

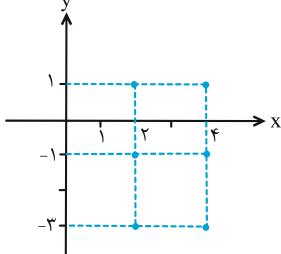
آزمون ۱ نیمسال اول

ردیف	سوالات	نمره
۱	ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) $2+4 > 5$ ب) $\emptyset \subsetneq \mathbb{R}$ ت) $(2 < -3) \wedge (4+7 = 8)$ پ) عدد $3^9 + 8$ عددی اول است.	۱
۲	با استفاده از جدول ارزش درستی $p \vee (q \wedge p) \equiv p$ را نشان دهید.	۱
۳	ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید. الف) $\forall x \in (0, +\infty) ; x + \frac{1}{x} > 2$ پ) $\exists y \in (-\infty, 0) ; 2y^3 + 3y - 2 = 0$	۱
۴	اگر $\{1, 3x+y, 4, 1, x+y\} = A = \{3, 3x+y\}$ باشد، در این صورت x, y را بیابید.	۰/۵
۵	مجموع تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی و یک مجموعه $n+2$ عضوی برابر با 160 است. n را بیابید.	۱
۶	برای دو مجموعه A و B ثابت کنید: $A - B \subseteq A$	۱
۷	تمام افرازهای مجموعه $\{a, b, c\} = A$ را بنویسید.	۱
۸	درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید. الف) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ ب) $(A - B)(B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$	۲
۹	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید، اگر $B' \subseteq A'$ آن‌گاه $B' \subseteq A$ است.	۱
۱۰	ثابت کنید برای دو مجموعه ناتهی A و B آن‌گاه $A \times B = B \times A$ خواهد بود.	۰/۵
۱۱	اگر $\{2k-1 k \in \mathbb{Z}, k \leq 1\} = A = \{2^n n \in \mathbb{N}, n < 3\}$ دو مجموعه باشند، آن‌گاه مجموعه‌های A و B را با نوشتן عضوهای مشخص کنید و سپس اعضای $B \times A$ را بنویسید و نمودارش رارسم کنید.	۲
۱۲	اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، مطلوب است محاسبه: الف) $P(A \cap B')$ ب) $P(B \cap A')$	۰/۵
۱۳	ثابت کنید برای دو پیشامد دلخواه A و B ، آن‌گاه $P(B) \leq P(A)$ است.	۱
۱۴	در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با مربع همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده اول باشد چقدر است؟	۰/۵
۱۵	دو تاس را پرتاب کرده‌ایم. اگر در هر دو تاس عددی اول ظاهر شود، احتمال اینکه مجموع دو تاس زوج باشد را بیابید.	۰/۵
۱۶	اگر یک روز ساحل جزیره هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال 80 درصد، ساحل آرام خواهد بود و به احتمال 20 درصد طوفانی خواهد بود. اگر طوفانی باشد، فردای آن روز به احتمال 60 درصد، ساحل آرام خواهد بود و به احتمال 40 درصد طوفانی خواهد بود. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟	۰/۵
جمع	موفق باشید	۲۰

پاسخ تشریحی آزمون ۱ نیمسال اول

نمره	سوالات	ردیف																				
۱	ت) نادرست پ) نادرست ب) نادرست الف) درست	۱																				
۱	مطابق جدول زیر در همهٔ حالت‌ها ارزش دو گزاره $(q \wedge p) \equiv p \vee (q \wedge p)$ و $p \vee (q \wedge p) \equiv p$ یکسان است، پس <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <th>p</th><th>q</th><th>$q \wedge p$</th><th>$p \vee (q \wedge p)$</th></tr> <tr> <td>د</td><td>د</td><td>د</td><td>د</td></tr> <tr> <td>د</td><td>ن</td><td>ن</td><td>د</td></tr> <tr> <td>ن</td><td>د</td><td>ن</td><td>ن</td></tr> <tr> <td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td><td>ن</td></tr> </table>	p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$	د	د	د	د	د	ن	ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	۲
p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$																			
د	د	د	د																			
د	ن	ن	د																			
ن	د	ن	ن																			
ن	ن	ن	ن																			
۱	الف) نادرست - مثال نقض $x = +1$ $\exists x \in (0, +\infty) ; x + \frac{1}{x} \leq 2$ نقیض گزاره: $\forall y \in (-\infty, 0) ; 2y^2 + 3y - 2 \neq 0$ ب) درست - $2y^2 + 3y - 2 = (2y - 1)(y + 2) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ یا $y = -2$ نقیض گزاره: $2y^2 + 3y - 2 \neq 0$	۳																				
۰/۵	برای تساوی دو مجموعه باید اعضای هر دو مجموعه با هم برابر باشند، پس داریم: $\begin{cases} 4 = 2x + y \\ 3 = x + y \end{cases} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$	۴																				
۱	$2^n + 2^{n+2} = 160 \Rightarrow 2^n + 2^n \times 2^2 = 160 \Rightarrow 5 \times 2^n = 160 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5$ $\Rightarrow n = 5$	۵																				
۱	برای دو مجموعه A و B داریم: $\forall x ; x \in A - B \Rightarrow x \in A , x \notin B \Rightarrow x \in A$ $A - B \subseteq A$ بنابراین	۶																				
۱	$\{a\}\{b\}\{c\}, \{a\}\{b,c\}, \{b\}\{a,c\}, \{c\}\{a,b\}, \{a,b,c\}$	۷																				
۲	(الف) $(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) \cap (C' \cap C')$ $= (A \cap C') \cap (B \cap C') = (A - C) \cap (B - C)$ (ب) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') = [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$ $= [(A \cup B) \cap (\cancel{B'} \cup \cancel{B})] \cap [(\cancel{A} \cup A') \cap (B' \cup A')] = (A \cup B) \cap (B' \cup A') = (A \cup B) - (A \cap B)$	۸																				
۱	$\forall x ; x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A'$ بنابراین $B' \subseteq A'$	۹																				
۱/۵	تعريف ضرب دکارتی $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x ; x \in A \wedge \exists y ; y \in B \xrightarrow{\text{تعريف ضرب دکارتی}} \exists(x, y) ; (x, y) \in A \times B$ $\xrightarrow{A \times B = B \times A} (x, y) \in B \times A \xrightarrow{\text{تعريف ضرب دکارتی}} x \in B \wedge y \in A \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$	۱۰																				



ردیف	سوالات	نمره
۱۱	$A = \{2, 4\}$ $B = \{-3, -1, 1\}$ $A \times B = \{(2, -3), (2, -1), (2, 1), (4, -3), (4, -1), (4, 1)\}$ 	۲
۱۲	$P(A') = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ (الف) $P(A \cup B) = \frac{7}{8} \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$ (ب) $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$	۱/۸
۱۳	$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$ (I) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \stackrel{(I)}{=} P(A) - P(B)$ (II) $P(A - B) \geq 0 \stackrel{(II)}{\Rightarrow} P(A) - P(B) \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq P(B)$	۱
۱۴	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(S) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$ (I) $\left. \begin{array}{l} P(1) = 1 \times x \\ P(2) = 1 \times x \\ P(3) = 1 \times x \\ P(4) = 1 \times x \\ P(5) = 1 \times x \\ P(6) = 1 \times x \end{array} \right\} \Rightarrow P(1) + P(2) + \dots + P(6) = x + 1x + 2x + 3x + 4x + 5x = 15x = 1$ (II) $(I) \wedge (II) \Rightarrow 15x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{15}$ $P(\{2, 3, 5\}) = P(2) + P(3) + P(5) = 1x + 2x + 4x = 7x = \boxed{\frac{7}{15}}$	۱/۸
۱۵	اگر پیشامد A را اول بودن دو تاس در نظر بگیریم و پیشامد B را زوج بودن مجموع دو تاس، داریم: $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$ $B = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ $A \cap B = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ $P(B A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{4}{9}$	۱/۸
۱۶	طبق قانون ضرب احتمال داریم: $P(B A) = \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = \boxed{\frac{8}{100}}$	۱/۸
۲۰	موفق باشید	جمع