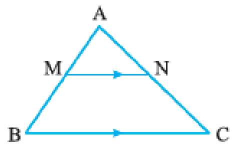
درس ۲

# قضیهٔ تالس

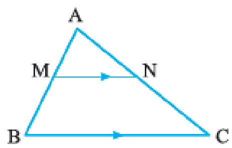
## قضیهٔ تالس




اگر خطی با یک ضلع مثلثی موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یکی از این دو ضلع پدید می‌آورد برابر است با نسبت پاره‌خط‌های نظیری که روی ضلع دیگر پدید می‌آورد؛ به بیان دیگر، اگر در شکل مقابل، $MN \parallel BC$ باشد، آن‌گاه $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$.

### نتایجی از قضیهٔ تالس

اگر در مثلث ABC، MN موازی BC باشد، آن‌گاه با استفاده از تالس و ویژگی‌های تناسب، خواهیم داشت:

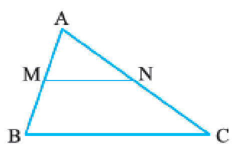



۱) $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}$ نسبت جزء به کل

۲) $\frac{AM}{AN}=\frac{MB}{NC}$ نسبت جزء به جزء

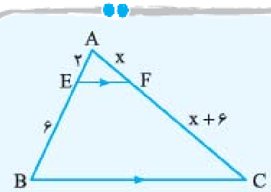
۳) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ تعمیم قضیهٔ تالس

### عکس قضیهٔ تالس




اگر در مثلث ABC، نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و AC چنان انتخاب شوند که $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$، آن‌گاه نتیجه می‌شود پاره‌خط MN با ضلع BC موازی است.

**تست** اگر در شکل مقابل $EF \parallel BC$ باشد، آن‌گاه مقدار x کدام است؟

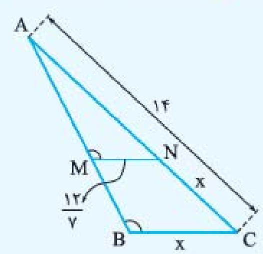



۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

**پاسخ گزینهٔ ۲** چون $EF \parallel BC$، با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{۲}{۶}=\frac{x}{x+۶} \Rightarrow ۲x+۱۲=۶x \Rightarrow x=۳$$

**تست** در شکل مقابل، اگر زاویه‌های B و M برابر باشند، اندازهٔ x کدام است؟

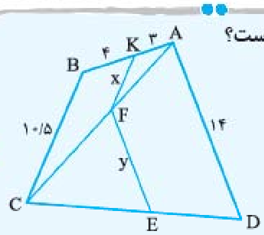



۱) فقط ۲
۲) فقط ۱۲
۳) مقداری برای x وجود ندارد.
۴) ۲ یا ۱۲

**پاسخ گزینهٔ ۴** چون زاویه‌های B و M برابرند، پس بنا بر ویژگی خطوط موازی و مورب، نتیجه می‌شود $MN \parallel BC$ و بنا بر تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{۱۲}{۷}}{x}=\frac{۱۴-x}{۱۴} \Rightarrow x(۱۴-x)=\frac{۱۲}{۷}\times ۱۴ \Rightarrow x^۲-۱۴x+۲۴=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۱۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۱۲ \end{cases}$$

**تست** در شکل مقابل، $KF \parallel BC$ و $EF \parallel AD$ است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، حاصل $x+y$ کدام است؟




۱) ۱۵/۵
۲) ۱۴/۵
۳) ۱۰/۵
۴) ۱۲/۵

**پاسخ گزینهٔ ۴** در مثلث ABC چون $KF \parallel BC$ است، بنا بر نتایج تالس داریم:

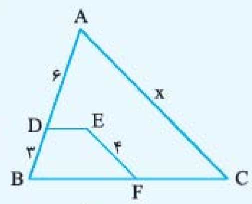
$$\frac{AF}{AC}=\frac{AK}{AB}=\frac{KF}{BC} \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{۳}{۳+۴}=\frac{x}{۱۰/۵} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AF}{AC}=\frac{۳}{۷} \xrightarrow{\text{تفضیل درصورت}} \frac{AC-AF}{AC}=\frac{۷-۳}{۷} \Rightarrow \frac{CF}{AC}=\frac{۴}{۷} \\ \frac{۳}{۷}=\frac{x}{۱۰/۵} \Rightarrow ۷x=۳۱/۵ \Rightarrow x=۴/۵ \end{cases}$$

در مثلث ACD چون $FE \parallel AD$ است، بنا بر نتیجهٔ تالس داریم:

$$\frac{CF}{AC}=\frac{FE}{AD} \Rightarrow \frac{۴}{۷}=\frac{y}{۱۴} \Rightarrow y=۸$$

در نتیجه $x+y=۴/۵+۸=۱۲/۵$.

**تست** در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ و $EF \parallel AC$ است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، مقدار x کدام است؟



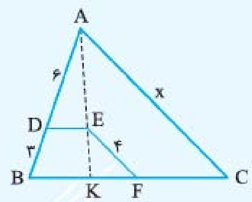

۱) ۹/۵

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۵

**پاسخ گزینهٔ ۳** از A به E وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در نقطهٔ K قطع کند. در مثلث AKB چون $DE \parallel BK$ است، پس بنا بر نتیجهٔ تالس داریم:

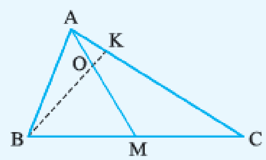



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AK} \Rightarrow \frac{۶}{۶+۳}=\frac{AE}{AK} \Rightarrow \frac{AE}{AK}=\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{تفضیل درصورت}} \frac{AK-AE}{AK}=\frac{۳-۲}{۳} \Rightarrow \frac{KE}{AK}=\frac{۱}{۳}$$

چون $EF \parallel AC$، پس در مثلث ACK داریم:

$$\frac{EK}{AK}=\frac{EF}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{۴}{x} \Rightarrow x=۱۲$$

**تست** در شکل روبه‌رو، اگر نقطهٔ O میانهٔ AM را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کند و K نقطهٔ برخورد امتداد BO با AC باشد، BK چند برابر OK است؟



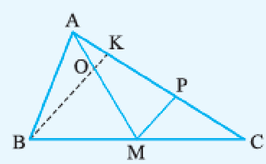

۱) ۶

۲) ۱/۵

۳) ۲/۲۵

۴) ۲/۵

**پاسخ گزینهٔ ۱** چون نقطهٔ O میانهٔ AM را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است، پس $\frac{AO}{OM}=\frac{۱}{۲}$. اگر ترکیب نسبت در مخرج کنیم، خواهیم داشت $\frac{AO}{AO+OM}=\frac{۱}{۱+۲}$ یا $\frac{AO}{AM}=\frac{۱}{۳}$. از نقطهٔ M، خطی موازی با BK رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ P قطع کند. اکنون بنا بر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث AMP داریم:

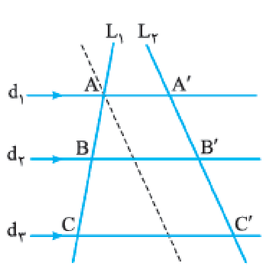



$$\frac{AO}{AM}=\frac{OK}{MP} \Rightarrow \frac{OK}{MP}=\frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

در مثلث BCK نیز بنا بر تالس داریم $\frac{BC}{MC}=\frac{BK}{MP}$ یا $\frac{BK}{MP}=۲ \quad (۲)$. چنان‌چه دو رابطهٔ (۱) و (۲) را بر یکدیگر تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود $\frac{BK}{OK}=۶$، پس BK، ۶ برابر OK است.

