

مقدمه

سپاس یکتای بی‌همتا را که بار دیگر زمان و توان نوشتن را به این کمترین عطا فرمود. در اثنای پایه‌ریزی نظام جدید آموزشی و تغییر در جهت بهتر شدن شیوه آموزش و یادگیری، دو کتاب «آمار و احتمال» و «ریاضیات گسسته» (در رشته ریاضی)، نسبت به کتاب‌های پیشین خود، دست‌خوش تغییراتی شدند و به ناچار مؤلفین را بر آن داشت تا پس از اعمال تغییرات لازم، کتاب‌های جدیدی در این زمینه بازنویسی نمایند. تعدد کتاب‌های تألیف شده در زمینه این دو درس، که هر یک از دید و سلیقه خود به آن‌ها پرداخته‌اند، گویای اهمیت این دو درس در آزمون‌های سراسری می‌باشد. لذا بر آن شدیم تا کتابی جامع و دربرگیرنده هر دو درس «آمار و احتمال» و «ریاضیات گسسته» به رشته تحریر درآوریم.

چون صوفیان به حالت رقصند مقتدا ما نیز هم به شعبده دستی برآوریم

البته بی‌هیچ ادعایی و اصلاً فاش می‌گوییم که ما در پیشگاه اساتید این دانش و فن، «از خاک کمترین» اما در مورد این کتاب مطالبی چند ارائه می‌گردد:

- در قسمت درسنامه سعی کرده‌ایم تمام مطالب مورد نیاز، جهت یادگیری و تسلط بر متن کتاب درسی، همراه با ارائه  نکته‌های مهم، ترفندهای آموزشی و  راهبردهایی که مورد نیاز داوطلبان کنکور می‌باشد، مورد بحث و بررسی دقیق و موشکافانه قرار دهیم. در درسنامه، تست‌هایی مطرح نموده‌ایم که جنبه آموزشی آن‌ها بسیار زیاد است، بنابراین در ابتدا مطالعه درسنامه به همراه حل و بررسی تست‌های آن را به شدت توصیه می‌کنیم.
- در مورد مطالب جدیدی که در کتاب‌های آمار و احتمال و ریاضیات گسسته توسط مؤلفین محترم کتاب‌های درسی ارائه شده است، تمام تلاش خود را به کار بسته‌ایم، تا با مراجعه به کتاب‌های مرجع و مقاله‌ها و پایان‌نامه‌های معتبر داخلی و خارجی، این مباحث را مورد بررسی و بسط قرار دهیم، بنابراین بحث‌هایی از قبیل منطق ریاضی، آمار استنباطی، احاطه‌گری و مربع‌های لاتین برگرفته از متن کتاب‌های درسی و منابع مورد اشاره می‌باشند. هم‌چنین تا حد ممکن از ارائه مطالبی که خارج از چارچوب کتاب‌های درسی می‌باشد، اجتناب کرده‌ایم. هرچند در بعضی موارد به جهت درک و فهم بیشتر، مطالبی تحت عنوان  «یک گام فراتر» آورده شده است که مطالعه آن‌ها اجباری نیست و فقط برای آن دسته از دانش‌پژوهانی که مایل به یادگیری مطالبی فراتر از چارچوب کتاب درسی می‌باشند، ارائه گردیده است.
- در انتهای هر مبحث «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» شامل تست‌های مهم و مرتبط با کتاب‌های نظام آموزشی جدید از کنکور سراسری و نیز تست‌های مطرح شده در آزمون‌های معتبر به همراه سؤالات تألیفی ارائه نموده‌ایم. ما در این کتاب تمام سعی خود را به کار بسته‌ایم تا این مجموعه از سؤال‌ها، جامع و برآورنده نیازهای یک داوطلب کنکور باشد. پاسخ سؤال‌ها تا حد ممکن و در چارچوب بضاعت علمی نگارندگان، کاملاً تشریحی و مبتنی بر درسنامه‌ها ارائه شده است. تمام تلاش خود را به کار بسته‌ایم که هر آن‌چه مورد نیاز یک داوطلب کنکور رشته ریاضی است، در مجموعه تست‌ها پوشش داده‌ایم. هرچند باز هم تأکید می‌کنیم که قبل از مراجعه به سؤال‌های چهارگزینه‌ای، مطالعه و تسلط بر درسنامه هر قسمت از اولویت بیشتری برخوردار است.

مقدمه ویرایش دوم

آفریدگار دانا را سپاسگزاریم که فرصت ارائه ویراستی نو از کتاب حاضر را به مؤلفین عطا فرمود. در این ویراست، تغییرات زیر، اعمال شده است.

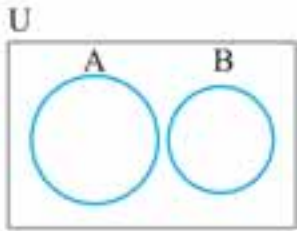
- درسنامه‌های کتاب تا حد ممکن مطابق نظام جدید آموزشی گردیده و مطالب حشو حذف شده است.
 - مجموعه سؤال‌های چهارگزینه‌ای، با حذف سؤال‌های ضعیف‌تر و قدیمی و افزودن تعدادی سؤال جدید و مفهومی، از غنای بیشتری برخوردار شده است.
 - اشتباهات چاپی و علمی کتاب، هر آن‌چه که توسط خوانندگان تیزبین، ویراستاران با دقت و همکاران گرانقدر و دلسوز گوشزد شده و تا جایی که به چشم مؤلفین آمده، برطرف گردیده است.
 - سؤال‌های کنکور سال ۱۳۹۸ رشته ریاضی داخل و خارج از کشور، همراه با پاسخ تشریحی در انتهای کتاب درج شده است. در به ثمر رسیدن این ویراست بر خود لازم می‌دانیم از افرادی که به‌طور مستقیم و غیرمستقیم ما را یاری کرده‌اند، قدردانی کنیم، سپاس ویژه خود را تقدیم می‌کنیم به:
 - سرکار خانم دنیا سلیمی، که مسئولیت ویراستاری گروه ریاضی را بر عهده دارند.
 - سرکار خانم زهرا انیشه، که با صبر و پشتکار ستودنی، زحمت ویراستاری صوری و محتوایی این کتاب را برعهده گرفتند و تمام هماهنگی‌های لازم را با بخش تولید، به خوبی انجام دادند و همکاران ارجمندشان سرکار خانم آزاده فلاح‌زاده و مهربان رضوی که در امر ویراستای کتاب زحمات زیادی کشیدند.
 - مدیر محترم واحد تولید سرکار خانم سمیرا سیاوشی، همکار محترم‌شان جناب آقای میلاد صفایی و صفحه‌آرای توانا خانم رویا طبسی و رسام‌های پرتلاش، سرکار خانم مریم صابری، شیما شیدایی و تایپیست عزیز جناب آقای امیر ماهر که زحمات وصف‌ناپذیری را متحمل شدند.
- در انتها از تمامی کسانی که این کتاب را مورد مطالعه قرار می‌دهند، تقاضا داریم که ما را از انتقادهای سازنده و به‌جای خود برخوردار نمایند و ارائه خدمتی هرچند ناچیز به جوانان این مرز و بوم، چراغ راه مؤلفین باشند.

دو پیشامد ناسازگار (جدا، مجزا)

دو پیشامد را ناسازگار می‌گوییم هرگاه رخ دادن هر دو آن‌ها با هم، غیرممکن (نشدنی) باشد. به عبارت دیگر:

$$A \text{ و } B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

\downarrow
 رخ دادن با هم غیرممکن



برای نمونه: در آزمایش پرتاب یک تاس، دو پیشامد زیر ناسازگارند:

A: عدد ظاهر شده زوج است.

B: عدد ظاهر شده فرد است.

$$\begin{cases} A = \{2, 4, 6\} \\ B = \{1, 3, 5\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ و } B \text{ دو پیشامد ناسازگارند}$$

(برگرفته از کتاب درسی)

برای نمونه: فرض کنید دانش‌آموزی به تصادف از یک کلاس انتخاب می‌شود. دو پیشامد:

A: این دانش‌آموز متولد ماه مهر است.

B: این دانش‌آموز متولد فصل تابستان است.

تست ۱: سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم و پیشامدهای زیر را معرفی می‌کنیم، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

پیشامد A، که در آن «هر سه بار مشابه بیاید»

پیشامد B، که در آن «زوج بار رو بیاید»

(۱) A و B ناسازگارند. (۲) A و B ناسازگار نیستند. (۳) A و B' ناسازگارند. (۴) A' و B' ناسازگارند.

پاسخ (گزینه ۲): پیشامد «هر سه بار مشابه بیاید»، یعنی هر سه بار «رو» یا هر سه بار «پشت» بیاید. پس:

پیشامد «زوج بار رو بیاید» یعنی صفر بار «رو» یا «دو بار رو بیاید» (توجه کنید که صفر عددی زوج است)، پس:

$$B = \{(\text{پ}, \text{پ}, \text{پ}), (\text{ر}, \text{ر}, \text{پ}), (\text{ر}, \text{پ}, \text{ر}), (\text{پ}, \text{ر}, \text{ر})\}$$

صفر بار «رو» دو بار «رو»

واضح است که $A \cap B \neq \emptyset$ و در نتیجه A و B ناسازگار نیستند.

با توجه به جبر مجموعه‌ها می‌دانیم $A \cap B' = A - B$ ، پس از A عضوهای مشترک با B را حذف می‌کنیم، یعنی:

$$A \cap B' = A - B = \{(\text{ر}, \text{ر}, \text{ر})\}$$

پس A و B' نیز ناسازگار نیستند.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که دو پیشامد A' و B' نیز ناسازگار نیستند.

