نظام قدیم

پاسخ تشریحی سراسری تجربی ۹۹ داخل کشور

درس ریاضی - حسین حاجیلو

۱۲۶- ②

$$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}} = \frac{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}}{۵-\sqrt{۶}} \times \frac{۵+\sqrt{۶}}{۵+\sqrt{۶}} = \frac{۱۰\sqrt{۲}+۱۵\sqrt{۳}+۴\sqrt{۳}+۹\sqrt{۲}}{۲۵-۶} = \frac{۱۹\sqrt{۲}+۱۹\sqrt{۳}}{۱۹} = \sqrt{۲}+\sqrt{۳}$$

$$۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱} = \frac{۲}{\sqrt{۳}-۱} \times \frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۲} = \sqrt{۳}+۱$$

$$\Rightarrow (\sqrt{۲}+\sqrt{۳})-(\sqrt{۳}+۱) = \sqrt{۲}-۱$$

۱۲۷- ③

① $\{۱\}$

② $\{۲,۳,\overset{۲^۲}{۴}\}$

③ $\{۵,۶,۷,۸,\overset{۳^۲}{۹}\}$

$\vdots$

⑨ $\{۸^۲+۱,\dots,۹^۲\} \Rightarrow \frac{(۸^۲+۱)+۹^۲}{۲} = ۷۳$

۱۲۸- ④

$$\frac{۲(x+۱)-۳}{x+۱} = ۲-\frac{۳}{x+۱}$$

$$۱<\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳ \Rightarrow \frac{۱}{۳}<\frac{۲x-۱}{x+۱}<۱ \Rightarrow -۱<\frac{۳}{x+۱}-۲<-\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۱<\frac{۳}{x+۱}<\frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{۳}{۵}<\frac{x+۱}{۳}<۱ \Rightarrow \frac{۹}{۵}<x+۱<۳$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{۴}{۵}}_{۰/۸}<x<۲$$

① -۱۲۹

$$S = \frac{۱}{P} \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^{۲} = -bc$$

$$\Rightarrow ۹ = (۲m-۱)(m-۲) \Rightarrow ۹ = ۲m^{۲} - ۵m + ۲ \Rightarrow ۲m^{۲} - ۵m - ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \rightsquigarrow \Delta < ۰ \\ m = \frac{۷}{۲} \quad \checkmark \end{cases}$$

---

③ -۱۳۰

$$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f_{۱}(x) = \sqrt{x-۱۲} \longrightarrow f_{۲}(x) = ۲ + \sqrt{x-۱۲}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = ۲ + \sqrt{x-۱۲} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = ۲ + \sqrt{x-۱۲} \Rightarrow x = ۴ + (x-۱۲) + ۴\sqrt{x-۱۲}$$

$$\Rightarrow ۴\sqrt{x-۱۲} = ۸ \Rightarrow \sqrt{x-۱۲} = ۲ \Rightarrow x - ۱۲ = ۴ \Rightarrow x = ۱۶$$

$$\Rightarrow y = ۴ \Rightarrow A(۱۶, ۴) \Rightarrow OA = \sqrt{۱۶^{۲} + ۴^{۲}} = \sqrt{۴^{۲}(۴^{۲}+۱)} = ۴\sqrt{۱۷}$$

④ -۱۳۱

در واقع طول وتر کانونی را میخواهیم که $\frac{۲b^{۲}}{a}$ است.

$$۲y^{۲} - x^{۲} + ۴y = ۰ \Rightarrow ۲(y^{۲} + ۲y) - x^{۲} = ۰$$

$$۲((y+۱)^{۲} - ۱) - x^{۲} = ۰ \Rightarrow ۲(y+۱)^{۲} - x^{۲} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{(y+۱)^{۲}}{۱} - \frac{x^{۲}}{۲} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a^{۲} = ۱ \Rightarrow a = ۱ \\ b^{۲} = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۲b^{۲}}{a} = \frac{۲ \times ۲}{۱} = ۴$$

① -۱۳۲

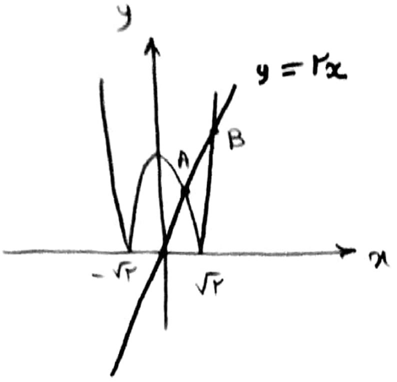
$y = ax^۲ + bx + c \xrightarrow{(۰,۵)} c = ۵ \Rightarrow y = ax^۲ + bx + ۵$