## قضیهٔ تالس در حالت کلی‌تر

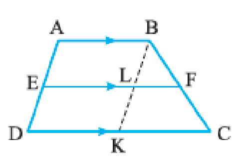
**قضیه** اگر چند خط موازی، دو خط مورب را قطع کنند، پاره‌خط‌های متناظر ایجادشده روی آن دو خط، با هم متناسب‌اند؛ یعنی در شکل مقابل، داریم:




$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{یا} \quad \frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$$

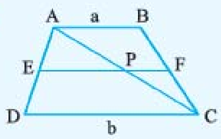
# قضیهٔ تالس در ذوزنقه

**قضیه** اگر خطی موازی دو قاعدهٔ ذوزنقه رسم شود، روی ساق‌ها پاره‌خط‌های متناظرِ متناسب ایجاد می‌کند؛ یعنی در شکل مقابل، اگر $EF \parallel AB \parallel DC$، نتیجه می‌شود $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$ و برعکس اگر $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$، آن‌گاه $EF \parallel AB \parallel DC$.



**تست** اگر روی ساق‌های ذوزنقهٔ ABCD با قاعده‌های a و b، نقطه‌های E و F را چنان انتخاب کنیم که $\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}=k$ باشد، اندازهٔ EF کدام است؟

۱) $kb+(۱-k)a$ ۲) $ka+(۱-k)b$ ۳) $kb+(۱+k)a$ ۴) $ka+(۱+k)b$



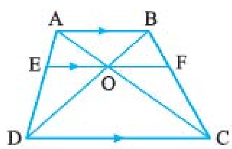
**پاسخ گزینهٔ۱** چون $\frac{BF}{FC}=\frac{AE}{ED}$، پس $EF \parallel AB \parallel DC$. اگر قطر AC را رسم کنیم، در دو مثلث ABC و ACD با استفاده از قضیهٔ تالس داریم:

$$\overset{\Delta}{ADC}: EP \parallel DC \Rightarrow \frac{EP}{DC}=\frac{AE}{AD}=k \Rightarrow \frac{EP}{b}=k \Rightarrow EP=kb \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: FP \parallel AB \Rightarrow \frac{PF}{AB}=\frac{FC}{BC} \Rightarrow \frac{PF}{a}=\frac{BC-BF}{BC} \Rightarrow \frac{PF}{a}=۱-\frac{BF}{BC}=۱-k \Rightarrow PF=(۱-k)a \quad (۲)$$

اگر روابط (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، نتیجه می‌شود: $EP+PF=kb+(۱-k)a$ یا $EF=kb+(۱-k)a$.

## چند نتیجهٔ مهم از قضیهٔ تالس در ذوزنقه

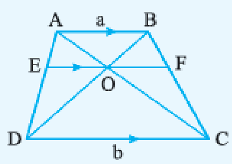


**نتیجهٔ ۱:** در هر ذوزنقه، پاره‌خطی که از محل برخورد دو قطر به موازات قاعده‌های آن رسم شده و به دو ساق محدود باشد، در نقطهٔ برخورد دو قطر، نصف می‌شود؛ یعنی در شکل مقابل داریم $EO=OF$.

**تست** در ذوزنقهٔ ABCD با قاعده‌های a و b، طول پاره‌خطی که از نقطهٔ برخورد دو قطر، موازی قاعده‌ها رسم می‌شود، کدام است؟

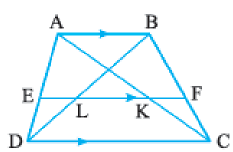
۱) $\frac{۲ab}{|a-b|}$ ۲) $\frac{ab}{a+b}$ ۳) $\frac{۲ab}{a+b}$ ۴) $\frac{ab}{|a-b|}$

**پاسخ گزینهٔ۳** بنا بر نتیجهٔ ۱ می‌دانیم $EO=OF$. اگر فرض کنیم $EO=OF=x$. آن‌گاه داریم:

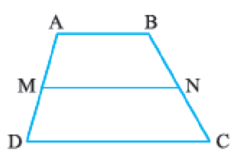


$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ADC}: \frac{x}{b}=\frac{AO}{AC}\\ \overset{\Delta}{ABC}: \frac{x}{a}=\frac{CO}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{b}+\frac{x}{a}=\frac{AO}{AC}+\frac{CO}{AC}=۱ \Rightarrow \frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}=\frac{۱}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{۱}{x} \Rightarrow x=\frac{ab}{a+b} \Rightarrow EF=۲x=\frac{۲ab}{a+b}$$

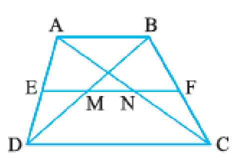


**نتیجهٔ ۲:** در هر ذوزنقه، اگر خطی به موازات دو قاعدهٔ آن رسم شود تا ساق‌ها و قطرها را قطع کند، پاره‌خط‌های محدود به ساق‌ها و قطرها با هم برابرند؛ یعنی در شکل مقابل با فرض $EF \parallel AB \parallel CD$ داریم $EL=KF$ یا $EK=FL$.

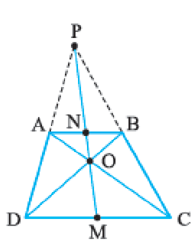


**نتیجهٔ۳:** در هر ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند (میان‌خط در ذوزنقه)، موازی قاعده‌های ذوزنقه و برابر میانگین دو قاعده است؛ یعنی در ذوزنقهٔ شکل مقابل، اگر M و N وسط‌های دو ساق باشند، داریم:

$$MN=\frac{AB+CD}{۲} \quad \text{و} \quad MN \parallel AB$$



**نتیجهٔ ۴:** در هر ذوزنقه، وسط‌های دو ساق و وسط‌های دو قطر آن بر یک راستا قرار دارند و طول پاره‌خطی که وسط‌های دو قطر را به هم وصل می‌کند، نصف قدرمطلق تفاضل دو قاعدهٔ ذوزنقه است؛ یعنی در شکل مقابل با فرض آن‌که نقاط E و F وسط‌های دو ساق و نقاط M و N وسط‌های دو قطر باشند، آن‌گاه این چهار نقطه بر یک راستا هستند و در ضمن $MN=\frac{DC-AB}{۲}$.



**نتیجهٔ ۵:** در هر ذوزنقه، دو نقطهٔ وسط قاعده‌ها، نقطهٔ برخورد دو قطر و نقطهٔ برخورد امتداد دو ساق آن، بر یک راستا قرار دارند؛ یعنی در شکل مقابل، اگر N و M وسط‌های دو قاعدهٔ ذوزنقه باشند، آن‌گاه نقاط P، N، O و M بر یک راستا هستند.