تست ۲: یک تاس را ۳ بار پرتاب می‌کنیم و دو پیشامد زیر را معرفی می‌کنیم، کدام نتیجه‌گیری همواره درست نیست؟

پیشامد A، که در آن «تاس برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید» را مشخص کنید.

پیشامد B، که در آن «تاس تا پرتاب سوم، دو بار ۶ بیاید» را مشخص کنید.

(۱) A و B ناسازگارند. (۲) A و B' سازگارند. (۳) A و B سازگارند. (۴) A' و B' سازگارند.

پاسخ (گزینه ۳): «تاس برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید» یعنی دو بار اول غیر ۶ ظاهر شده است و فقط در بار سوم ۶ آمده است. پس:

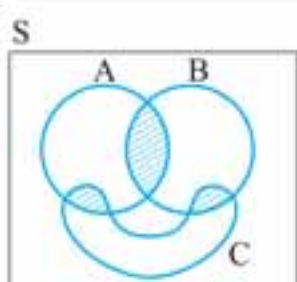
$$A = \{(1, 1, 6), (1, 2, 6), (1, 3, 6), (1, 4, 6), (1, 5, 6), (2, 1, 6), (2, 2, 6), (2, 3, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 6), (3, 1, 6), (3, 2, 6), (3, 3, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 1, 6), (4, 2, 6), (4, 3, 6), (4, 4, 6), (4, 5, 6), (5, 1, 6), (5, 2, 6), (5, 3, 6), (5, 4, 6), (5, 5, 6)\}$$

«تاس تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید» یعنی دو بار اول ۶ و بار سوم غیر ۶ یا دو بار اول و سوم ۶ و بار دوم غیر ۶ یا دو بار دوم و سوم ۶ و بار اول غیر ۶ ظاهر شده است. بنابراین:

$$B = \{(6, 6, 1), (6, 6, 2), (6, 6, 3), (6, 6, 4), (6, 6, 5), (6, 1, 6), (6, 2, 6), (6, 3, 6), (6, 4, 6), (6, 5, 6), (1, 6, 6), (2, 6, 6), (3, 6, 6), (4, 6, 6), (5, 6, 6)\}$$

واضح است که $A \cap B = \emptyset$. پس دو پیشامد A و B ناسازگارند.

از آنجایی که $A \cap B = \emptyset$ ، پس $A - B = A$ و $B - A = B$ لذا دو پیشامد A و B' و نیز دو پیشامد A' و B' سازگارند (چرا؟).



هشدار: ممکن است سه پیشامد دو به دو سازگار باشند، اما هر سه با هم ناسازگار باشند. این موضوع را

می‌توان در نمودار ون نمایش داد که سه پیشامد A، B و C دو به دو سازگارند. (دو به دو اشتراک دارند) اما هر

سه با هم ناسازگارند. (هر سه با هم اشتراکی ندارند).

برای نمونه: در پرتاب دو سکه با هم، سه پیشامد زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) سکه اول «رو» بیاید. ب) سکه دوم «رو» بیاید. پ) فقط یک سکه «رو» بیاید.

این سه پیشامد دو به دو سازگارند، اما هر سه با هم ناسازگارند. زیرا: $A = \{(r, r), (r, p)\}$ و $B = \{(r, r), (p, r)\}$ و $C = \{(p, r), (p, p)\}$ واضح است که $A \cap B \neq \emptyset$ ، $A \cap C \neq \emptyset$ و $B \cap C \neq \emptyset$ ، پس این سه پیشامد دو به دو سازگارند. اما $A \cap B \cap C = \emptyset$ ، پس رخ دادن هر سه با هم غیرممکن است لذا هر سه با هم ناسازگارند.

احتمال و اصول آن

احتمال یک عدد حقیقی است که به یک پیشامد نسبت داده می‌شود و بیان‌گر میزان اطمینان از وقوع آن پیشامد است. برای هر پیشامد مانند A ، احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده می‌شود که عددی حقیقی متعلق به بازه $[0, 1]$ است.

اصول احتمال (اصول کولموگوروف) عبارتند از:

$$P(S) = 1$$

۱) احتمال رخ دادن پیشامد حتمی (S) برابر ۱ است. یعنی:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۲) برای دو پیشامد ناسازگار A و B داریم:

• اصل ۲ برای n پیشامد دو به دو ناسازگار A_1, A_2, \dots, A_n نیز برقرار است و داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

❗ تست: احتمال مسافرت شخصی با هواپیما برابر $\frac{1}{5}$ و با قطار برابر $\frac{2}{3}$ است. احتمال این که این شخص با هواپیما یا قطار مسافرت کند، کدام است؟

$$\frac{11}{15} \quad (۴)$$

$$\frac{13}{15} \quad (۳)$$

$$\frac{3}{15} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{15} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳ واضح است که این دو پیشامد (سفر با هواپیما، سفر با قطار)، ناسازگارند (چرا؟)؛ پس طبق اصول احتمال داریم:

$$P(\text{سفر با هواپیما} \cup \text{سفر با قطار}) = P(\text{سفر با هواپیما}) + P(\text{سفر با قطار}) = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$$

• احتمال رخ دادن یک پیشامد زمانی مطرح می‌شود که آن پیشامد هنوز اتفاق نیفتاده است. به عبارت دیگر احتمال، وضعیت آینده را مورد بررسی قرار می‌دهد. اما اگر پیشامد اتفاق بیافتد، احتمال در مورد آن معنی ندارد و علم آمار مطرح می‌شود. به عبارت دیگر علم آمار، پیشامدهایی که در گذشته رخ داده‌اند را مورد بررسی قرار می‌دهد. بنابراین می‌توان گفت:

علم احتمال: بررسی یک نمونه نامعلوم (آینده) از یک جامعه معلوم است.

علم آمار: شناختن جامعه نامعلوم، با استفاده از نمونه‌های جمع آوری شده معلوم است (گذشته).

(برگرفته از کتاب درسی)

📌 مثال: هریک از مسئله‌های زیر به کدام علم مربوط می‌شود؟

احتمال	آمار	صورت مسئله
✓	<input type="checkbox"/>	الف) می‌دانیم ۹۰ درصد لامپ‌های موجود در یک جعبه سالم است. چند لامپ از جعبه برداریم تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک لامپ معیوب برداشته‌ایم؟
<input type="checkbox"/>	✓	ب) درآمد معلمان آموزش و پرورش چقدر است؟
<input type="checkbox"/>	✓	پ) چند نفر از دانش‌آموزان کلاس یازدهم به درس احتمال علاقه دارند؟
✓	<input type="checkbox"/>	ت) در انتخابات دانش‌آموزی سال گذشته، دبیرستان (الف) با مشارکت بیش از ۹۵ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر دانش‌آموزان این دبیرستان در مورد مشارکت در انتخابات دانش‌آموزی سؤال کنیم، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟
✓	<input type="checkbox"/>	ث) از ۲۵۰ نفر دانش‌آموزان یک دبیرستان، ۱۴۰ نفر در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند. اگر از این دبیرستان ۵۰ دانش‌آموز به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۰ نفر از آن‌ها در رشته ریاضی تحصیل نمایند؟

الف) در این مسئله، جامعه مورد بحث معلوم است (جعبه مورد نظر)، اما نمونه خواسته شده (چند لامپ از جعبه برداریم؟) نامعلوم است، پس این مسئله به علم احتمال مربوط می‌شود.

ب) برای بررسی این مسئله باید از تعدادی معلم، درآمدشان را بپرسیم تا بتوانیم با استفاده از نمونه‌های معلوم، این جامعه نامعلوم (حقوق معلمان آموزش و پرورش) را بشناسیم. پس این مسئله به علم آمار مربوط می‌شود.

در این مسئله جامعه نامعلوم است. زیرا در حال حاضر نمی‌دانیم میزان علاقه دانش‌آموزان کلاس یازدهم به درس احتمال چقدر است. پس باید با بررسی چند نمونه معلوم (مثلاً پرسش از برخی یا تمام دانش‌آموزان کلاس یازدهم) به شناختن جامعه نامعلوم برسیم، که این مسئله به علم آمار مربوط می‌شود.

مثال: در آزمایش پرتاب یک سکه سالم و یک تاس سالم با هم:

الف) اگر سکه «رو» ظاهر شود، با کدام احتمال تاس عدد ۶ می‌آید؟
 ب) اگر تاس عدد ۶ ظاهر شود، با کدام احتمال سکه «رو» می‌آید؟
 باتوجه به این که این دو پیشامد مستقل‌اند، (زیرا نتیجه هر کدام، در نتیجه دیگری تأثیری ندارد.) داریم:

$$\text{الف) } P(6 \text{ تاس} | \text{سکه رو}) = P(6 \text{ تاس}) = \frac{1}{6} \quad \text{ب) } P(6 \text{ تاس} | \text{سکه رو}) = P(\text{سکه رو}) = \frac{1}{2}$$

نتیجه: برای دو پیشامد A و B با احتمال‌های غیرصفر از فضای نمونه‌ای S داریم:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(A) \cdot P(B)$$

برای اثبات، با توجه به نتیجه ۱ و قانون ضرب احتمال‌ها داریم:

• توجه کنید که دو پیشامد مستقل، می‌توانند «با هم» اتفاق بیافتند، چون ربطی به هم ندارند. بنابراین اشتراک آن‌ها (یعنی رخ دادن توأم) وجود دارد!

$$A \text{ و } B \text{ وابسته} \Leftrightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

• اگر دو پیشامد مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر:

تست: در پرتاب دو تاس سالم با هم، با کدام احتمال هیچ کدام از اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نیستند؟

$$\text{الف) } \frac{1}{3} \quad \text{ب) } \frac{1}{2} \quad \text{ج) } \frac{4}{9} \quad \text{د) } \frac{5}{7}$$