$\xrightarrow{(۱,۱۱)} ۱۱ = a + b + ۵ \Rightarrow a + b = ۶$

$\xrightarrow{(-۲,۵)} ۵ = ۴a - ۲b + ۵ \Rightarrow ۲a - b = ۰$

$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۴ \end{cases}$

$\Rightarrow y = ۲x^۲ + ۴x + ۵ \rightsquigarrow (-۱, ۳)$ ✓



① -۱۳۳

$A : \begin{cases} y = ۲x \\ y = ۴ - ۲x^۲ \end{cases} \Rightarrow ۴ - ۲x^۲ = ۲x$

$\Rightarrow ۲x^۲ + ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰$

$\Rightarrow x = ۱$

$B : \begin{cases} y = ۲x \\ y = ۲x^۲ - ۴ \end{cases} \Rightarrow ۲x^۲ - ۴ = ۲x \Rightarrow ۲x^۲ - ۲x - ۴ = ۰$

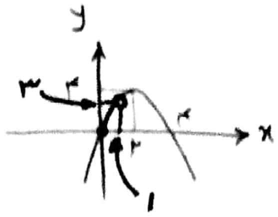
$\Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

$\Rightarrow \text{Max}(b - a) = ۲ - ۱ = ۱$

② -۱۳۴

$f(x) = ۲x - [۲x] \Rightarrow ۰ \leqslant f(x) < ۱$

$g(x) = -x^۲ + ۴x \Rightarrow g(x) = -(x - ۲)^۲ + ۴$



$۰ \leqslant x < ۱ \Rightarrow ۰ \leqslant g(x) < ۳$

② - ۱۳۵

$$f: y = x - \frac{۲}{x} \Rightarrow f^{-1}: x = y - \frac{۲}{y} \xrightarrow{y=-x}$$

$$\Rightarrow -y = y - \frac{۲}{y} \Rightarrow \frac{۲}{y} = ۲y \Rightarrow y^{۲} = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱ \xrightarrow{y<۰}$$

$$y = -۱ \xrightarrow{x=-y} x = ۱$$

---

③ - ۱۳۶

$$f^{-1}(۶) = a \Rightarrow f(a) = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} = ۶ \Rightarrow a = ۴$$

$$f^{-1}(۱۲) = b \Rightarrow f(b) = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} = ۱۲ \Rightarrow b = ۹$$

$$\Rightarrow a + b = ۱۳$$

---

② - ۱۳۷

$$f(x) = -۴ + ۲^{ax+b}$$

$$f(-\frac{۱}{۳}) = ۰ \Rightarrow -۴ + ۲^{-\frac{a}{۳}+b} = ۰ \Rightarrow ۲^{-\frac{a}{۳}+b} = ۲^{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{۳} + ۱ = ۲ \Rightarrow a = -۳$$

$$f(۰) = -۲ \Rightarrow -۴ + ۲^{b} = -۲ \Rightarrow ۲^{b} = ۲^{۱} \Rightarrow b = ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = -۴ + ۲^{-۳x+۱} \Rightarrow f(-\frac{۵}{۳}) = -۴ + ۲^{۶} = ۶۰$$

① − ۱۳۸

$$\log_{۴}^{۳} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۳} = ۰/۸ \Rightarrow \log_{۲}^{۳} = ۱/۶$$

$$\log_{۱۲}^{۶} = \frac{\log_{۴}^{۶}}{\log_{۴}^{۱۲}} = \frac{\log_{۲}^{۶}}{\log_{۲}^{۱۲}} = \frac{\log_{۲}^{۲} + \log_{۲}^{۳}}{۲\log_{۲}^{۲} + \log_{۲}^{۳}}$$

$$= \frac{۱ + ۱/۶}{۲ + ۱/۶} = \frac{۲/۶}{۳/۶} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

---

② − ۱۳۹

$$\tan ۳۰۰^\circ = \tan(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۴۸۰^\circ = \tan(۳۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ) = \tan ۱۲۰^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$$

$$= -\tan ۶۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

$$\sin ۸۴۰^\circ = \sin(۷۲۰^\circ + ۱۲۰^\circ) = \sin ۱۲۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$$

$$= \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow (-\sqrt{۳})\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + (-\sqrt{۳})\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{۳}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$$

---

④ − ۱۴۰

$$y = a + b\sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) \Rightarrow y = a + b\cos x$$

با توجه به نمودار $b<۰$ است :

$\max = a - b = ۳$ ①

$a + b\cos\frac{۷\pi}{۳} = ۰ \Rightarrow a + b\cos\frac{\pi}{۳} = ۰ \Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰$ ②

①, ② $\Rightarrow a = ۱ , b = -۲$

۱۴۱- ④

با توجه به نمودار a و b هم علامت نیستند.