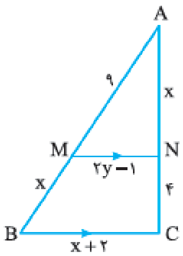
# پرسش‌های چهارگزینه‌ای

## تالس در مثلث

۱۲۱- در مثلث TUV، دو نقطهٔ W و X را به ترتیب روی TU و TV طوری در نظر گرفته‌ایم که $UV \parallel WX$ . نسبت $\frac{UV}{WX}$ با کدام نسبت برابر است؟

۱) $\frac{XV}{VT}$ ۲) $\frac{UT}{WT}$ ۳) $\frac{TV}{XV}$ ۴) $\frac{UW}{TW}$

۱۲۲- در شکل روبه‌رو MN با BC موازی است. y کدام است؟ (کتاب درسی هندسهٔ ۱، برگرفته از تمرین)




۱) ۲/۶

۲) ۲/۷

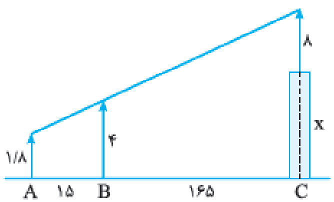
۳) ۲/۸

۴) ۲/۹

۱۲۳- علی که قد او ۱۸۰ سانتی‌متر است، در اطراف یک درخت طوری ایستاده است که نوک سایهٔ او بر نوک سایهٔ درخت منطبق شده است. اگر طول سایهٔ علی چهار متر و فاصلهٔ او تا درخت بیست متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟ (کتاب درسی هندسهٔ ۱، برگرفته از تمرین)

۱) ۱۰/۲ ۲) ۱۰/۴ ۳) ۱۰/۶ ۴) ۱۰/۸

۱۲۴- در شکل مقابل، دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. چشم ناظر به ارتفاع ۱/۸ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)




۱) ۱۹/۸ ۲) ۲۰/۲

۳) ۲۰/۸ ۴) ۲۱/۲

۱۲۵- در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

۱) ۱۱/۵ ۲) ۱۱/۶ ۳) ۱۲/۲ ۴) ۱۲/۸ (سراسری تجربی ۹۴)

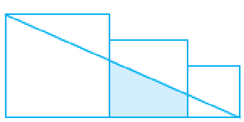
۱۲۶- اندازه‌های قاعده‌های یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، ۳ و ۱۲ واحد هستند. اگر فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع امتدادهای ساق‌ها از دورترین رأس ذوزنقه ۲۰ واحد باشد، فاصلهٔ آن تا نزدیک‌ترین رأس ذوزنقه کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۲۷- در هر مربع فاصلهٔ وسط هر ضلع از قطر مربع، چند برابر طول ضلع است؟

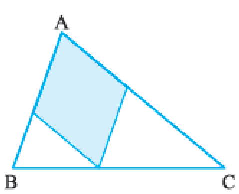
۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۲۸- در شکل روبه‌رو، مربع‌هایی به طول ضلع‌های ۲، ۳ و ۴ واحد کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت قسمت رنگی، چند واحد مربع است؟



۱) $\frac{۱۳}{۳}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) ۵

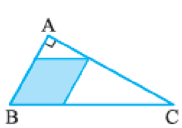
۱۲۹- در شکل روبه‌رو، چهارضلعی مشخص‌شده یک لوزی به طول ضلع x است. اگر $AC=b$ و $AB=c$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟




۱) $x=|b-c|$ ۲) $\frac{۱}{x}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$

۳) $x^{۲}=a.b$ ۴) $x=\frac{a+b}{۲}$

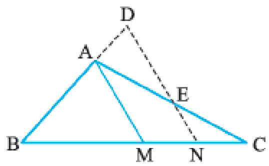
۱۳۰- در شکل روبه‌رو، ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع قائمهٔ ۶ و ۸ واحد و چهارضلعی مشخص‌شده لوزی است. طول ضلع این لوزی کدام است؟




۱) ۳/۷۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۲۵ ۴) ۴/۵

۱۳۱- دو نقطهٔ P و Q را به ترتیب روی دو ضلع AB و AC از مثلث ABC طوری در نظر می‌گیریم که $A\hat{P}Q=\hat{B}$ : اگر $\frac{PQ}{۳}=\frac{AP}{۴}=\frac{BC}{۵}=۲$ ، آن‌گاه طول BP کدام است؟

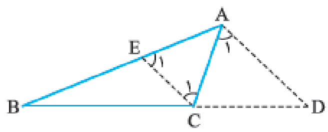
۱) ۴ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$




۱۳۲- در مثلث ABC که در آن $AB=\frac{۲}{۳}AC$، پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟
(سراسری ریاضی ۹۴)

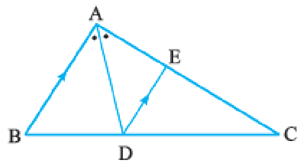
۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$




۱۳۳- مطابق شکل، نقطهٔ D را روی امتداد ضلع BC و نقطهٔ E را روی ضلع AB از مثلث ABC که در آن $AB=۱۵$ و $AC=۶$، طوری در نظر گرفته‌ایم که $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱=\hat{E}_۱$. نقطهٔ C پاره‌خط BD را به چه نسبتی تقسیم کرده است؟

۱) ۱ به ۱ ۲) ۱/۲ به ۱ ۳) ۱/۴ به ۱ ۴) ۱/۵ به ۱




۱۳۴- مطابق شکل، در مثلث ABC که در آن $۵AB=۳AC=۶۰$ نیمساز AD را رسم و از نقطهٔ D، پاره‌خط DE را به موازات AB رسم کرده‌ایم. طول AE کدام است؟

۱) ۷/۵ ۲) ۸

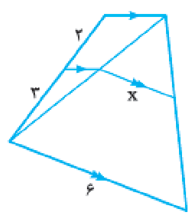
۳) ۹ ۴) ۹/۵

۱۳۵- مثلث ABC را به طول ضلع‌های ۴، ۵ و ۶ در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی، خطی به موازات ضلع بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. فاصلهٔ نقاط برخورد این خط با دو ضلع دیگر مثلث کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/۴ ۴) ۳/۶

۱۳۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $AB=۵$ و $AC=۴$ ضلع‌های زاویهٔ قائمه‌اند. نقطهٔ M وسط وتر است و نقطهٔ P روی AB طوری قرار دارد که $AP=۱$. طول پاره‌خط MP کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵



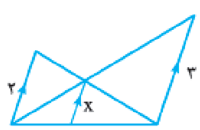

۱۳۷- در شکل روبه‌رو، دو جفت پاره‌خط موازی مشخص شده‌اند. x کدام است؟

۱) ۱/۸

۲) ۲

۳) ۲/۲

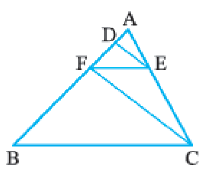
۴) ۲/۴




۱۳۸- در شکل روبه‌رو سه پاره‌خط موازی مشخص شده است. x کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۳

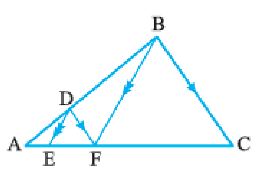
۳) ۱/۴ ۴) ۱/۵




۱۳۹- در شکل مقابل $DE \parallel FC$ و $EF \parallel BC$. اگر $AD=۳$ و $DF=۶$، آن‌گاه BC چند برابر EF است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵

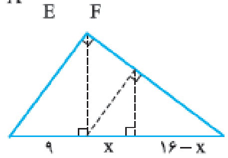
۳) ۲/۷۵ ۴) ۳




۱۴۰- در شکل روبه‌رو دو جفت پاره‌خط موازی مشخص شده‌اند، اگر طول BC سه برابر طول DF باشد، طول AC چند برابر طول EF است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵

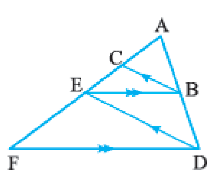
۳) ۴ ۴) ۴/۵




۱۴۱- در شکل مقابل، ارتفاع‌های هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازهٔ x کدام است؟

۱) ۴/۵۴ ۲) ۵/۳۶

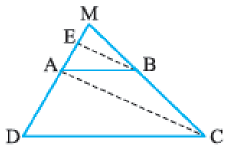
۳) ۵/۷۶ ۴) ۶/۷۵




۱۴۲- در شکل روبه‌رو $DE \parallel BC$ و $FD \parallel EB$. کدام گزینه درست است؟ (کتاب درسی هندسهٔ ۱، برگرفته از تمرین)

۱) $CE^۲=AC.FE$ ۲) $AC^۲=EC.EF$

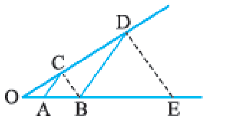
۳) $AE^۲=AC.AF$ ۴) $FE^۲=AE.AC$




۱۴۳- در ذوزنقهٔ ABCD، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصلهٔ MD کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۳)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۲۵

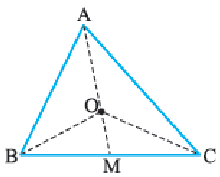
۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۲/۷۵




۱۴۴- در شکل مقابل، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند، اگر $OA = ۳$ و $AB = ۵$، آن‌گاه اندازهٔ BE کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴)*

۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$ ۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$

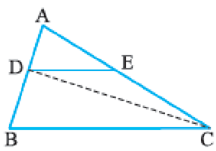
۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$ ۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$




۱۴۵- در شکل مقابل، مساحت‌های مثلث‌های ABC و OBC را به ترتیب S و $S'$ می‌نامیم، نسبت $\frac{OM}{AM}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{S}{S'}$ ۲) $(\frac{S}{S'})^۲$

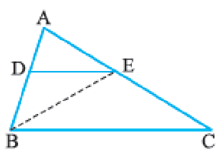
۳) $\frac{S-S'}{S}$ ۴) $\frac{S'}{S}$




۱۴۶- در شکل مقابل $\frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷}$ و $DE \parallel BC$. مساحت مثلث ADE چند درصد مساحت مثلث DEC است؟ *(سراسری تجربی ۸۹)*

۱) ۷۰ ۲) ۷۵

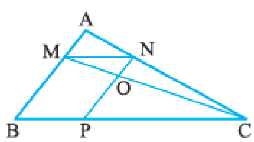
۳) ۷۸ ۴) ۸۴




۱۴۷- در مثلث ABC، پاره‌خط DE موازی ضلع BC است و $AD = \frac{۴}{۵}DB$. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟ *(سراسری ریاضی ۹۳)*

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵

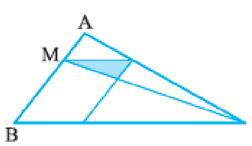
۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵




۱۴۸- در شکل مقابل، $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۷}$ و چهارضلعی MNPB متوازی‌الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟ *(سراسری تجربی ۹۰)*

۱) ۶۳ ۲) ۶۰

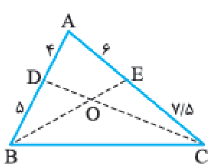
۳) ۷۰ ۴) ۸۴




۱۴۹- در شکل مقابل، اگر $\frac{MA}{MB} = \frac{۲}{۳}$، آن‌گاه مساحت مثلث رنگ‌شده چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)*

۱) ۲۰ ۲) ۲۴

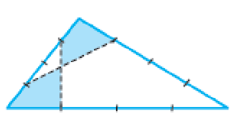
۳) ۲۵ ۴) ۳۰




۱۵۰- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۸۷)*

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۱



۱۵۱- در شکل مقابل، هر ضلع مثلث به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی رنگ‌شده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۹)*

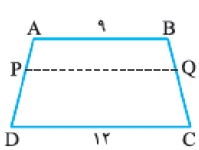
۱) هم‌مساحت ۲) هم‌محیط

۳) هم‌نهشت ۴) متشابه

## تالس در ذوزنقه

۱۵۲- در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌های a و b، از نقطهٔ محل برخورد قطرها خطی به موازات دو قاعده رسم می‌کنیم. اگر طول پاره‌خطی که ساق‌های ذوزنقه از این خط جدا می‌کنند x باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $x = \frac{a+b}{۲}$ ۲) $x = \sqrt{ab}$ ۳) $\frac{۱}{x} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$ ۴) $\frac{۲}{x} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$

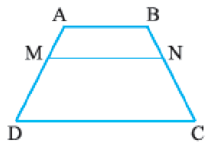



۱۵۳- در شکل روبه‌رو، PQ با قاعده‌های ذوزنقه موازی است. اگر $AB = ۹$ ، $CD = ۱۲$ و طول PD دو برابر PA باشد، طول PQ کدام است؟

۱) ۹/۷۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۰/۲۵ ۴) ۱۰/۵

۱۵۴- در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۴ و ۱۳ واحد می‌خواهیم روی هر ساق یک نقطه انتخاب کنیم که با وصل‌کردن این دو نقطه، پاره‌خطی به طول ۱۰ واحد، موازی قاعده‌ها ایجاد شود. نقاط انتخاب‌شده باید ساق‌ها را به نسبت ............ تقسیم کنند.

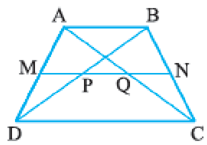
۱) ۱ به ۳     ۲) ۱ به ۲     ۳) ۱ به ۳/۵     ۴) ۱ به ۲/۵




۱۵۵- مطابق شکل، در ذوزنقهٔ ABCD اگر $AB=۳$ ، $DC=۶$ و $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۳}$ ، آن‌گاه:

۱) $MN=\frac{۱۳}{۴}$     ۲) $MN=\frac{۹}{۲}$

۳) $MN=۴$     ۴) $MN=۵$

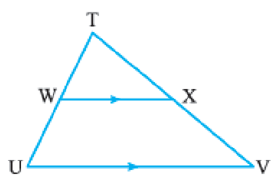



۱۵۶- در ذوزنقهٔ شکل مقابل $BN=NC$ و $AM=MD$ . اگر $CD=۳AB$ ، آن‌گاه:

۱) $PQ=\frac{۲CD}{۳}$     ۲) $PQ=\frac{CD}{۶}$

۳) $PQ=\frac{۴CD}{۹}$     ۴) $PQ=\frac{CD}{۳}$

۱۲۱- **گزینهٔ ۲** با استفاده از قضیهٔ تالس و نسبت جزء به کل داریم:




$$\frac{WX}{UV}=\frac{WT}{TU}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{UV}{WX}=\frac{TU}{WT}$$

---

۱۲۲- **گزینهٔ ۴** با استفاده از قضیهٔ تالس و نسبت جزء به جزء داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶$$