پاسخ گزینه ۳: $P(\text{تاس دوم مضرب ۳ نباشد} \cap \text{تاس اول مضرب ۳ نباشد}) = P(\text{تاس اول مضرب ۳ نباشد}) \cdot P(\text{تاس دوم مضرب ۳ نباشد}) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$

تست: دو نفر به نام‌های A و B با احتمال‌های قبولی به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ در یک آزمون شرکت می‌کنند. با کدام احتمال دست کم یکی قبول می‌شود؟

$$\text{الف) } ۰/۹۹ \quad \text{ب) } ۰/۱۵ \quad \text{ج) } ۰/۹۴ \quad \text{د) } ۰/۵۶$$

پاسخ گزینه ۳: اگر شرایط آزمون را بدون تأثیر در یکدیگر فرض کنیم، در این صورت قبولی A و قبولی B دو پیشامد مستقل‌اند و ربطی

به هم ندارند. پس: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = ۰/۷ \times ۰/۸ = ۰/۵۶$

اکنون داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۷ + ۰/۸ - ۰/۵۶ = ۰/۹۴$

$$A \text{ و } B \text{ مستقل} \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

نتیجه:

تست: احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی بیمار A برابر ۰/۶ و روی بیمار B برابر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود،

مطلوب است احتمال رخ دادن کدام یک از پیشامدهای زیر عددی کوچک‌تر است؟

$$\begin{array}{ll} \text{الف) روی هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد.} & \text{ب) روی حداقل یکی موفقیت آمیز باشد.} \\ \text{پ) روی هیچ کدام موفقیت آمیز نباشد.} & \text{ت) فقط روی بیمار B موفقیت آمیز باشد.} \end{array}$$

پاسخ گزینه ۳: این دو عمل مستقل از هم اتفاق می‌افتد. بنابراین:

الف) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = ۰/۶ \times ۰/۸ = ۰/۴۸$

ب) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۸ - ۰/۴۸ = ۰/۹۲$

پ) $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - ۰/۹۲ = ۰/۰۸$

ت) $P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = ۰/۸ - ۰/۴۸ = ۰/۳۲$

واضح است که رخ دادن پیشامد «پ»، احتمال کم‌تری نسبت به سایر پیشامدها دارد.

تست: در جعبه A، ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از هریک از این دو جعبه یک مهره بیرون

می‌آوریم. احتمال آن که مهره‌های خارج شده هم‌رنگ باشند چقدر است؟

$$\text{الف) } \frac{12}{20} \quad \text{ب) } \frac{18}{35} \quad \text{ج) } \frac{21}{40} \quad \text{د) } \frac{25}{61}$$

پاسخ گزینه ۲: «انتخاب یک مهره از جعبه A» تأثیری در «انتخاب یک مهره از جعبه B» ندارد. بنابراین دو پیشامد مستقل‌اند. داریم:

$$P(\text{هر دو مهره هم‌رنگ}) = P(A \cap B \text{ سفید از سفید}) + P(A \cap B \text{ سیاه از سیاه})$$

و چون پیشامدهای مستقل داریم، پس اشتراک‌ها تبدیل به ضرب می‌شوند. یعنی احتمال موردنظر $\frac{18}{35}$ است. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{18}{35}$

❶ **تست:** در پرتاب دو تاس به طور پی در پی، اگر A پیشامد «متوالی بودن اعداد ظاهر شده» و B پیشامد «ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول» باشد، دو پیشامد A و B چگونه هستند؟

(۱) مستقل (۲) وابسته (۳) ناسازگار (۴) نشدنی

پاسخ **گزینه ۲** می‌دانیم $n(S) = 6^2 = 36$. از طرفی داریم:

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$B = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(3,2), (3,4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

اما واضح است که $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ و در نتیجه A و B دو پیشامد وابسته‌اند.

❶ در پرتاب دو تاس سالم با هم پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم، برای حالت «الف: $n=7$ » و حالت «ب: $n=6$ » این دو پیشامد چگونه هستند؟
A: تاس اول عدد ۴ آمده است. B: مجموع دو تاس برابر n است.

(۱) الف: مستقل، ب: وابسته (۲) الف: وابسته، ب: مستقل (۳) الف: مستقل، ب: مستقل (۴) الف: وابسته، ب: وابسته

پاسخ **گزینه ۱** می‌دانیم $n(S) = 6^2 = 36$. از طرفی پیشامد A عبارت است از:

$$A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

الف) ابتدا پیشامد B را برای $n=7$ (مجموع دو تاس برابر ۷) تشکیل می‌دهیم:

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(4,3)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

حال به بررسی $A \cap B$ می‌پردازیم:

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ، پس A و B دو پیشامد مستقل‌اند.

ب) یک بار دیگر پیشامد B را برای $n=6$ (مجموع دو تاس برابر ۶) تشکیل می‌دهیم:

$$A \cap B = \{(4,2)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \times \frac{5}{36}$$

$$B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

اما در این حالت $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ لذا A و B دو پیشامد وابسته‌اند.

❶ کیسه‌ای شامل ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه است. دو مهره پی در پی و به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. فرض می‌کنیم A پیشامد «سفید بودن مهره اول» و B پیشامد «سفید بودن مهره دوم» است. در دو حالت زیر دو پیشامد A و B چگونه هستند؟
(برگرفته از کتاب درسی)

الف) انتخاب مهره‌ها با جای گذاری است. ب) انتخاب مهره‌ها بدون جای گذاری است.

(۱) الف: مستقل، ب: وابسته (۲) الف: وابسته، ب: مستقل (۳) الف: مستقل، ب: مستقل (۴) الف: وابسته، ب: وابسته

پاسخ **گزینه ۱** توجه کنید که کل مهره‌های درون کیسه $5+7=12$ است. داریم:

الف) در این حالت $n(S) = \binom{12}{1} \binom{11}{1} = 12^2$. از طرفی داریم:

$$P(A) = P(\text{مهره اول سفید}) = \frac{\binom{5}{1} \binom{12}{1}}{\binom{12}{1} \binom{12}{1}} = \frac{5}{12}$$

اولی مهره باشد دومی مهره باشد

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(\text{دومی سفید} \cap \text{اولی سفید}) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1}}{\binom{12}{1} \binom{11}{1}} = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B) = P(\text{مهره دوم سفید}) = \frac{\binom{12}{1} \binom{5}{1}}{\binom{12}{1} \binom{12}{1}} = \frac{5}{12}$$

پس A و B دو پیشامد مستقل‌اند.



(ریاضی ۹۲)

۹۵۲. به ازای چند عدد طبیعی n کوچک‌تر از ۵۰، عدد $۷^n + ۴۲$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

(ریاضی خارج ۹۴)

۹۵۳. تعداد اعداد دو رقمی a به طوری که $۱۱^a \equiv ۱ \pmod{۱۹}$ (پیمانه ۱۹) کدام است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۷ (۳) ۲۸ (۴) ۳۰

۹۵۴. بزرگ‌ترین عدد دو رقمی n که به ازای آن رابطه $۱۶ | ۳^n + ۷$ برقرار باشد، کدام است؟

- (۱) ۹۸ (۲) ۹۶ (۳) ۹۷ (۴) ۹۵

۹۵۵. عدد $۱۴^{۲n+۱} + ۳۶$ همواره بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

۹۵۶. مجموع ارقام کوچک‌ترین عضو سه‌رقمی مجموعه $\{n \in \mathbb{N} : ۴۱ | ۶^n + ۲^n\}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۹

۹۵۷. مجموعه $\{n \in \mathbb{N} : ۲۳ | ۴^n - ۱\}$ دارای چند عضو دورقمی است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

(ریاضی ۹۶)

۹۵۸. به ازای کدام مقادیر n از عدد طبیعی، عبارت $۱ + ۵^{۲n+۲} + ۵^{۶n+۴}$ بر عدد ۳۱ بخش‌پذیر است؟

- (۱) فقط اعداد فرد (۲) فقط اعداد زوج (۳) فقط اعداد مضرب ۵ (۴) تمام اعداد

۹۵۹. باقی‌مانده تقسیم $۸ \times ۳^{۱۵} + ۳ \times ۲^{۱۷}$ بر ۱۳ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۹۶۰. اگر عدد طبیعی به صورت $۲n + ۱$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی به صورت $۱۴n^۲ + ۱۹n + ۶$ بر عدد ۲۵ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

(ریاضی خارج ۹۶)

۹۶۱. به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $۲^{n+۱} + ۲^{n+۴} + ۵^{۲n+۱}$ بر عدد ۲۳ بخش‌پذیر است؟

- (۱) تمام اعداد (۲) فقط اعداد فرد (۳) فقط اعداد زوج (۴) فقط اعداد مضرب ۷

۹۶۲. اگر $n \equiv ۱ \pmod{۵}$ آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم $n^۲ - ۶۱n + ۲۶$ بر ۵ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۹۶۳. اگر عدد طبیعی به صورت $۲n + ۱$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی به صورت $۱۴n^۲ + ۱۹n + ۶$ بر عدد ۲۵ کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۶)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۹۶۴. از رابطه (پیمانه ۱۲) $۸a \equiv ۶۴$ ، کدام تساوی حاصل می‌شود؟

- (۱) $a + ۱ = ۳k$ (۲) $a + ۴ = ۱۲k$ (۳) $a - ۱ = ۳k$ (۴) $a - ۸ = ۱۲k$

۹۶۵. از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۸۴) $۳۶a \equiv ۱۹۲$ ، کدام نتیجه‌گیری در پیمانه ۷ نادرست است؟