$$\frac{۳\pi}{|b|}=\frac{۹\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۲}=۶\pi \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۳}\xrightarrow[\text{فرض } b<۰]{} b=-\frac{۱}{۳}$$

$$\begin{cases} \text{Max}=۱ \\ \text{min}=-۳ \end{cases} \xrightarrow[\text{فرض } a>۰]{} \begin{cases} a+c=۱ \\ -a+c=-۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} a=۲ \\ c=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲}{-\frac{۱}{۳}}=-۶$$

۱۴۲- ④

$$\sin\left(۲x-\frac{\pi}{۴}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)\Rightarrow \sin\left(۲x-\frac{\pi}{۴}\right)=\sin\Big(\underbrace{\frac{\pi}{۲}-\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}_{\frac{\pi}{۴}-x}\Big)$$

$\Rightarrow$ یکی از جوابها: $۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x \Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$

۱۴۳- ①

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x^n-۱۲}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow \begin{cases} n=۱ \\ \frac{a}{۴}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow a=\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}\ \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\ \lim_{x\to۳}\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}}{۴}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۲}}{۴}=\frac{\frac{۱}{۶}}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

۱۴۴- ③

$$\lim_{x\to-۲^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\frac{\overbrace{[-۲^-]}^{-۳}+۳}{۰^-}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰$$

۳ -۱۴۵

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & ; \quad x\leqslant -۲ \Rightarrow f(-۲)=\sqrt{۹}=۳\\ -\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c & ; \quad x>-۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=-۲-۲b+c\end{cases}$$

$$\Rightarrow -۲-۲b+c=۳ \Rightarrow c-۲b=۵ \quad (*)$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-۲}{۲\sqrt{۵-۲x}} & ; \quad x<-۲ \Rightarrow f'_-(-۲)=\frac{-۱}{۳}\\ -x+b & ; \quad x>-۲ \Rightarrow f'_+(-۲)=۲+b\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲+b=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow b=-\frac{۷}{۳} \xrightarrow{(*)} c=\frac{۱}{۳}$$

۴ -۱۴۶

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳=\frac{x^۲+۲x}{(x^۲-x)^۳} \Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲-x)^۳-۳(x^۲-x)^۲(۲x-۱)(x^۲+۲x)}{(x^۲-x)^۶}$$

$$\Rightarrow f'(۲)=\frac{۶\times ۸-۳\times ۴\times ۳\times ۸}{۶۴}=-\frac{۱۵}{۴}$$

① - ۱۴۷

$$f(x) = x + \sqrt{٤x-x^۲} \Rightarrow f'(x) = ۱ + \frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^۲}} = \frac{۲\sqrt{٤x-x^۲}+(٤-۲x)}{۲\sqrt{٤x-x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x-٤ = ۲\sqrt{۴x-x^۲} \Rightarrow x-۲ = \sqrt{٤x-x^۲}$$

$$\Rightarrow x^۲-٤x+٤ = ٤x-x^۲ \Rightarrow ۲x^۲-۸x+٤=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-٤x+۲=۰ \Rightarrow x = ۲\pm\sqrt{۲}$$

$$f(x) = x+\sqrt{۴-(x-۲)^۲} \begin{cases} \xrightarrow{x=۲+\sqrt{۲}} y = ۲+۲\sqrt{۲} \\ \xrightarrow{x=۲-\sqrt{۲}} y = ۲ \end{cases}$$

فاصله هرکدام از نقاط $(۲+\sqrt{۲}\,,\,۲+۲\sqrt{۲})$ یا $(۲-\sqrt{۲}\,,\,۲)$ از خط $y-x=۰$ برابر با یک است:

$$\frac{\left|۲-(۲-\sqrt{۲})\right|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}} = ۱$$

② - ۱۴۸

$$f(x) = \frac{x^۲-۶}{x^۲+۳} \Rightarrow f(x) = \frac{(x^۲+۳)-۹}{x^۲+۳} = ۱-\frac{۹}{x^۲+۳}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{۱۸x}{(x^۲+۳)^۲} \Rightarrow f''(x) = ۱۸ \times \frac{۱(x^۲+۳)^۲-۴x(x^۲+۳)x}{(x^۲+۳)^٤}$$

$$f''(x)=۰ \Rightarrow \underbrace{(x^۲+۳)}_{\text{مخالف صفر}}\left(\underbrace{(x^۲+۳)-۴x^۲}_{۳-۳x^۲}\right)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \Rightarrow y=-\frac{۵}{٤} \\ x=-۱ \Rightarrow y=-\frac{۵}{٤} \end{cases}$$

فاصله بین دو نقطه $(۱,-\frac{۵}{٤})\,,\,(-۱,-\frac{۵}{٤})$ برابر با $|۱-(-۱)|=۲$ است.