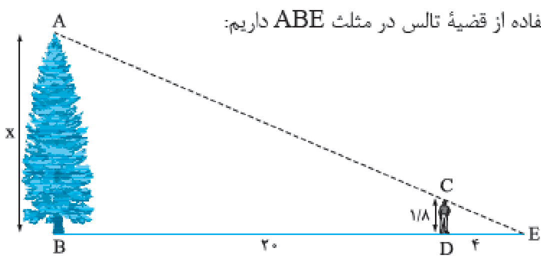
و با استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow\frac{۲y-۱}{x+۲}=\frac{x}{x+۴}\xrightarrow{x=۶}\frac{۲y-۱}{۸}=\frac{۶}{۱۰}$$

$$\Rightarrow\frac{۲y-۱}{۸}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow ۱۰y-۵=۲۴\Rightarrow ۱۰y=۲۹\Rightarrow y=۲/۹$$

---

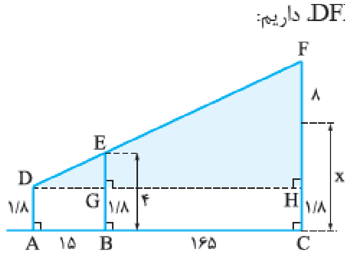
۱۲۳- **گزینهٔ ۴** شکل زیر را در نظر می‌گیریم؛ چون $CD \parallel AB$، با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABE داریم:




$$\frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BE}\Rightarrow\frac{۱/۸}{x}=\frac{۴}{۲۴}\Rightarrow x=\frac{۱/۸\times۲۴}{۴}=۱۰/۸$$

---

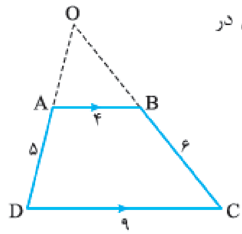
۱۲۴- **گزینهٔ ۲** از D عمودی بر FC رسم می‌کنیم؛ مطابق شکل با به کار بردن قضیهٔ تالس در مثلث DFH، داریم:



$$\frac{EG}{FH}=\frac{DG}{DH} \Rightarrow \frac{۴-۱/۸}{(x+۸)-۱/۸}=\frac{۱۵}{۱۵+۱۶۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۲/۲}{x+۶/۲}=\frac{۱۵}{۱۸۰} \Rightarrow \frac{۲/۲}{x+۶/۲}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow x+۶/۲=۲/۲\times۱۲ \Rightarrow x+۶/۲=۲۶/۴ \Rightarrow x=۲۰/۲$$




۱۲۵- **گزینهٔ ۴** با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث OCD، داریم:

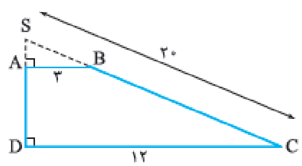
$$\frac{OA}{OD}=\frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{OA}{OA+۵}=\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow ۹OA=۴OA+۲۰$$

$$\Rightarrow OA=۴$$

$$\frac{OB}{OC}=\frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{OB}{OB+۶}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹OB=۴OB+۲۴ \Rightarrow OB=۴/۸$$

$\Rightarrow$ محیط مثلث OAB $=OA+OB+AB=۴+۴/۸+۴=۱۲/۸$

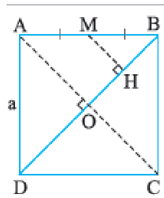



۱۲۶- **گزینهٔ ۱** با توجه به شکل و به کار بردن قضیهٔ تالس در مثلث SCD، داریم:

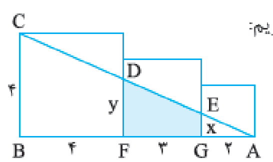
$$\frac{SB}{SC}=\frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{SB}{۲۰}=\frac{۳}{۱۲}$$

$$\Rightarrow SB=۵$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABS، وتر $SB=۵$ و $AB=۳$ یک ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن است. پس با توجه به قضیهٔ فیثاغورس طول ضلع دیگر زاویهٔ قائمه می‌شود ۴؛ یعنی $SA=۴$.




۱۲۷- **گزینهٔ ۲** می‌دانیم در مربعی به طول ضلع a، طول قطرها برابر $a\sqrt{۲}$ است و قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، پس در شکل روبه‌رو، $AO=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$
در مثلث ABO، M وسط AB و MH با AO موازی است، پس طبق قضیهٔ تالس MH هم نصف AO است؛ یعنی $MH=\frac{۱}{۲}(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۴}a$.




۱۲۸- **گزینهٔ ۳** در مثلث ABC، داریم:

$$EG \| CB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EG}{CB}=\frac{AG}{AB}$$

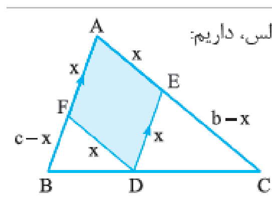
$$\Rightarrow \frac{x}{۴}=\frac{۲}{۹} \Rightarrow x=\frac{۸}{۹}$$

همچنین:

$$DF \| CB \Rightarrow \frac{DF}{CB}=\frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{y}{۴}=\frac{۵}{۹} \Rightarrow y=\frac{۲۰}{۹}$$

چهارضلعی DEGF یک ذوزنقه به قاعده‌های $x=\frac{۸}{۹}$ و $y=\frac{۲۰}{۹}$ و ارتفاع $FG=۳$ است، پس مساحت آن می‌شود:

$$S=\frac{۱}{۲}(x+y).FG=\frac{۱}{۲}(\frac{۸}{۹}+\frac{۲۰}{۹})\times۳=\frac{۱۴}{۳}$$




۱۲۹- **گزینهٔ ۲** با استفاده از قضیهٔ تالس، داریم:

$$\frac{DE}{AB}=\frac{EC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{c}=\frac{b-x}{b}$$

$$\Rightarrow bx=bc-cx$$

$$\Rightarrow bx+cx=bc$$

$$\xrightarrow{\div bcx} \frac{۱}{c}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{x}$$

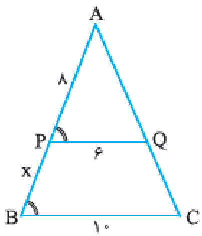
۱۳۰- **گزینهٔ ۱** از آن‌جا که $AB=۶$ و $AC=۸$، از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود $BC=۱۰$. از سؤال قبل نتیجه می‌گیریم که اگر طول ضلع لوزی x باشد، داریم:

$$\frac{۱}{x}=\frac{۱}{BC}+\frac{۱}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{x}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{x}=\frac{۶+۱۰}{۶۰}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۶۰}{۱۶}=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$$

۱۳۱- **گزینهٔ ۴**

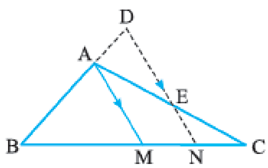
$$\frac{PQ}{۳}=\frac{AP}{۴}=\frac{BC}{۵}=۲ \Rightarrow \begin{cases} PQ=۶ \\ AP=۸ \\ BC=۱۰ \end{cases}$$




شکل مناسب را می‌کشیم. از آن‌جا که $\hat{B}=A\hat{P}Q$، طبق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب PQ با BC موازی است و می‌توانیم از قضیهٔ تالس استفاده کنیم:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{۸}{۸+x}=\frac{۶}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۸+x}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow ۸\times۵=۳(۸+x) \Rightarrow ۴۰=۲۴+۳x \Rightarrow x=\frac{۱۶}{۳}$$