- (۱) $۲a \equiv -۱$ (۲) $a \equiv ۴$ (۳) $a \equiv ۳$ (۴) $۳a \equiv ۲$

۹۶۶. از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۹) $۱۸a \equiv ۱۲b$ ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ ($a, b \neq ۰$)

- (۱) $a \equiv ۰$ (۲) $b \equiv ۰$ (۳) $۳a \equiv b$ (۴) $۳a \equiv ۲b$

۹۶۷. از رابطه هم‌نهشتی (پیمانه ۱۸) $۹a \equiv ۶b$ ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

- (۱) (پیمانه ۲) $a \equiv ۰$ (۲) (پیمانه ۳) $b \equiv ۰$ (۳) (پیمانه ۶) $a \equiv ۲$ (۴) (پیمانه ۶) $۳a \equiv ۲b$

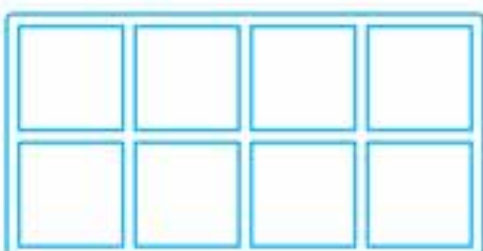
۹۶۸. اگر $(n^۲ - ۱, ۵) = ۱$ و $n^۲ - ۱ \equiv n^۲ - ۲ \pmod{۵}$ ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری در مورد عدد صحیح n درست است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $n = ۵k - ۱$ (۲) $n = ۵k - ۲$ (۳) $n = ۵k - ۳$ (۴) $n = ۵k + ۲$

۹۶۹. در رابطه (پیمانه ۲۰) $۹a \equiv ۳۶ - ۳a$ عدد a به کدام صورت است؟

- (۱) $۴k + ۱$ (۲) $۴k + ۳$ (۳) $۵k + ۱$ (۴) $۵k + ۳$

	a	b	c	d	e	f	g
a	۰	۹	۱۲	۱۹	۲۵	۲۰	۳۵
b	۹	۰	۱۳	۱۷	۲۲	۲۳	۴۰
c	۱۲	۱۳	۰	۷	۱۱	۸	۲۴
d	۱۹	۱۷	۷	۰	۴۲	۳۰	۱۴
e	۲۵	۲۲	۱۱	۴۲	۰	۱۵	۱۹
f	۲۰	۲۳	۸	۳۰	۱۵	۰	۱۲
g	۳۵	۴۰	۲۴	۱۴	۱۹	۱۲	۰



۱۳۵۲. فرض کنید a, b, c, d, e, f و g شهرهای یک استان می‌باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها از یکدیگر در جدول روبه‌رو آمده است. قرار است در برخی از شهرهای این استان یک دکل تلفن همراه نصب شود به طوری که تمام شهرهای استان، تحت پوشش قرار گیرد. اگر هر دکل تا ۲۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل به چند دکل احتیاج است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۱۳۵۳. در شکل روبه‌رو، نقشه یک منطقه شهری ارائه شده است. قرار است در برخی از تقاطع‌ها، یک افسر راهور قرار گیرد، به طوری که هر تقاطع فاقد افسر با تقاطع‌های دارای افسر توسط یک خیابان دسترسی داشته باشند. کمترین تعداد افسرهای راهور موردنیاز کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

آزمون فصل

۱۳۵۴. در یک گراف ساده از مرتبه ۶، درجه رأس‌های آن، به کدام صورت می‌تواند باشد؟

- (۱) $۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۰$
(۲) $۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۱$
(۳) $۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۱$
(۴) $۵, ۴, ۳, ۳, ۲, ۱$

۱۳۵۵. در یک گراف با ۳ رأس تنها، میانگین درجه‌های رأس‌ها برابر ۳ می‌باشد. اگر درجه‌های رأس‌های غیر تنها ۴ یا ۵ باشد. این گراف چند رأس زوج دارد؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۸

۱۳۵۶. در گراف ساده G از مرتبه ۹، مینیمم درجه برابر ۳ می‌باشد. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

- (۱) ۲۸
(۲) ۲۹
(۳) ۳۱
(۴) ۳۳

۱۳۵۷. چند گراف ۵-منتظم مرتبه ۸ وجود دارد؟ (رأس‌ها نام‌گذاری نشده‌اند)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۳۵۸. در یک گراف ساده با درجه رأس‌های $۴, ۴, ۳, ۳, ۲, ۲$ که دو رأس با مینیمم درجه مجاورند. تعداد دورها با طول ۶ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

۱۳۵۹. یک گراف از مرتبه ۱۱، که از ۳ مولفه تشکیل شده است، حداکثر چند یال دارد؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۲۱
(۳) ۳۶
(۴) ۴۵

۱۳۶۰. در یک گراف ناهمبند ساده که $p=۱۳$ و $q=۶۵$ ، چند رأس با درجه ۱۱ وجود دارد؟

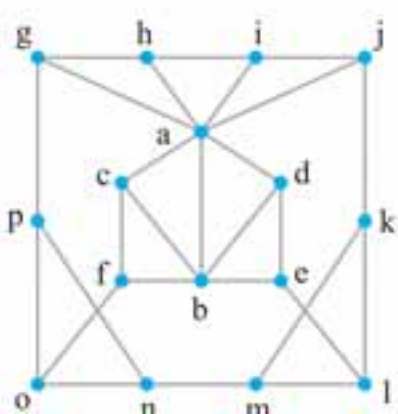
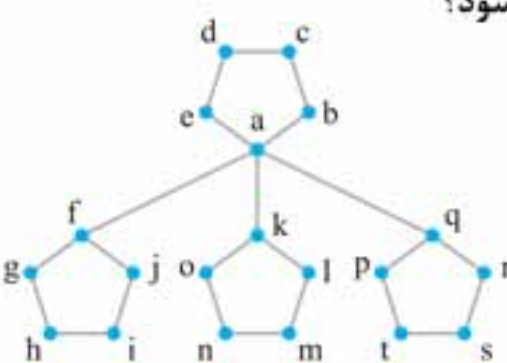
- (۱) ۱۲
(۲) ۱۱
(۳) ۹
(۴) ۱۰

۱۳۶۱. اگر حاصل ضرب درجه‌های یک گراف برابر ۷۲ باشد، با حذف چند یال آن، گراف C_5 تشکیل می‌شود؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

۱۳۶۲. با افزودن کدام رأس‌ها به مجموعه $\{a, c, s, m, k, j, f\}$ ، یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف روبه‌رو حاصل می‌شود؟

- (۱) h, n
(۲) g, m, r
(۳) h, p
(۴) i, m, e



۱۳۶۳. در گراف روبه‌رو، γ - مجموعه کدام است؟

- (۱) $\{a, l, o\}$
(۲) $\{a, b, l, p\}$
(۳) $\{b, m, n\}$
(۴) $\{h, i, m, n\}$

۱۵۵۱. ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از ۲ کبوتر قرار داشته باشد؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴) ۳۴

۱۵۵۲. کمترین تعداد افرادی که دست کم دو نفر آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز از هفته متولد شده‌اند، کدام است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۷۸ (۳) ۸۵ (۴) ۸۸

(ریاضی ۹۵)

۱۵۵۳. یک تاس را حداقل چند بار پرتاب کنیم تا به طور یقین سه بار یا بیشتر، نتیجه یکسان داشته باشیم؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۸ (۴) ۱۹

۱۵۵۴. در جعبه‌ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی، ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم، تا مطمئن باشیم دست کم ۶ گوی خارج شده هم‌رنگ باشند؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۱۵۵۵. حداقل چند عدد از مجموعه $\{۲, ۳, ۴, \dots, ۳۰\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم لااقل دو عدد آن‌ها مقسوم علیه مشترک غیر از یک دارند؟

(ریاضی ۸۹ و ۹۲)

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۱ (۴) ۱۰

۱۵۵۶. حداقل چند زوج مرتب به صورت (a, b) با مختصات اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در دو زوج انتخابی، جمع مختصات‌های اول و جمع مختصات‌های دوم، اعداد زوج هستند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۵۵۷. هر زیر مجموعه n عضوی از مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۲۳\}$ به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو ۲۴ است. حداقل n کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۱۵۵۸. در کیسه‌ای ۹۰ گوی یکسان قرار دارد که هریک از اعداد دورقمی بر روی آن‌ها نوشته شده است. حداقل چند گوی از کیسه خارج کنیم تا مطمئن شویم جمع دو عدد از دو گوی خارج شده برابر ۱۱۰ است؟

(ریاضی خارج ۹۳)

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۶ (۳) ۴۷ (۴) ۴۸

۱۵۵۹. در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه‌اند. انتخاب شونده باید رأی بیشتر از سایرین داشته باشد. حداقل رأی انتخاب شونده کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

(سراسری ۹۰)

۱۵۶۰. مجموعه S دارای ۵۰ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم عضوهای S بر ۱۲، حداقل چند عضو باقی مانده یکسان دارند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۵۶۱. حداقل چند عضو از مجموعه $A = \{۱, ۲, \dots, ۳۰\}$ انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل ۲ عدد از آن‌ها نسبت به هم اول‌اند؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۱۵۶۲. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ حداقل چند نقطه در نظر بگیریم که فاصله آن‌ها از $\frac{1}{4}$ کمتر گردد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۷ (۴) ۲۶

۱۵۶۳. حداقل چند نقطه داخل مربعی به ضلع ۱ باید در نظر گرفت تا دست کم فاصله دو نقطه از آن‌ها کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

آزمون فصل

۱۵۶۴. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۲۹۹۳ می‌توان ساخت؟

- (۱) ۶۴۸ (۲) ۶۵۰ (۳) ۶۵۴ (۴) ۶۴۶

۱۵۶۵. به چند طریق ۳ دکتر و ۴ مهندس می‌توانند در یک ردیف بایستند، به طوری که دکترها مجاور یکدیگر باشند؟

- (۱) $۳!۴!$ (۲) $۵!$ (۳) $۳!۵!$ (۴) $۷! - ۵!$

۱۵۶۶. در یک مجموعه ۱۵ عضوی، نسبت تعداد زیر مجموعه‌های ۹ عضوی به تعداد زیر مجموعه‌های ۶ عضوی همین مجموعه کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۵۶۷. از بین ۵ مرد و ۴ زن به چند طریق می‌توان ۶ نفر انتخاب کرد، به طوری که حداقل ۳ نفر آن‌ها زن باشند؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۲۰۱. گزینه ۱

۲۰۶. گزینه ۱ ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\underbrace{(A-B)}_X \cup \underbrace{((A \cap B') \cap ((B-A) \cup A'))}_Y$$

$$= X \cup (X \cap Y) \stackrel{\text{جذب}}{=} X$$

پس عبارت داده شده همان $(A-B)$ است، داریم:

$$A-B = A - (A \cap B)$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4\}$$

که یک مجموعه ۴ عضوی دارای $2^4 - 1 - 1 = 14$ زیرمجموعه سره غیرتهی است.

