

مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع : ۹ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۶ / ۱۳۹۰			سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پژوهش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۰		

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید که رابطه $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n(n+1)^2}{4}$ برقرار است.	۱/۵
۲	با استدلال استنتاجی، نشان دهید حاصل ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.	۱
۳	با ذکر دلیل بنویسید آیا $(4 + 3^n)$ همیشه یک عدد اول است؟	۰/۵
۴	اگر $n$ عدد طبیعی و $(3n+2)$ عددی فرد باشد، با استدلال برهان خلف، نشان دهید که $n$ نیز عددی فرد است.	۱
۵	نشان دهید که اگر هر زیر مجموعه $\emptyset$ عضوی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را در نظر بگیریم، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آنها برابر $10$ باشد.	۱/۲۵
۶	مجموعه های زیر را به صورت ریاضی (گزاره نما) نشان دهید. $A = \{-1, 0, 1, 8, 27, \dots\}$ و $B = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$	۱/۲۵
۷	اگر $A$ زیر مجموعه $B$ باشد، با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، درستی رابطه $\subseteq$ را ثابت کنید. $B - (B - A) = A$	۱/۵
۸	نمودار رابطه $\subseteq$ را درسم کنید. $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x^2\}$	۰/۷۵
۹	رابطه $\subseteq$ روی اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ ، به صورت $a R b \Leftrightarrow a^2 + 2b = b^2 + 2a$ تعریف شده است: الف) ثابت کنید $R$ یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[2]$ را محاسبه کنید.	۱/۵
	«ادامه سوالات در صفحه ۲»	

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۹ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۶ / ۱۳۹۰			سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پژوهش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۰		

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	<p>کدام یک از عبارت های زیر درست و کدام یک نادرست است.</p> <p>الف) مثال نقض، برای اثبات درستی یک قضیه کلی به کار می رود.</p> <p>ب) اگر <math>x \in A' \cap B'</math> آنگاه <math>x \notin A \cup B</math> یا <math>x \in A' \cup B'</math>.</p> <p>ج) حاصل ضرب دکارتی <math>A \times B = \emptyset</math> آنگاه <math>A = \emptyset</math> و <math>B = \emptyset</math>.</p> <p>د) اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو پیشامد از فضای نمونه ای <math>S</math> باشند به طوری که <math>A \subseteq B</math>، آنگاه داریم:</p> $P(B - A) = P(B) - P(A)$	۱
۱۱	<p>با اعداد طبیعی کوچکتر از <math>\underline{4}</math>، اعداد دو رقمی می سازیم:</p> <p>الف) تعداد اعضای فضای نمونه این پیشامد تصادفی را بنویسید.</p> <p>ب) پیشامد <math>A</math> را طوری بنویسید که تمام اعضای آن، اعداد زوج و کمتر از <math>\underline{40}</math> باشند.</p> <p>ج) پیشامد <math>B</math> را طوری بنویسید که تمام اعضای آن، اعداد فرد و بیشتر از <math>\underline{40}</math> باشند.</p>	۲
۱۲	<p>می خواهیم یک تیم سه نفری از <math>\underline{10}</math> دانش آموز رشته تجربی و <math>\underline{6}</math> دانش آموز رشته ریاضی انتخاب کنیم، مطلوب است احتمال آنکه لاقل یک نفر رشته ریاضی باشد.</p>	۱/۵
۱۳	<p>اگر <math>S = \{a, b, c, d\}</math> یک فضای نمونه ای باشد و داشته باشیم:</p> $P(c) = P(d) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad P(a) = 2P(b)$ <p>مطلوب است محاسبه <math>P(a')</math> و <math>P(b')</math>.</p>	۱/۵
۱۴	<p>یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع <math>\underline{4}</math> انتخاب می کنیم، مطلوب است احتمال آن که فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از <math>\underline{1}</math> باشد.</p>	۱/۵
۱۵	<p>عددی به تصادف از مجموعه <math>\{1, 2, 3, \dots, 1000\}</math> انتخاب می کنیم، مطلوب است احتمال آن که عدد انتخابی بر <math>\underline{5}</math> بخش پذیر باشد ولی بر <math>\underline{3}</math> بخش پذیر نباشد.</p>	۱/۵
۱۶	<p>اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو پیشامد از فضای نمونه ای <math>S</math> باشند و <math>P(A) = 0.4</math> و <math>P(B) = 0.3</math> و <math>P(A \cup B) = 0.75</math> احتمال آن را محاسبه کنید که هر دو پیشامد <math>A</math> و <math>B</math> با هم اتفاق بیفتد.</p>	۰/۷۵
۲۰	جمع نمره	«موفق باشید»