۱۳۲- **گزینهٔ ۳** با به کار بردن قضیهٔ تالس در مثلث ACM داریم:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{MN}{MC} \quad (*)$$

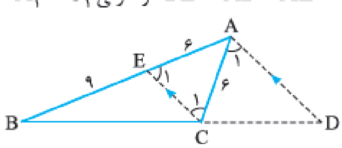
با به کار بردن قضیهٔ تالس در مثلث BDN داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{MN}{BM} \quad (**)$

طبق فرض، AM میانهٔ وارد بر BC است، پس $BM=CM$، در این صورت سمت راست تساوی‌های (*) و (**) با هم برابر و در نتیجه سمت چپ آن‌ها با هم برابر است:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB} \xrightarrow{\text{تعویض جای طرفین}} \frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$$

$$\xrightarrow{AB=\frac{۲}{۳}AC} \frac{\frac{۲}{۳}AC}{AC}=\frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{۲}{۳}$$

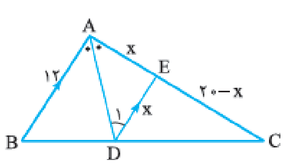
۱۳۳- **گزینهٔ ۴** مثلث ACE در رأس A متساوی‌الساقین است، پس $AE=AC=۶$، در نتیجه $BE=AB-AE=۹$. از طرفی $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$،




پس بنا به عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب $EC \| AD$.
حالا با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABD، داریم:

$$\frac{BC}{CD}=\frac{BE}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{CD}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}=\frac{۱/۵}{۱}$$

۱۳۴- **گزینهٔ ۱**




$$\begin{cases} AB \| DE \\ \text{مورب } AD \end{cases} \Rightarrow \hat{D}_۱=D\hat{A}B=\frac{\hat{A}}{۲}$$

$$\xrightarrow{D\hat{A}E=\frac{\hat{A}}{۲}} \hat{D}_۱=D\hat{A}E$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد مثلث ADE متساوی‌الساقین است، پس $AE=DE=x$. از $۵AB=۳AC=۶۰$ نتیجه می‌شود:

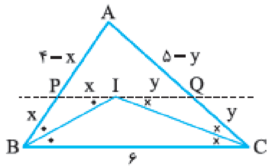
$$AB=\frac{۶۰}{۵}=۱۲ \quad , \quad AC=\frac{۶۰}{۳}=۲۰$$

پس با استفاده از قضیهٔ تالس، داریم:

$$\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۱۲}=\frac{۲۰-x}{۲۰} \Rightarrow ۲۰x=۲۰\times۱۲-۱۲x$$

$$\Rightarrow ۳۲x=۲۰\times۱۲ \Rightarrow x=\frac{۲۰\times۱۲}{۳۲}=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

**۱۳۵- گزینهٔ ۴** با توجه به شکل، از آن‌جا که I نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی است، اگر از آن به B و C وصل کنیم، زاویه‌های B و C نصف می‌شوند. از طرفی طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، داریم $B\hat{I}P=\frac{\hat{B}}{۲}$ و $Q\hat{I}C=\frac{\hat{C}}{۲}$، پس دو مثلث PIB و QIC متساوی‌الساقین هستند، فرض می‌کنیم $PB=PI=x$ و $QC=QI=y$. با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

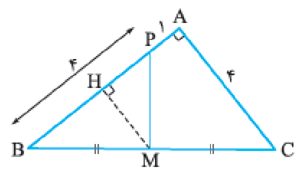



$$\begin{cases}\frac{BP}{AB}=\frac{CQ}{AC}\Rightarrow \frac{x}{۴}=\frac{y}{۵}\\ \frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}\Rightarrow\frac{x+y}{۶}=\frac{۴-x}{۴}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۵x=۴y\\ ۴(x+y)=۶(۴-x)\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\begin{cases}x=۱/۶\\ y=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow PQ=x+y=۳/۶$$

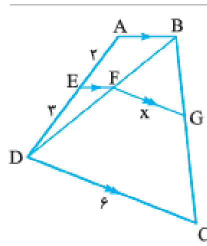
**۱۳۶- گزینهٔ ۳** از نقطهٔ M، عمود MH را بر AB وارد می‌کنیم. از آن‌جا که M وسط BC است و $MH \parallel AC$، با استفاده از قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم H هم وسط AB است، پس $BH=\frac{AB}{۲}=۲/۵$ و در نتیجه $HP=BP-BH=۱/۵$.




از طرفی پاره‌خط MH، وسط‌های دو ضلع مثلث ABC را به هم وصل کرده، پس طول آن نصف طول ضلع سوم است؛ یعنی $MH=\frac{AC}{۲}=۲$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHP، $MH=\frac{۴}{۲}$ و $HP=\frac{۳}{۲}$ ضلع‌های زاویهٔ قائمه هستند، پس طول وتر مثلث می‌شود $MP=\frac{۵}{۲}=۲/۵$.

**۱۳۷- گزینهٔ ۴** در مثلث DAB، $EF \parallel AB$ پس با استفاده از قضیهٔ تالس داریم:

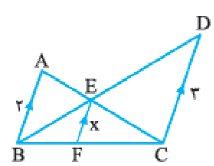



$$\frac{DF}{FB}=\frac{DE}{EA}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{FB}{DF}=\frac{۲}{۳}\quad(*)$$

در مثلث BCD، $FG \parallel CD$ پس با استفاده از قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{FG}{CD}=\frac{BF}{BD}\xrightarrow{(*)}\frac{FG}{CD}=\frac{۲}{۳+۲}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow x=۲/۴$$

**۱۳۸- گزینهٔ ۱** با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:




$$\frac{FC}{BC}=\frac{x}{۲}\quad(*)$$

با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث BCD، داریم:

$$\frac{BF}{BC}=\frac{x}{۳}\quad(**)$$

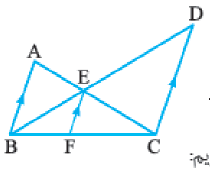
با جمع دو طرف تساوی‌های (*) و (**)، داریم:

$$\frac{FC}{BC}+\frac{BF}{BC}=\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}\Rightarrow\frac{FC+BF}{BC}=\frac{۳x+۲x}{۶}$$

$$\Rightarrow\frac{BC}{BC}=\frac{۵x}{۶}\Rightarrow\frac{۵x}{۶}=۱\Rightarrow x=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

اگر نکتهٔ زیر یادتان می‌ماند، حل این سوال ساده‌تر می‌شود، اگر هم یادتان نمی‌ماند که روش حل بالا را داشته باشید.