۲۰۷. گزینه ۴

$$(3x^2 + 1, 2y^2 - y) = (4x, y^2 + 6y + 30)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 = 4x \\ 2y^2 - y = y^2 + 6y + 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{1}{3} \\ y^2 - 7y - 30 = 0 \Rightarrow y = 10, y = -3 \end{cases}$$

بنابراین $2 \times 2 = 4$ زوج مرتب وجود خواهد داشت.

۲۰۸. گزینه ۲

۲۰۹. گزینه ۱ اگر $(A \times B) \subset (B \times A)$ آن‌گاه الزاماً $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ بنابراین $A = B$ و در نتیجه $A - B = \emptyset$.

۲۱۰. گزینه ۲

$$(A \times C) \cap (C \times B) = \underbrace{(A \cap C)}_A \times \underbrace{(C \cap B)}_B = A \times B$$

۲۱۱. گزینه ۱

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset \Rightarrow (A \cap B) \times (B \cap A) = \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$$

۲۱۲. گزینه ۱ چون $A \times B = B \times A$ ، پس $A = B$ ، یعنی:

$$\{x + y, 1\} = \{x - y, 3\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1$$

۲۱۳. گزینه ۴

نکته:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2$$

ابتدا هر یک از دو مجموعه A و B را با عضوهایشان نمایش می‌دهیم:

$$A = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 1\} = \{2^x \mid x = 0, 1\} = \{1, 2\}$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 1\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$$

بنابراین $A \cap B = \{1\}$ و $n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 2 \times 3 = 6$ از طرفی داریم:

$$n(A \times B - B \times A) = n(A \times B) - n((A \times B) \cap (B \times A))$$

$$= n(A \times B) - n(A \cap B)^2 = 6 - 1^2 = 5$$

پس $2^5 = 32$ زیر مجموعه وجود دارد.چون A و B دو مجموعه جدا از هم هستند پس $A \cap B = \emptyset$ بنابراین:

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$$

$$\begin{cases} A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \\ A \subset B \Rightarrow B' \subset A' \Rightarrow A' \cup B' = A' \end{cases}$$

$$(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C)$$

$$= (A \cap (B \cap C')) \cap (A \cap B \cap C)'$$

$$= ((A \cap B) \cap C') \cap ((A' \cup B') \cup C') = (A \cap C') \cap (A' \cup C')$$

$$= \underbrace{[(A \cap C') \cap A']}_{\emptyset} \cup \underbrace{[(A \cap C') \cap C']}_{A \cap C'} = A \cap C'$$

۲۰۲. گزینه ۴ اگر تعداد عضوهای مجموعه A را با $n(A)$ نشان دهیم، در این صورت تعداد زیر مجموعه‌های سره ناتهی A عبارت است از $2^{n(A)} - 1 - 1$ و طبق فرض داریم: $2^{n(A)} - 1 - 1 = 14 \Rightarrow 2^{n(A)} = 16 \Rightarrow n(A) = 4$ از طرفی داریم:

$$C = A \cap (A' - B)' = A \cap (A' \cap B')' = A \cap (A \cup B) \stackrel{\text{جذب}}{=} A$$

پس مجموعه C نیز ۴ عضو دارد و مجموعه توانی آن شامل $2^4 = 16$ عضو است.

۲۰۳. گزینه ۳

$$A \cup C = B \xrightarrow{A' \cap} A' \cap (A \cup C) = A' \cap B$$

$$\xrightarrow{\text{ویرگی ۱}} (A' \cap A) \cup (A' \cap C) = B - A$$

$$\xrightarrow{\text{ویرگی ۱}} \emptyset \cup (C - A) = B - A \Rightarrow C - A = B - A$$

$$\xrightarrow{\text{نتیجه ۲ (از ویرگی ۱)}} C - (A \cap C) = B - A$$

$$\xrightarrow{A \cap C = \emptyset} C = B - A$$

۲۰۴. گزینه ۱

$$\begin{cases} (A \cap B') \subseteq C \Rightarrow C' \subseteq (A \cap B')' \\ \xrightarrow{\text{دمورگان}} C' \subseteq (A' \cup B) \\ (A' \cup B) \subseteq C \Rightarrow C' \subseteq (A' \cup B)' \\ \xrightarrow{\text{دمورگان}} C' \subseteq (A \cap B') \end{cases}$$

$$\Rightarrow C' \subseteq \underbrace{[(A' \cup B) \cap (A \cap B')]}_{\emptyset} \Rightarrow C' \subseteq \emptyset$$

$$\Rightarrow C' = \emptyset \Rightarrow C = U \Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A - C = \emptyset$$

• اثبات این که چرا عبارت داخل کروشه برابر \emptyset است، در زیر آورده شده است:

$$(A' \cup B) \cap (A \cap B') = [(A' \cup B) \cap A] \cap [(A' \cup B) \cap B']$$

$$= \underbrace{[(A' \cap A) \cup (B \cap A)]}_{\emptyset} \cap \underbrace{[(A' \cap B') \cup (B \cap B')]}_{\emptyset}$$

$$= \underbrace{(B \cap A) \cap (A' \cap B')}_{\emptyset} = \emptyset$$

۲۰۵. گزینه ۱

$$A \subseteq (B \cap C) \Rightarrow (B \cap C)' \subseteq A' \Rightarrow (B' \cup C') \subseteq A'$$

$$(A - B) \cup (A - C) \stackrel{\text{ویرگی ۱}}{=} (A \cap B') \cup (A \cap C')$$

$$\stackrel{\text{فاکتورگیری}}{=} A \cap (B' \cup C')$$

$$\stackrel{\text{جابه‌جایی}}{=} (B' \cup C') \cap A \stackrel{\text{ویرگی ۱}}{=} (B' \cup C') - A' = \emptyset$$

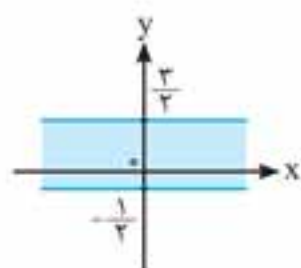
$$((B' \cup C') \subseteq A')$$

زیرا:

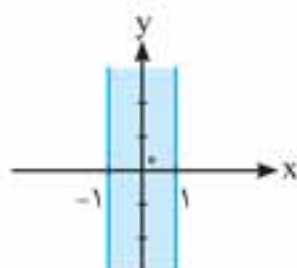
۲۳۳. گزینه ۲

$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow A_1 = [-1, 1] \\ n=2 \Rightarrow A_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \end{cases}$$

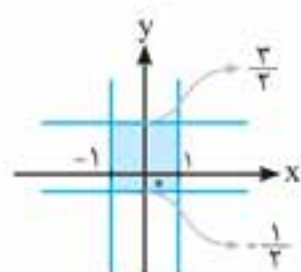
$$\Rightarrow A_1 \times A_2 = \{(x, y) | (-1 \leq x \leq 1) \wedge (-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{2}{3})\}$$



A_2



$A_1 \times A_2$

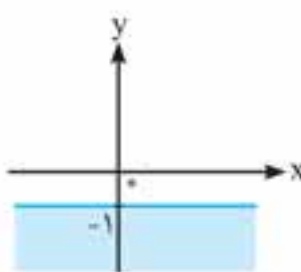


A_1

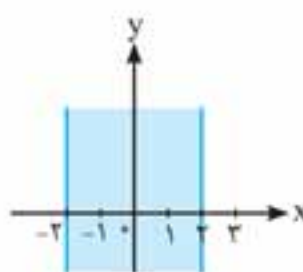
همان طور که ملاحظه می شود سطح مربعی به ابعاد 2×2 حاصل می گردد.

$$B \times A = \{(x, y) | (-2 \leq x \leq 2) \wedge (y \leq -1)\}$$

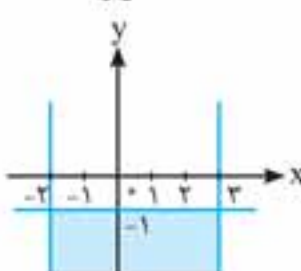
۲۳۴. گزینه ۲



A

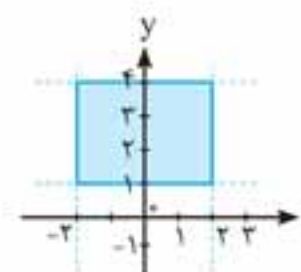
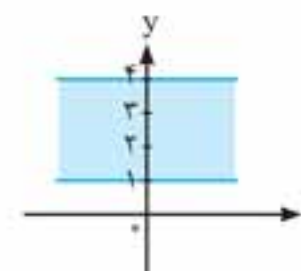


$B \times A$



B

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B)\} \\ &= \{(x, y) | (-2 \leq x \leq 2) \wedge (1 \leq y \leq 4)\} \end{aligned}$$



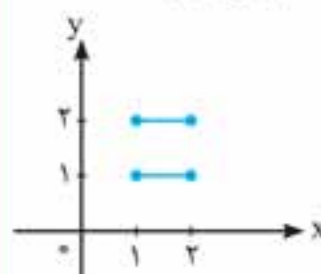
سطح مستطیل به ابعاد 3×4 به دست می آید که مساحت آن برابر ۱۲ است.