③ ۱۴۹- ④

$$\int_{۱}^{۴} \frac{x^{۲}+\sqrt{x}}{x}\,dx = \int_{۱}^{۴} \left(\frac{x^{۲}}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$$

$$= \int_{۱}^{۴} \left(x+\frac{۱}{\sqrt{x}}\right) dx = \left(\frac{۱}{۲}x^{۲}+۲\sqrt{x}\right)\Big]_{۱}^{۴}$$

$$= (۸+۴)-\left(\frac{۱}{۲}+۲\right) = ۹٫۵$$

۱۵۰- ③

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} a & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & c \\ b & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-۲b & ac-۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$(A\cdot B)^{۲} = \begin{bmatrix} a-۲b & ac-۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a-۲b & ac-۹ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a-۲b)^{۲} & (a-۲b)(ac-۹)+(ac-۹) \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

درایه‌های دو ماتریس $A\cdot B$ و $(A\cdot B)^{۲}$ را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(a-۲b)^{۲} = (a-۲b) \Rightarrow \begin{cases} a-۲b=۰ & \times \\ a-۲b=۱ & \checkmark \end{cases}$$

(به ازای $a-۲b=۰$ داریم $|A\cdot B|=۰$ و در نتیجه $A\cdot B$ وارون‌پذیر نیست)

$$\underbrace{(a-۲b)}_{۱}(ac-۹)+(ac-۹) = ac-۹ \Rightarrow ۲(ac-۹) = ac-۹$$

$$\Rightarrow (ac-۹)=۰ \Rightarrow ac=۹ \Rightarrow (a-۲b)+ac=۱۰$$

۱۵۱- ③

$A = \{ (۱,۱,۴), (۱,۲,۳), (۲,۱,۳), (۱,۳,۲), (۳,۱,۲), (۲,۲,۲);$
$(۱,۴,۱), (۴,۱,۱), (۲,۳,۱), (۳,۲,۱) \}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۶^{۳}} = \frac{۵ \times ۲}{۶ \times ۳۶} = \frac{۵}{۱۰۸}$$

۱۵۲- ②

$y = x - ۱۰$	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴

$$\bar{y} = \frac{۳۲}{۱۶} = ۲ \Rightarrow \bar{x} = ۱۲$$

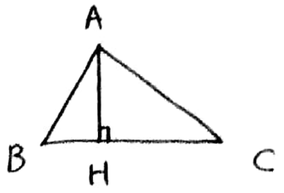
$$\sigma_y^{۲} = \frac{۵ \times ۴ + ۴ \times ۱ + ۷ \times ۴}{۱۶} = \frac{۴ \times ۱۳}{۱۶} = \frac{۱۳}{۴} \Rightarrow \sigma_y = \sigma_x = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲۴} \simeq ۰/۱۵$$

۱۵۳- ④

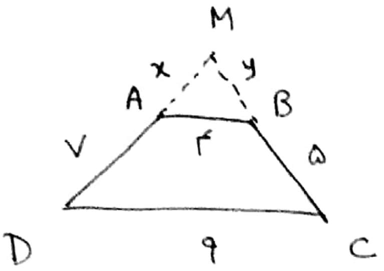
$$BC: \quad y + ۲ = \frac{۳ + ۲}{۷ - ۲}(x - ۲) \Rightarrow y = x - ۴$$

$$y - x + ۴ = ۰$$



$$\Rightarrow AH = \frac{|۵ - ۱ + ۴|}{\sqrt{۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

② -۱۵۴



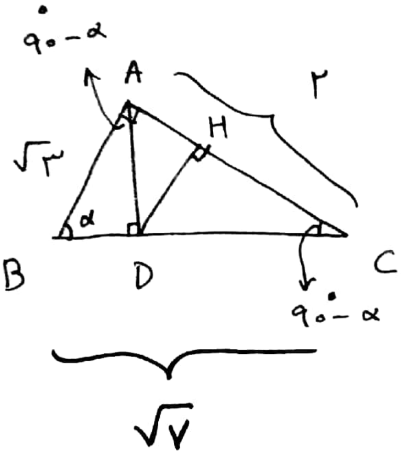
$$\frac{x}{x+۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ٤x + ۲۸ \Rightarrow x = \frac{۲۸}{۵}$$

$$\frac{x}{۷} = \frac{y}{۵} \Rightarrow y = \frac{۲۸}{۷} = ٤$$

$$\Rightarrow x + y + ٤ = \frac{۲۸}{۵} + ٤ + ٤ = ۱۳٫۶$$

---

③ -۱۵۵



$$BC = \sqrt{۴+۳} = \sqrt{۷}$$

$$CD = \frac{AC^{۲}}{BC} = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

$$\overset{\triangle}{HCD} \sim \overset{\triangle}{ABD} \Rightarrow \text{نسبت مساحت} = \left(\frac{CD}{AB}\right)^{۲}$$

$$= \left(\frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}}\right)^{۲} = \frac{۱۶}{۲۱}$$