**تذکر** در شکل مقابل داریم:

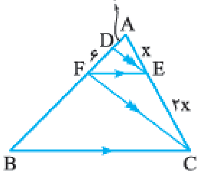



$$\frac{۱}{EF}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}$$

اگر بخواهیم این سؤال را با نکتهٔ بالا حل کنیم، داریم:

$$\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۳+۲}{۶}\Rightarrow x=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

**۱۳۹- گزینهٔ ۴** در مثلث ACF بنا به قضیهٔ تالس، داریم:



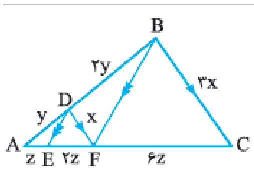

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DF}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

پس در نظر می‌گیریم $AE=x$ و $EC=۲x$

حالا با استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث ABC، داریم:

$$\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{x}{x+۲x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BC=۳EF$$

**۱۴۰- گزینهٔ ۴**




$$\overset{\Delta}{ABC}: DF \parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AD}{AB}=\frac{DF}{BC}$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{x}{۳x}$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{AB-AD}=\frac{x}{۳x-x}\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{۱}{۲}$$

پس می‌توانیم فرض کنیم $AD=y$ و $BD=۲y$ و از آن‌جا که در مثلث ABF، $DE \parallel BF$. با توجه به قضیهٔ تالس می‌توان در نظر گرفت $AE=z$ و $EF=۲z$. از طرفی:

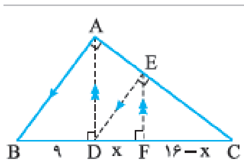
$$\overset{\Delta}{ABC}:DF \parallel BC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow\frac{۳z}{FC}=\frac{y}{۲y}$$

$$\Rightarrow FC=۶z$$

پس:

$$\frac{AC}{EF}=\frac{z+۲z+۶z}{۲z}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

**۱۴۱- گزینهٔ ۳** با به کار بردن قضیهٔ تالس در مثلث ABC، داریم:




$$\frac{CD}{BD}=\frac{CE}{EA}\quad(*)$$

با به کار بردن قضیهٔ تالس در مثلث ACD، داریم:

$$\frac{CF}{FD}=\frac{CE}{EA}\quad(**)$$

از مقایسهٔ (*) و (**) داریم:

$$\frac{CD}{BD}=\frac{CF}{FD}\Rightarrow\frac{(۱۶-x)+x}{۹}=\frac{۱۶-x}{x}\Rightarrow\frac{۱۶}{۹}=\frac{۱۶-x}{x}$$

$$\Rightarrow ۱۶x=۹\times۱۶-۹x\Rightarrow ۲۵x=۹\times۱۶\Rightarrow x=\frac{۹\times۱۶}{۲۵}$$

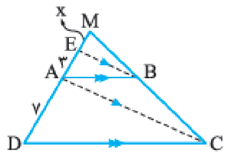
$$\Rightarrow x=\frac{۹\times۱۶}{۲۵}\times\frac{۴}{۴}=\frac{۹\times۱۶\times۴}{۱۰۰}=\frac{۵۷۶}{۱۰۰}=۵/۷۶$$

**۱۴۲- گزینهٔ ۳**

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ADE} : CB \parallel DE \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AD} \\ \overset{\Delta}{AFD} : EB \parallel FD \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AD}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AE}{AF}$$

$$\Rightarrow AE^{۲} = AC.AF$$

**۱۴۳- گزینهٔ ۲** در نظر می‌گیریم $ME=x$ و از نتیجهٔ سوال قبل استفاده می‌کنیم:



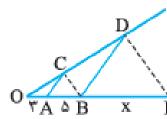

$$MA^{۲} = ME.MD$$

$$\Rightarrow (x+۳)^{۲} = x(x+۳+۷)$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۶x+۹ = x^{۲}+۱۰x \Rightarrow ۹ = ۴x$$

$$\Rightarrow x = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵ \Rightarrow MD = ۲/۲۵+۳+۷ = ۱۲/۲۵$$

**۱۴۴- گزینهٔ ۱** در نظر می‌گیریم $BE = x$ و از رابطهٔ $OB^{۲} = OA.OE$ استفاده می‌کنیم:

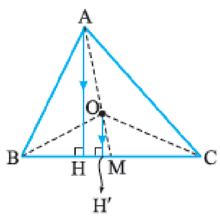



$$(۳+۵)^{۲} = ۳(۳+۵+x)$$

$$\Rightarrow ۶۴ = ۳(۸+x) \Rightarrow ۸+x = \frac{۶۴}{۳}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۶۴}{۳} - ۸ = \frac{۴۰}{۳} = \frac{۳۹+۱}{۳} = ۱۳ + \frac{۱}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

**۱۴۵- گزینهٔ ۴** در دو مثلث $ABC$ و $OBC$، قاعدهٔ $BC$ مشترک است، ارتفاع‌های وارد بر $BC$ را در این دو مثلث رسم می‌کنیم. نسبت مساحت‌های این دو مثلث، برابر با نسبت این دو ارتفاع است؛ یعنی:

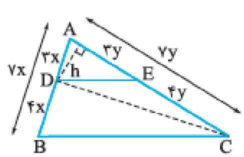



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OBC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{OH'}{AH} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{OH'}{AH} \quad (*)$$

از طرفی با به کار بردن قضیهٔ تالس در مثلث $AHM$، داریم:

$$\frac{OM}{AM} = \frac{OH'}{AH} \xrightarrow{(*)} \frac{OM}{AM} = \frac{S'}{S}$$

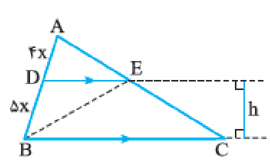
**۱۴۶- گزینهٔ ۲** $\frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷}$، پس از آن‌جاکه $DE \parallel BC$، داریم $\frac{AE}{AC} = \frac{۳}{۷}$ و در نظر می‌گیریم $AC=۷y$ و $AE=۳y$ که نتیجه می‌دهد $EC = ۴y$.




با توجه به شکل دو مثلث $ADE$ و $DEC$ در ارتفاع $h$ مشترک‌اند، پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}h.۳y}{\frac{۱}{۲}h.۴y} = \frac{۳}{۴} = ٪۷۵$$

**۱۴۷- گزینهٔ ۲** ابتدا توجه کنید که:




$$\frac{S_{\overset{\Delta}{EBC}}}{S_{\overset{\Delta}{EBD}}} = \frac{\frac{۱}{۲}h.BC}{\frac{۱}{۲}h.DE} = \frac{BC}{DE} \quad (*)$$

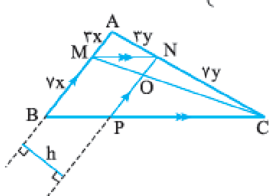
از طرفی $AD = \frac{۴}{۵}DB$، به عبارت دیگر $\frac{AD}{DB} = \frac{۴}{۵}$، پس در نظر می‌گیریم $AD = ۴x$ و $DB = ۵x$ از آن‌جا که $DE \parallel BC$، از قضیهٔ تالس در مثلث $ABC$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{۴x}{۹x} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{۹}{۴}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{S_{\overset{\Delta}{EBC}}}{S_{\overset{\Delta}{EBD}}} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

**۱۴۸- گزینهٔ ۳** $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۷}$ و $MN \parallel BC$، پس با توجه به قضیهٔ تالس در نظر می‌گیریم $\begin{cases} MA = ۳x \\ MB = ۷x \end{cases}$ و $\begin{cases} AN = ۳y \\ NC = ۷y \end{cases}$.

از طرفی داریم:



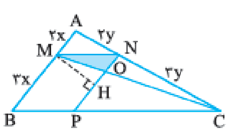

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OMN}}}{S_{\overset{\Delta}{AMN}}} = \frac{\frac{۱}{۲}h.ON}{\frac{۱}{۲}h.AM} = \frac{ON}{AM} \quad (*)$$

در مثلث $CAM$، داریم $ON \parallel AM$، پس:

$$\frac{ON}{AM} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{ON}{AM} = \frac{۷y}{۱۰y} = \frac{۷}{۱۰} = ٪۷۰$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{S_{\overset{\Delta}{OMN}}}{S_{\overset{\Delta}{AMN}}} = ٪۷۰$$

**۱۴۹- گزینهٔ ۱** از آن‌جا که $\frac{MA}{MB} = \frac{۲}{۳}$، می‌توانیم در نظر بگیریم $MA = ۲x$ و $MB = ۳x$ و از آن‌جا که $MN \parallel BC$،




از قضیهٔ تالس می‌توانیم نتیجه بگیریم: $NC = ۳y \ , \ AN = ۲y$

از طرفی چهارضلعی $MNPB$ متوازی‌الاضلاع است، پس $NP = MB = ۳x$ و داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OMN}}}{S_{MNPB}} = \frac{\frac{۱}{۲}MH.ON}{MH.NP} = \frac{ON}{۲NP} = \frac{ON}{۲\times۳x}$$

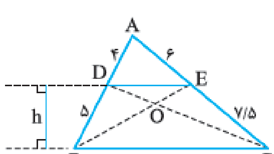
$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{OMN}}}{S_{MNPB}} = \frac{ON}{۶x} \quad (*)$$

حالا اگر بتوانیم $ON$ را برحسب $x$ به دست آوریم، از تساوی $(*)$ جواب سوال به دست می‌آید. مثلث $AMC$ را ببینید، از موازی‌بودن $ON$ و $AM$ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{ON}{AM} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow \frac{ON}{۲x} = \frac{۳y}{۵y} \Rightarrow ON = \frac{۶x}{۵}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{S_{\overset{\Delta}{OMN}}}{S_{MNPB}} = \frac{\frac{۶x}{۵}}{۶x} = \frac{۱}{۵} = ٪۲۰$$

**۱۵۰- گزینهٔ ۴** با توجه به شکل داریم $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (زیرا $\frac{۴}{۵} = \frac{۶}{۷/۵}$)، پس طبق عکس قضیهٔ تالس $DE$ با $BC$ موازی است. حالا می‌توان نتیجه گرفت:

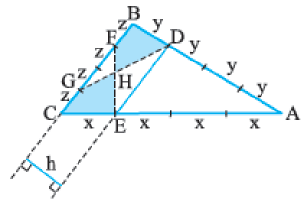



$$S_{\overset{\Delta}{BDE}} = S_{\overset{\Delta}{CDE}} = \frac{۱}{۲}h.DE$$

اگر از دو طرف تساوی $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BDE}$ مقدار $S_{\triangle ODE}$ را کم کنیم، داریم:

$S_{\triangle OBD} = S_{\triangle OCE}$

**۱۵۱- گزینهٔ ۱** با توجه به شکل $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{CE}=3$، پس طبق عکس قضیهٔ تالس $DE \parallel BC$ و داریم:

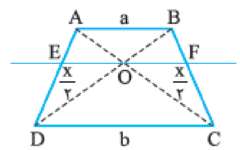



$$S_{\triangle CEF}=S_{\triangle BDG}=\frac{1}{2}h\times 3z$$

حالا اگر از دو طرف تساوی $S_{\triangle BDG}=S_{\triangle CEF}$، $S_{\triangle FGH}$ را کم کنیم، داریم:

$S_{CEHG}=S_{BDHF}$

**۱۵۲- گزینهٔ ۴** می‌دانیم $OE=OF$، پس طول هر کدام می‌شود $\frac{x}{2}$.



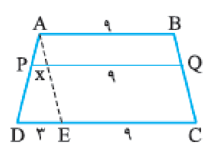

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ADC}: \frac{EO}{DC}=\frac{AO}{AC}\\ \overset{\triangle}{ABC}: \frac{OF}{AB}=\frac{OC}{AC}\end{array}\right\} \xrightarrow{+} \frac{EO}{DC}+\frac{OF}{AB}=\underbrace{\frac{AO}{AC}+\frac{OC}{AC}}_{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{2}}{b}+\frac{\frac{x}{2}}{a}=1 \xrightarrow{\times\frac{2}{x}} \frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{2}{x}$$

**۱۵۳- گزینهٔ ۲** اگر حافظهٔ خوبی داشته باشید، در درس‌نامه ثابت کردیم طول PQ می‌شود $kb+(1-k)a$ که در این سؤال $a=9$، $b=12$ و $k=\frac{1}{3}$، پس: $PQ=\frac{1}{3}\times12+(1-\frac{1}{3})\times9=10$

اگر هم فرمول یادتان نیست که شروع کنیم:

از A، پاره‌خط AE را موازی BC می‌کشیم، داریم:

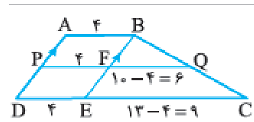



$$\frac{AP}{PD}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AP}{AD}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{تالس در } \overset{\triangle}{ADE}} \frac{AP}{AD}=\frac{x}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{x}{3} \Rightarrow x=1$$

$$\Rightarrow PQ=9+x=9+1=10$$

**۱۵۴- گزینهٔ ۲** **راه اول** یادمان باشد، کلید حل مسائل تالس در ذوزنقه، رسم خط موازی یک ساق از یک سر قاعدهٔ کوچک است.




مطابق شکل پاره‌خط BE را موازی AD رسم می‌کنیم، در مثلث BEC با استفاده از قضیهٔ تالس، داریم:

$$\frac{FQ}{EC}=\frac{BQ}{BC}\Rightarrow\frac{FQ}{EC-FQ}=\frac{BQ}{BC-BQ}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{9-6}=\frac{BQ}{QC}\Rightarrow\frac{BQ}{QC}=\frac{6}{3}=\frac{2}{1}\Rightarrow\frac{QC}{BQ}=\frac{1}{2}$$

**راه دوم** (مخصوص آن‌ها که حافظهٔ خوبی دارند!) اگر $\frac{BQ}{BC}=k$، آن‌گاه داریم:

$$PQ=k.CD+(1-k)AB \Rightarrow 10=12k+4(1-k)$$

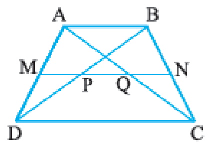
$$\Rightarrow 10=9k+4 \Rightarrow k=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{BQ}{BC}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BQ}{BC-BQ}=\frac{2}{3-2} \Rightarrow \frac{BQ}{CQ}=\frac{2}{1}$$

**۱۵۵- گزینهٔ ۳** وقتی دوتا سؤال پشت سر هم از فرمول $MN=kb+(1-k)a$ استفاده می‌کند؛ یعنی دیگر باید آن‌هایی هم که حافظهٔ خوبی ندارند، فرمول را حفظ کنند!

داریم $a=3$، $b=6$ و $k=\frac{1}{3}$، پس: $MN=\frac{1}{3}\times6+\frac{2}{3}\times3=4$

**۱۵۶- گزینهٔ ۴** همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم اگر M و N وسط‌های AD و BC باشند، آن‌گاه P و Q هم وسط‌های قطرها هستند و داریم: $PQ=\frac{CD-AB}{2}$




حالا اگر در نظر بگیریم $CD=3AB$، داریم $AB=\frac{CD}{3}$ و در نتیجه:

$$PQ=\frac{CD-\frac{CD}{3}}{2}=\frac{\frac{2CD}{3}}{2}=\frac{CD}{3}$$