۲۳۶. گزینه ۱

گزینه «۱» نادرست است زیرا $2 \in B$ ولی $2 \notin C$ بنابراین $B \not\subset C$.

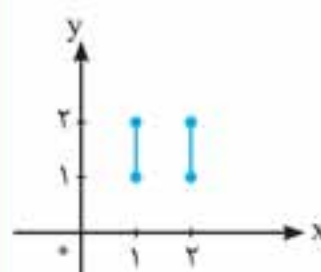
۲۳۸. گزینه ۱ $A \times B = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 2, y = 1 \text{ یا } 2\}$

بنابراین نمودار آن به صورت مقابل خواهد بود:
از طرفی:

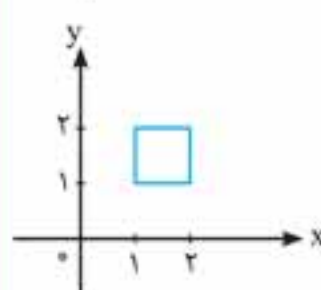


$$B \times A = \{(x, y) | y \in \mathbb{R}, x = 1 \text{ یا } 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

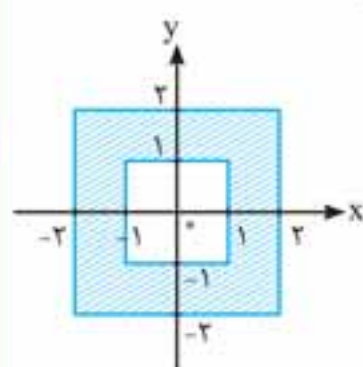
در نتیجه نمودار آن به صورت زیر است:



پس نمودار اجتماع این دو مجموعه، یعنی $(A \times B) \cup (B \times A)$ به صورت مقابل خواهد بود:



در نتیجه نمودار $A^2 - B^2$ به صورت زیر است:



۲۳۹. گزینه ۳ ابتدا مجموعه های A_1 و A_2 را تشکیل می دهیم:

$$n=1 \Rightarrow A_1 = \{m \in \mathbb{N} | 0 < m < 2\} = \{1\}$$

$$n=2 \Rightarrow A_2 = \{m \in \mathbb{N} | 1 < m < 3\} = \{2\}$$

پس $A_1 \times A_2 = \{(1, 2)\}$

۲۴۰. گزینه ۲

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B \Rightarrow \begin{cases} 2^3x - 2^2y = 512 = 2^9 \\ 3^2x + y = 81 = 3^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} (x = \frac{17}{5}) \wedge (y = \frac{-6}{5})$$

$$\Rightarrow 5x + 4y = 5(\frac{17}{5}) + 4(\frac{-6}{5}) = \frac{61}{5}$$

۲۴۱. گزینه ۱

$$(A \times B) \subseteq (B \times A) \Rightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A = B \quad ①$$

$$① \Rightarrow (A \cup B) - B = \underbrace{(A \cup A)}_A - A = \emptyset$$

۲۴۲. گزینه ۱ می دانیم:

$$(A \times B) \cap (B \times A)$$

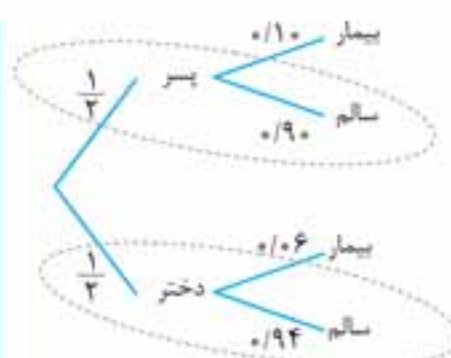
$$= (A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2$$

از طرفی مجموعه های A و B عبارت اند از:

$$\begin{aligned} A &= \{2^1, 2^2, 2^3\} = \{2, 4, 8\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned} \Rightarrow A \cap B = \{2, 4\}$$

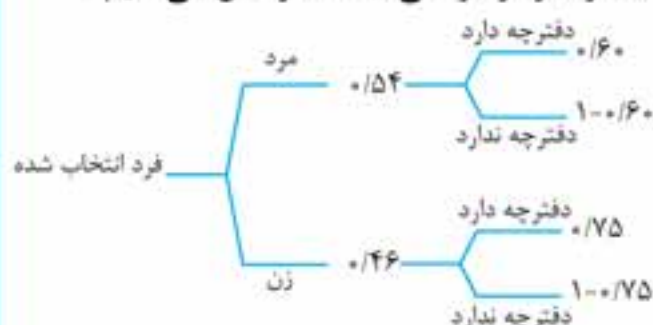
پس $(A \cap B)^2$ دارای $2^2 = 4$ عضو است.

۴۰۸. گزینه ۲



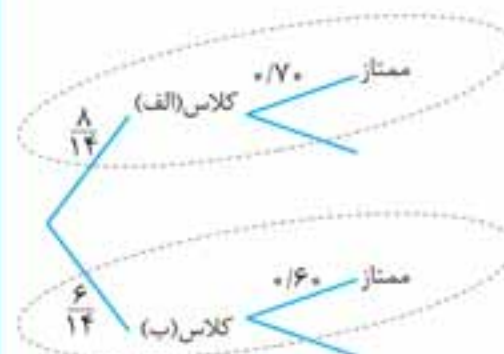
پس جواب $\frac{1}{2} \times 0.10 + \frac{1}{2} \times 0.06 = 0.08$ است.

۴۰۹. گزینه ۲ با استفاده از نمودار درختی، مسئله را حل می‌کنیم:



\Rightarrow احتمال مورد نظر $= 0.54 \times 0.60 + 0.46 \times 0.75 = 0.669$

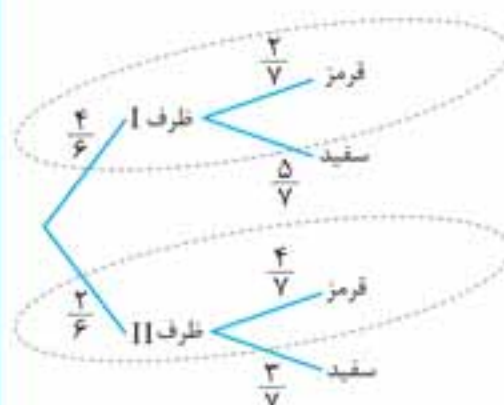
۴۱۰. گزینه ۲



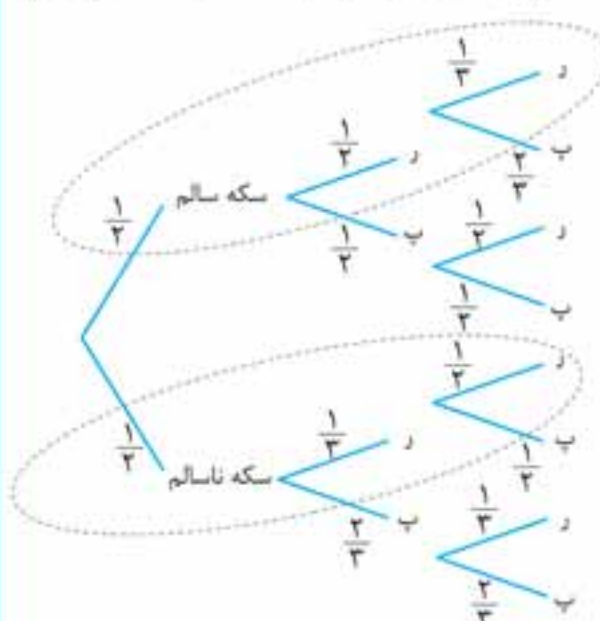
شخصی انتخابی یا از کلاس الف آمده است و یا از کلاس ب، که احتمال هر کدام به ترتیب $\frac{8}{14}$ و $\frac{6}{14}$ است. داریم:

پس احتمال مطلوب $\frac{8}{14} \times \frac{7}{10} + \frac{6}{14} \times \frac{6}{10} = \frac{23}{35}$ است.

۴۱۱. گزینه ۴

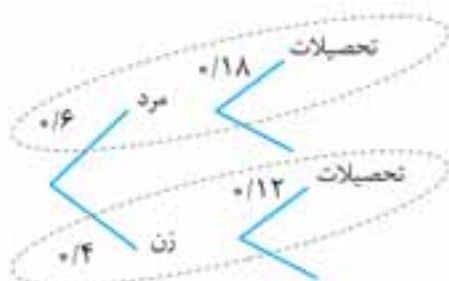


پس احتمال مورد نظر $\frac{4}{6} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$ است.

۴۱۲. گزینه ۲ در سکه ناسالم احتمال «ر» و «پ» به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ است. داریم:

پس احتمال مطلوب $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ است.

