

فصل اول:

شمارش

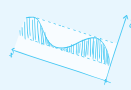




$$A = \pi r^2$$



$$f = \frac{1}{T}$$



مساحت



اصول شمارش

در این فصل می‌خواهیم عمل شمارش بدون انجام عمل شمردن را شرح دهیم. برای شمارش، دو اصل مهم زیر را باید یاد بگیریم:

۱. **اصل ضرب (اصل اساسی شمارش):** اگر کاری شامل چند مرحله باشد، تعداد راه‌های انجام کل آن کار برابر با حاصل ضرب تعداد راه‌های هر مرحله است.

۲. **فرض کنید برای صرف نهار وارد رستورانی شده‌اید. این رستوران ۴ نوع غذا، ۳ نوع نوشیدنی و ۲ نوع سالاد دارد. به چند طریق می‌توانید یک وعده نهار شامل غذا، نوشیدنی و سالاد انتخاب کنید؟**

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

از آن جا که شما غذا و نوشیدنی و سالاد میل می‌کنید، پس تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با:

توجه

«و» نشانه عمل ضرب است.

۲. **اصل جمع:** این اصل را با یک مثال بیان می‌کنیم (فقط به تفاوت این مثال و مثال قبلی در اصل ضرب، خوب دقت کنید).

۳. **فرض کنید برای صرف نهار وارد رستورانی شده‌اید. این رستوران ۲ نوع کباب، ۳ نوع پیتزا و ۴ نوع ساندویچ دارد. به چند طریق می‌توانید یک وعده نهار سفارش دهید؟**

$$2 + 3 + 4 = 9$$

از آن جا که شما کباب یا پیتزا یا ساندویچ میل می‌کنید، پس تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با:

توجه

«یا» نشانه عمل جمع است.

از اصول شمارش در موارد متعددی استفاده می‌شود، مثلاً برای مسائل عددنویسی (با استفاده از ارقام) یا کلمه‌نویسی (با استفاده از حروف).

۱- شخصی مسیر تهران به اصفهان را به ۳ طریق و مسیر اصفهان به شیراز را به ۲ طریق طی می‌کند. به چند طریق این شخص می‌تواند از تهران با گذر از اصفهان، به شیراز برود؟

$$20 (4)$$

$$8 (3)$$

$$12 (2)$$

$$6 (1)$$

۲- اگر شخصی مسیر تهران به اصفهان را به ۳ طریق و مسیر اصفهان به شیراز را به ۲ طریق بتواند برود و برگردد و بخواهد طوری این کار را انجام دهد که در مسیر برگشت، از راه‌هایی که رفته عبور نکند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

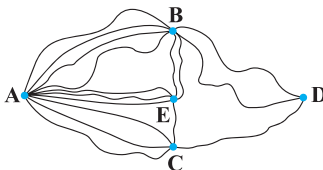
$$36 (4)$$

$$15 (3)$$

$$12 (2)$$

$$6 (1)$$

• شکل مقابل، راه‌های دسترسی به شهرهای مختلف است. (براین اساس به سؤالات ۳ و ۴ پاسخ دهید.)



۳- به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟

$$30 (2)$$

$$25 (1)$$

$$40 (4)$$

$$46 (3)$$

۴- به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد، به طوری که از شهر C عبور نکنیم؟

$$35 (4)$$

$$30 (3)$$

$$25 (2)$$

$$20 (1)$$

• یک کارخانه خودروسازی، خودروهایی در ۶ رنگ، ۳ حجم موتور، ۴ نوع مختلف داشبورد و ۲ مدل جعبه دنده تولید می‌کند. (به سؤالات ۵ و ۶ پاسخ دهید.)

۵- تعداد راه‌های انتخاب یک فرد برای خرید یک اتومبیل کدام است؟

$$288 (4)$$

$$144 (3)$$

$$72 (2)$$

$$15 (1)$$

۶- با اضافه کردن یک امکان به کدام مورد، انواع بیشتری از این اتومبیل می‌تواند تولید شود؟

۴ جعبه دنده

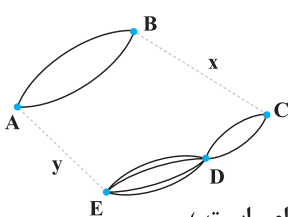
۳ داشبورد

۲ حجم موتور

۱ رنگ

۷- در شکل مقابل، تعداد راه‌ها از شهر B به C برابر x و تعداد راه‌ها از شهر A به E برابر y است. اگر بتوانیم

به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کنیم، مقدار $x - y$ کدام می‌تواند باشد؟ ($x, y \neq 0$) (مشابه تمرین کتاب درسی)



$$3 (2)$$

$$2 (1)$$

$$5 (4)$$

$$4 (3)$$

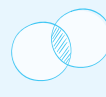
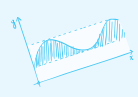
۸- به چند طریق می‌توان به یک آزمون دو گزینه‌ای که شامل ۲۰ سؤال است، پاسخ داد؟ (پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی است.)