با اسمه تعالی

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۶ / ۱۶		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پژوهش http://aee.medu.ir		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۰

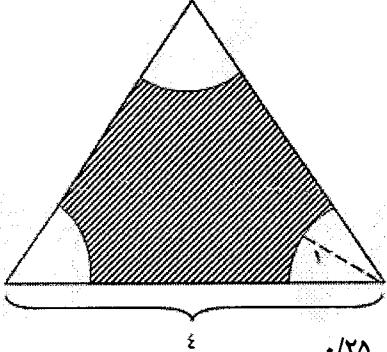
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$P(1): 1^r = \left(\frac{1(r)}{r}\right)^r \Rightarrow 1 = 1 \quad (0/25)$ $P(K): 1^r + 2^r + 3^r + \dots + K^r = \left(\frac{K(K+1)}{2}\right)^r \quad \text{فرض استقراء} \quad (0/25)$ $P(K+1): 1^r + 2^r + 3^r + \dots + K^r + (K+1)^r = \left(\frac{(K+1)(K+2)}{2}\right)^r \quad \text{حکم استقراء} \quad (0/25)$ $P(K+1): \left(\frac{K(K+1)}{2}\right)^r + (K+1)^r = (K+1)^r \left(\frac{K^r}{2} + K+1\right) = \quad (0/25) \quad (0/25)$ $(K+1)^r \left(\frac{K^r + 4K + 4}{4}\right) = \left(\frac{(K+1)(K+2)}{2}\right)^r \quad (0/25)$	۱/۵
۲	$(2K)(2K+2) = (4K^r + 4K) = 4k(k+1) = 4(2K) = 8K \quad (0/25)$ $(0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$	۱
۳	خیر (0/25) ، $n=4 \Rightarrow 4+3^3=85$ اول نیست . (0/25)	۰/۵
۴	$n=2k \Rightarrow 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1) = 2A \quad \text{خلاف حکم}$ $(0/25) \quad (0/25) \quad (0/25)$ <p>به خلاف فرض رسیده ایم ، پس همان حکم داده شده صحیح است. (0/25)</p>	۱
۵	$\text{هر مجموعه } A \text{ که } 6 \text{ عضوی انتخاب شود ، } 6 \text{ عضو} = \text{تعداد کبوترها} \quad (0/25)$ <p>تعداد حالاتی که ۱۰ ایجاد می شود با استفاده از اعداد تکراری یا اعداد بی تکرار (۵ حالت) یا (۴ حالت) = تعداد لانه ها (0/۵)</p> $\{ (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6) \} \text{ یا } \{ (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 5) \}$ <p>بر طبق اصل لانه کبوتر <math>5 &lt; 6</math> یا <math>4 &lt; 6</math> پس حداقل دو عضو با مجموع ۱۰ وجود دارد. (0/۵)</p>	۱/۲۵
۶	$(0/5) \quad A = \{ x^r \mid x \in z, x \geq -1 \}$ <p>حاصلضرب دو ریشه مجموع دو ریشه</p> $S = \cdot , P = -2 \Rightarrow x^r - Sx + P = \cdot \Rightarrow x^r - 2 = \cdot \Rightarrow B = \{ x \mid x^r - 2 = \cdot \} \quad (0/25)$	۱/۲۵
۷	$B - (B - A) = B - (B \cap A') = B \cap (B \cap A')' = B \cap (B' \cup A) = (B \cap B') \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (B \cap A) = A \quad (0/25)$ $(0/25) \quad (0/25) \quad (0/25) \quad (0/25) \quad \text{طبق فرض } A \subset B \quad (0/5)$	۱/۵
	« ادامه در صفحه ی دوم »	

با اسمه تعالی

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۶/۱۶		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پژوهش دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۰ <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۰

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۸	<p>رسم دایره (۰/۲۵)</p> <p>رسم سه‌می (۰/۲۵)</p> <p>مشخص شدن ناحیه مشترک (۰/۲۵)</p>	۰/۷۵
۹	<p>۱) <math>aRa \Rightarrow a^r + ۲a = a^r + ۲a</math> رابطه بازتابی (۰/۲۵)</p> <p>۲) <math>aRb \Rightarrow bRa</math></p> <p><math>a^r + ۲b = b^r + ۲a \Rightarrow b^r + ۲a = a^r + ۲b \Rightarrow bRa</math> رابطه تقارنی (۰/۲۵)</p> <p>۳) <math>(aRb \text{ , } bRc) \Rightarrow aRc</math></p> <p><math>\begin{cases} a^r + ۲b = b^r + ۲a \\ b^r + ۲c = c^r + ۲b \end{cases} \Rightarrow a^r + ۲c = c^r + ۲a \Rightarrow aRc</math> رابطه تعدی (۰/۵)</p> <p>این دو رابطه را جمع می‌کنیم.</p> <p>هر سه خاصیت را دارد پس هم ارزی است.</p> <p><math>[۲] = \{x \mid xR۲\} \Rightarrow \{x \mid x^r + ۴ = ۴ + ۲x\} = \{0, ۲\}</math> (۰/۲۵)</p>	۱/۵
۱۰	<p>(الف) نادرست</p> <p>(ب) درست</p> <p>(ج) نادرست</p> <p>(د) درست</p> <p>هر قسمت (۰/۲۵) نمره دارد.</p>	۱
۱۱	<p>(الف) <math>n(S) = ۲۵</math> (۰/۵)</p> <p>ب) هر دو عضو نوشته شده ۰/۲۵ نمره دارد.</p> <p>(ج) <math>A = \{۱۲, ۱۴, ۲۲, ۲۴, ۳۲, ۳۴\}</math> (۰/۷۵)</p> <p><math>B = \{۴۱, ۴۳, ۴۵, ۵۱, ۵۳, ۵۵\}</math> (۰/۷۵)</p> <p>«ادامه در صفحه ی سوم»</p>	۲

ساعت شروع: ۹ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۶/۱۶		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پژوهش http://aee.medu.ir	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در شهریور ماه سال ۱۳۹۰	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۲	$P(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2} + \binom{5}{2}\binom{10}{1} + \binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{440}{500} = \frac{11}{14}$ <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span> <p>صورت کسر هر قسمت نوشته شده ۰/۲۵ نمره و مخرج کسر ۵/۰ نمره داده شود.</p>	۱/۵
۱۳	$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow$ <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span> $2x + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ <span style="margin-left: 10em;">(.۵)</span> $P(b) = \frac{1}{4}$ <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span> $P(a') = 1 - P(a) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span> <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span>	۱/۵
۱۴	$P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{4\sqrt{3} - \pi}{4\sqrt{3}}$ <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span> <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span> <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span>	۱/۵
۱۵	 <p>۰/۲۵</p>	۱/۵
۱۶	<p>تشخیص پیدا کردن اشتراک دو پیشامد ۰/۲۵ نمره دارد.</p> $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۲۵ + ۰/۳ - ۰/۴ = ۰/۱$ <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span> <span style="margin-left: 10em;">(.۲۵)</span>	۰/۷۵
	۲۰ جمع نمره	۲۰

مصححین گرامی:

لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.