۴۱۳. گزینه ۲

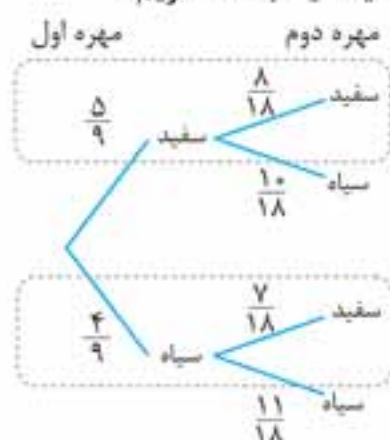


با توجه به نمودار درختی، احتمال مطلوب برابر است با:

$$0.6 \times 0.18 + 0.4 \times 0.12 = 0.156$$

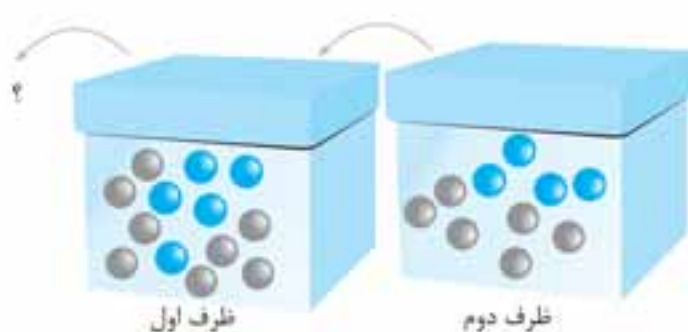
که با ضرب کردن در عدد ۱۰۰، به گزینه «۲» می‌رسیم.

۴۱۴. گزینه ۳ بستگی دارد مهره اول سفید یا سیاه باشد، داریم:

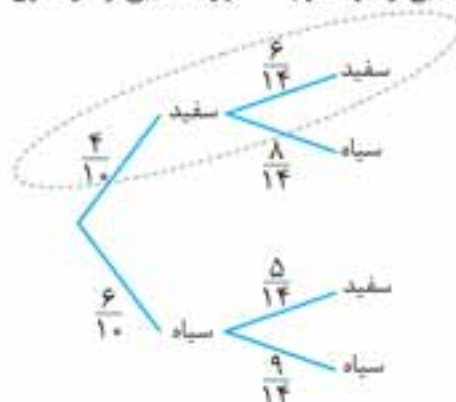


پس احتمال مطلوب $\frac{5}{9} \times \frac{8}{18} + \frac{4}{9} \times \frac{7}{18} = \frac{34}{81}$ است.

۴۱۵. گزینه ۱



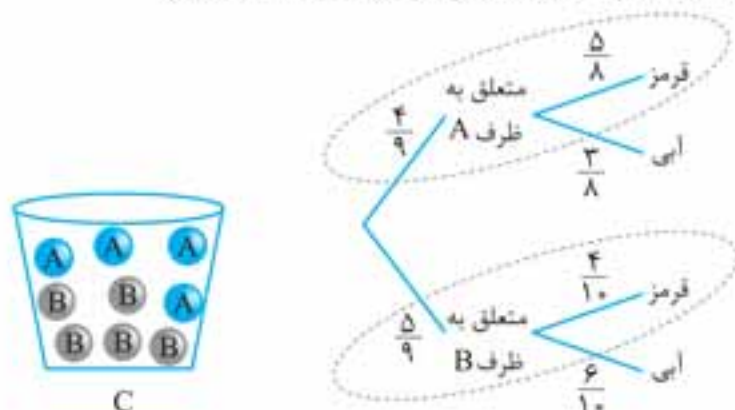
مهره انتخابی از ظرف دوم مهره انتخابی از ظرف اول



احتمال مطلوب $\frac{4}{10} \times \frac{6}{14} = \frac{6}{35}$ است.

۴۱۶. گزینه ۱ بررسی می‌کنیم که مهره انتخابی از ظرف C با کدام احتمال

متعلق به ظرف A و با کدام احتمال متعلق به ظرف B است. داریم



پس احتمال مطلوب $\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{2}$ است.

۵۷۲. گزینه ۲

$$\alpha_B = \frac{f_B}{n} \times 360^\circ = \frac{74}{30+42+74+87+100} \times 360^\circ = 80^\circ$$

۵۷۳. گزینه ۴ مجموع درصدهای فراوانی نسبی برابر ۱۰۰ می‌شود.

$$15 + 30 + 25 + \alpha = 100 \Rightarrow \alpha = 30$$

بنابراین:

به کمک درصدها می‌توانیم فراوانی‌های نسبی را به دست آوریم:

مرکز دسته	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
فراوانی نسبی	۰/۱۵	۰/۳	۰/۲۵	۰/۳

به کمک رابطه میانگین که براساس فراوانی نسبی محاسبه می‌شود، میانگین

$$\bar{X}_f = \frac{f_1}{n} \times x_1 + \frac{f_2}{n} \times x_2 + \dots + \frac{f_n}{n} \times x_n$$

داده‌ها برابر است با:

$$= 0/15 \times 12 + 0/3 \times 15 + 0/25 \times 18 + 0/3 \times 21 = 17/1$$

۵۷۴. گزینه ۱ با توجه به داده‌ها، کمترین داده ۶۰ و بیشترین داده ۹۵

است. پس دامنه تغییرات برابر ۳۵-۶۰=۹۰ است. از طرفی تعداد

دسته‌ها طبق فرض ۵ است. پس طول دسته برابر ۷ = ۳۵/۵ شده و دسته‌ها

به صورت زیر خواهند بود. داریم:

$$[60, 67), [67, 74), [74, 81), [81, 88), [88, 95)$$

چون مرکز دسته سوم ۷۷/۵ = ۷۴+۸۱/۲ است، پس فراوانی نسبی این

دسته را می‌خواهیم. با توجه به داده‌ها، فقط داده‌های ۷۵ و ۷۶ در این

دسته قرار دارند و تعداد کل داده‌ها ۲۰ = x است. داریم:

$$\frac{f_2}{n} = \frac{2}{20} = 0/1 = \text{فراوانی نسبی دسته سوم}$$

۵۷۵. گزینه ۱ از روی داده‌ها، داریم:

$$x_{\min} = 11, x_{\max} = 38 \Rightarrow R = x_{\max} - x_{\min} = 38 - 11 = 27$$

$$C = \frac{R}{k} \xrightarrow{k=5} C = \frac{27}{5} = 5/4$$

پس طول دسته برابر است با:

اگر حدود دسته‌ها را تعیین کنیم، به صورت زیر هستند:

$$[11, 16/4), [16/4, 21/8), [21/8, 27/2)$$

دسته سوم یا دسته وسط

داده‌های ۲۳، ۲۴، ۲۵ در این دسته (دسته سوم) قرار دارند، پس $f_3 = 3$

و تعداد کل داده‌ها $n = 23$ است. درصد فراوانی نسبی دسته وسط برابر

$$\frac{3}{23} \times 100 \approx 13$$

است با:

۵۷۶. گزینه ۲ طول دسته اول برابر است با:

$$C = 26 - 23 = 3 \Rightarrow R = k \times C = 12 \times 3 = 36$$

$$C' = \frac{R}{k} = \frac{36}{9} = 4$$

پس طول دسته جدید عبارت است از:

$$\frac{29+43}{2} = 41$$

مرکز دسته وسط

با توجه به شکل، مرکز دسته وسط ۴۱ = ۲۹+۴۳/۲ است.

۵۷۷. گزینه ۳ درصد ادبیات را a در نظر می‌گیریم. برای محاسبه سریع‌تر از

همه داده‌ها ۷۰ واحد کم می‌کنیم. پس از میانگین نیز ۷۰ واحد کم می‌شود.

$$75 - 70 = \frac{4(a - 70) + 2(20) + 3(11) + 8(0)}{4 + 2 + 3 + 8}$$

داریم:

$$\Rightarrow 5 = \frac{4a - 280 + 40 + 33}{17} \Rightarrow 85 = 4a - 207$$

$$\Rightarrow 4a = 292 \Rightarrow a = \frac{292}{4} = 73$$

۵۷۸. گزینه ۲

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 59 - 23 = 36 \Rightarrow C = \frac{R}{k} = \frac{36}{9} = 4$$

دسته‌ها عبارتند از:

$$\{[23, 27), [27, 31), [31, 35), [35, 39), [39, 43), [43, 47), [47, 51), [51, 55), [55, 59)\}$$

چون طبق فرض، مجموع فراوانی‌های دو دسته آخر برابر ۱۵ است، پس

تعداد داده‌های کمتر از ۵۱ برابر با ۱۰۵ = ۱۲۰ - ۱۵ است. بنابراین:

$$51 = \frac{105}{120} \times 100 = 87/5\%$$

۵۷۹. گزینه ۲ می‌دانیم اگر به داده‌ها ۲ واحد اضافه کنیم، به میانگین آن‌ها

نیز ۲ واحد اضافه می‌شود. پس میانگین اولیه برابر ۸/۵ بوده است.

x_i	۳	۷	۱۱	۱۵
f_i	۴	۵	a	۳

$$\Rightarrow 8/5 = \frac{4(3) + 5(7) + a(11) + 3(15)}{4 + 5 + a + 3} \Rightarrow 8/5 = \frac{92 + 11a}{12 + a}$$

$$\Rightarrow 102 + 8/5A = 92 + 11a \Rightarrow 2/5a = 10 \Rightarrow a = 4$$

۵۸۰. گزینه ۳ تعداد کل داده‌ها برابر مجموع فراوانی‌هاست. بنابراین داریم:

$$n = 3 + 5 + 7 + 10 = 25$$

در ۲۵ داده، میانه، داده شماره $(\frac{25+1}{2})$ ام یعنی x_{13} است، این مقدار

$$Q_2 = x_{13} = 7$$

برابر است با:

$$(2, 2, \dots, 2, 5, 5, 5, 7, \dots, 7, 10, \dots, 10) \quad \begin{matrix} \text{تا } 7 \\ \text{تا } 10 \\ \text{تا } 25 \end{matrix}$$