$$2^{20} (4)$$

$$40 (3)$$

$$20^2 (2)$$

$$22 (1)$$



۹- عبارت $(a - b + c)(x - y)(z + t)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟

۶ (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴)

۱۰- در یک ساختمان ۶ طبقه وجود دارد که می‌خواهیم با ۴ رنگ، آن‌ها را رنگ‌آمیزی کنیم. به چند طریق می‌توان این ساختمان را با این ۴ رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد که هیچ دو طبقه مجاور هم‌رنگ نباشند؟

۴۰۹۶ (۱) ۳۰۷۲ (۲) ۱۵۳۶ (۳) ۹۷۲ (۴)

۱۱- با استفاده از حروف کلمه «مصباح» و بدون توجه به مفهوم آن، چند کلمه سه حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟

۳۲ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۶۰ (۴)

۱۲- در صفحه پشت یک دستگاه الکتریکی (مانند تلویزیون) سه درگاه وجود دارد. اگر ما سه فیش در اختیار داشته باشیم و امتحان کردن هر فیش ۱۵ ثانیه طول بکشد، حداکثر ظرف چند دقیقه همه فیش‌ها به درستی به درگاه مربوطه وصل می‌شوند؟

۱/۵ (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴)

● با اعداد ۱، ۴، ۹، ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به طوری که: (به سؤالات ۱۳ و ۱۴ پاسخ دهید.)

۱۳- تکرار ارقام مجاز باشد؟

۶۰ (۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴)

۱۴- تکرار ارقام مجاز نباشد؟

۶۰ (۱) ۲۴ (۲) ۱۲ (۳) ۳۲ (۴)

۱۵- با حروف کلمه «نیستان» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت که با حرف «ن» شروع و به حرف «ن» ختم شود؟ (تکرار حروف به جز حرف «ن» که در اول و آخر می‌آید، مجاز نیست.)

۲۴ (۱) ۶ (۲) ۴۸ (۳) ۳۶ (۴)

۱۶- چند عدد سه رقمی وجود دارد؟

۹۰۰ (۱) ۹۹۰ (۲) ۹۹۹ (۳) ۱۰۰۰ (۴)

(انسانی خارج ۸۸)

۱۷- چند عدد سه رقمی، با ارقام متمایز وجود دارد؟

۴۵۰ (۱) ۵۰۴ (۲) ۶۴۸ (۳) ۷۲۰ (۴)

۱۸- چند عدد دو رقمی بدون صفر وجود دارد؟

۹۰ (۱) ۱۰۰ (۲) ۸۱ (۳) ۹۸ (۴)

۱۹- چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که رقم دهگان آن، عددی اول باشد؟

۱۹۶ (۱) ۲۲۴ (۲) ۲۵۶ (۳) ۳۳۶ (۴)

(انسانی خارج ۹۱)

۲۰- چند عدد سه رقمی بخش پذیر بر ۵ و متشکل از رقم‌های فرد وجود دارد؟

۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴)

۲۱- می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آن‌ها یکی از حروف {الف، ب، ج، د} و در سمت چپ آن‌ها عدد دو رقمی بدون رقم صفر نوشته شود. چند کارت می‌توانیم بسازیم؟

۳۲۴ (۱) ۳۱۸ (۲) ۴۱۷ (۳) ۴۲۰ (۴)

(انسانی داخل ۸۸)

۲۲- چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج و غیرصفر است؟

۲۵۶ (۱) ۵۱۲ (۲) ۶۲۵ (۳) ۱۰۲۴ (۴)

۲۳- پلاک اتومبیل سواری سری «ب» در تهران به صورت

تهران	*** ب **
-------	----------

 است که هر ستاره نمایش یک رقم غیرصفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

(انسانی داخل ۸۲)

۱۱۶۶۴ (۱) ۱۴۵۸۰ (۲) ۱۵۴۸۰ (۳) ۱۸۲۲۵ (۴)

۲۴- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۴۰ (۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۲۵- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۴۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

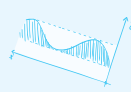
۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۴ (۳) ۷ (۴)



$$A = \pi r^2$$



$$y = 2x$$



عدد مضرب



● با اعداد ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ چند عدد سه رقمی می توان نوشت که: (به سؤالات ۲۶ تا ۲۹ پاسخ دهید.)

۲۶- عدد مضرب ۵ بوده و تکرار ارقام مجاز باشد؟

۳۰ (۱) ۳۶ (۲) ۶۰ (۳) ۷۲ (۴)

۲۷- عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز باشد؟

۷۵ (۱) ۹۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۰۰ (۴)

۲۸- عدد مضرب ۵ باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد؟

۳۶ (۱) ۶۰ (۲) ۵۶ (۳) ۳۲ (۴)

۲۹- عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد؟

۳۶ (۱) ۴۵ (۲) ۵۲ (۳) ۵۶ (۴)

۳۰- با ارقام ۸, ۵, ