱- گزینهٔ «۳»

$$2^5 \overset{217}{\equiv} 32 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2^{10} \overset{217}{\equiv} 1024 = 5\times 217 - 61 \overset{217}{\equiv} -61$$

$$\xrightarrow{\times 2^5} 2^{15} \overset{217}{\equiv} -61\times 32 = -1952 \overset{217}{\equiv} -1952 + 10\times 217 \overset{217}{\equiv} 218 \overset{217}{\equiv} 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } n} 2^{15n} \overset{217}{\equiv} 1$$

بنابراین تمامی مضارب ۱۵ در رابطهٔ $2^n - 1 \overset{217}{\equiv} 0$ صدق می‌کنند که شامل اعداد دورقمی ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۵ و ۹۰ می‌گردد.

۱۵۲- گزینهٔ «۲»

$$\overline{aabb} = b + 10b + 100a + 1000a = 11b + 1100a = 11(b+100a)$$

$$\overline{cc} = c + 10c = 11c$$

$$11(b+100a) = (11c)^2 \Longrightarrow b + 100a = 11c^2$$

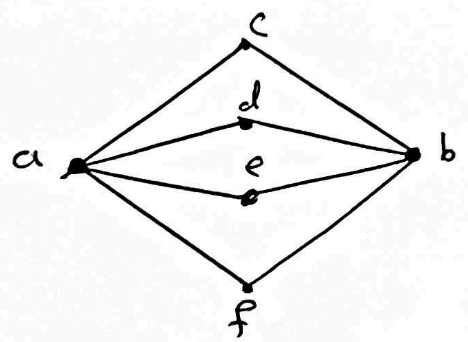
ارقامی که در رابطهٔ فوق صدق می‌کنند، عبارت‌اند از:

$$a=7,\ b=4,\ c=8 \longrightarrow 704 = 11\times 64$$

بنابراین $a-b=3$ است.

۱۵۳- گزینهٔ «۴»

مطابق شکل دورهای این گراف عبارت‌اند از:



acbda, acbea, acbfa,
adbea, adbfa, aebfa

۱۵۴- گزینهٔ «۱» مجموعهٔ {a, e, g} یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف نیست چون هیچ‌کدام از رأس‌های این مجموعه قادر به احاطهٔ رأس h نیستند و درنتیجه این مجموعه نمی‌تواند احاطه‌گر مینیمال باشد.

۱۵۵- گزینهٔ «۲» گراف فرد منتظم از مرتبهٔ فرد وجود ندارد، پس k لزوماً زوج و کوچک‌تر از ۷ است.

از طرفی به ازای $k=0$، گراف تهی و به ازای $k=6$، گراف کامل حاصل می‌شود،

پس تنها مقادیر $k=2$ و $k=4$ قابل قبول است.