(توجه کنید داده‌ها عبارتند از:

۵۸۱. گزینه ۳

راهنما: اگر تعداد داده‌ها مضرب ۴ باشد، دقیقاً نصف داده‌ها داخل

جعبه، ۱/۴ داده‌ها در طرف چپ و ۱/۴ در طرف راست قرار می‌گیرند.

$$\begin{array}{c} 25\% \leftarrow \boxed{50\%} \rightarrow 25\% \end{array}$$

با توجه به راهنما گفته شده و اطلاعات

سؤال، ۱۸ داده در داخل جعبه و ۹ داده

در هر یک از دو طرف جعبه قرار دارد. با

توجه به مقادیر میانگین کل داده‌ها و دو

طرف جعبه داریم:

$$\begin{array}{c} \text{داده ۹} \quad \boxed{\text{داده ۱۸}} \quad \text{داده ۹} \\ \bar{x}_1 = 22 \quad \bar{x}_2 = ? \quad \bar{x}_3 = 30 \end{array}$$

$$\text{مجموع کل داده‌ها} = \bar{x} \times n = 27/5 \times 36 = 990$$

$$\left. \begin{aligned} \text{مجموع داده‌های سمت چپ} &= \bar{x}_1 \times n_1 = 22 \times 9 = 198 \\ \text{مجموع داده‌های سمت راست} &= \bar{x}_3 \times n_3 = 30 \times 9 = 270 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع داده‌های داخل و روی جعبه} = 990 - (198 + 270) = 522$$

$$\text{پس میانگین داده‌های داخل و روی جعبه برابر با } \frac{522}{18} = 29 \text{ است.}$$

$$\begin{array}{c} \bar{y} \\ \bar{x} \quad \boxed{\quad} \quad \bar{z} \\ \frac{w_1}{n} \quad \frac{w_2}{n} \quad \frac{w_3}{n} \end{array}$$

راهنما: اگر فراوانی نسبی و

میانگین داده‌ها در نمودار جعبه‌ای

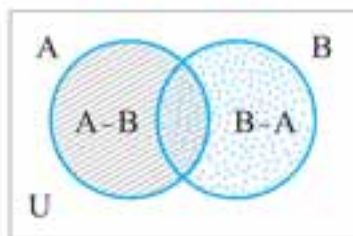
به صورت روبه‌رو باشد:

$$\text{آن‌گاه: میانگین کل داده‌ها} = \bar{x} \times \frac{w_1}{n} + \bar{y} \times \frac{w_2}{n} + \bar{z} \times \frac{w_3}{n}$$

$$\Rightarrow 27/5 = \frac{1}{4} \times 22 + \frac{1}{4} \times \bar{y} + \frac{1}{4} \times 30$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \bar{y} = 14/5 \Rightarrow \bar{y} = 29$$

پس در سؤال بالا داریم:



نتیجه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، آن گاه:

$$(A - B) \subseteq A \quad (\text{الف}) \quad (B - A) \subseteq B \quad (\text{ب})$$

ویژگی‌های تفاضل دو مجموعه

ویژگی ۱ تبدیل تفاضل به اشتراک

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، آن گاه:
زیرا:

$$A - B = A \cap B'$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

تعریف تفاضل

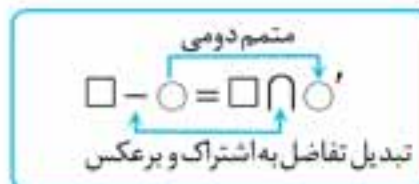
$$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B'\}$$

تعریف متمم

$$= A \cap B'$$

تعریف اشتراک

ویژگی ۲ به صورت کلی عبارت است از:



$$A - B = B' - A'$$

نتیجه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، آن گاه:

$$A - B \stackrel{\text{ویژگی ۱}}{=} A \cap B' \stackrel{\text{جابه‌جایی}}{=} B' \cap A \stackrel{\text{ویژگی ۱}}{=} B' - A'$$

۲ اگر A و B دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، آن گاه: $A - B = (A \cup B) - B$ (الف) $A - B = A - (A \cap B)$ (ب)

- تساوی قسمت الف بیانگر همان مطلب است که برای یافتن تفاضل از A ، عضوهای مشترک با B را حذف کنیم.
- برای درک قسمت الف به نمودار ون زیر توجه کنید.



$$A' = U - A$$

۳ اگر A مجموعه‌ای دلخواه از مرجع U باشد، آن گاه:

۴ اگر A مجموعه‌ای دلخواه از مرجع U باشد، آن گاه:

$$A - A = \emptyset \quad (\text{الف}) \quad A - \emptyset = A \quad (\text{ب}) \quad \emptyset - A = \emptyset \quad (\text{پ}) \quad A - A' = A \quad (\text{ت})$$

زیرا با استفاده از ویژگی ۱ داریم:

$$A - \emptyset = A \cap \emptyset' = A \cap U = A \quad (\text{ب})$$

$$A - A = A \cap A' = \emptyset \quad (\text{الف})$$

$$A - A' = A \cap (A')' = A \cap A = A \quad (\text{ت})$$

$$\emptyset - A = \emptyset \cap A' = \emptyset \quad (\text{پ})$$

ویژگی ۳ اگر دو مجموعه جدا از هم داشته باشیم، آن گاه تفاضل آن‌ها برابر با مجموعه اولی است.

به عبارت دیگر برای دو مجموعه A و B از مرجع U داریم: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A - B = A) \wedge (B - A = B)$

اولی = تفاضل \Leftrightarrow جدا از هم

برای اثبات، فرض می‌کنیم $A \cap B = \emptyset$ ، نشان می‌دهیم $A - B = A$ ، داریم:

$$\begin{aligned} A - B &= A - (A \cap B) && \text{نتیجه ۱ (از ویژگی ۱)} \\ &= A - \emptyset && \text{با توجه به فرض} \\ &= A && \text{نتیجه ۴ (از ویژگی ۱)} \end{aligned}$$

(اثبات $B - A = B$ به همین ترتیب است.)

$$A - B = A \Leftrightarrow B - A = B$$

نتیجه: برای دو مجموعه A و B از مرجع U داریم:

زیرا اگر $A - B = A$ ، بنابر ویژگی ۲، درمی‌یابیم که $A \cap B = \emptyset$ و باز طبق ویژگی ۲ نتیجه می‌گیریم $B - A = B$.

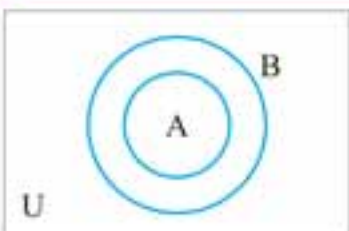
$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

ویژگی ۴ برای دو مجموعه A و B از مرجع U داریم:

• توجه کنید که ویژگی ۳ بیان می‌نماید که **غیرممکن = بزرگ - کوچک** که منطقی است.

برای اثبات، فرض می‌کنیم $A \subseteq B$ ، نشان می‌دهیم $A - B = \emptyset$ ، داریم:

$$\begin{aligned} A - B &= A - (A \cap B) && \text{نتیجه ۲ (از ویژگی ۱)} \\ &= A - A && \text{(زیرا } A \subseteq B \text{)} \\ &= \emptyset && \text{نتیجه ۴ (از ویژگی ۱)} \end{aligned}$$





کنکورهای ۹۸

کنکور سراسری ۹۸

۱. اگر $A = \{\{1, 2\}, \{1, \{2\}\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B'$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۲. در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول ۵ لامپ و از جعبه دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب است؟

- (۱) $\frac{5}{24}$ (۲) $\frac{11}{48}$ (۳) $\frac{13}{48}$ (۴) $\frac{7}{24}$

۳. در دو پیشامد مستقل A و B ، اگر $P(A \cap B) = 0/6$ و $P(A \cap B') = 0/2$ ، آنگاه $P(A \cup B')$ کدام است؟

- (۱) $0/7$ (۲) $0/75$ (۳) $0/85$ (۴) $0/9$

۴. نمرات ریاضی ۴۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول زیر آمده است. میانگین وزنی نمرات، کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

- (۱) $14/2$ (۲) $14/25$ (۳) $14/4$ (۴) $14/75$

۵. نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است، مقدار $\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$ کدام است؟

$$12/7, 30/2, 10/6, 11/9, 10/6, 12/3, 11/2, 13/5, 12/8, 11/5$$

- (۱) $-0/225$ (۲) $-0/125$ (۳) $-0/175$ (۴) $-0/275$

۶. اگر باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۶۶، کدام است؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۲ (۳) ۴۰ (۴) ۴۱

۷. به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ ، $\alpha | 13n + 3$ و $\alpha | 7n + 4$ و $\alpha \neq 1$ باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n ، کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۸. قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۹. اگر عدد $a + 7^{13}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰. یک گراف ساده ۶ رأسی ۴-منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۱۱. به چند طریق می‌توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل، یک توپ داشته باشد؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۲۰

۱۲. تعداد توابع پوشا، از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی، کدام است؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۴۵۰ (۳) ۴۸۰ (۴) ۵۴۰

۱۳. از مجموعه اعداد $\{5, 8, 11, \dots, 65, 68, 71\}$ که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است، یک زیر مجموعه حداقل چند عضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم، لااقل دو عدد در این زیر مجموعه موجود است که جمع آن‌ها، ۸۲ باشد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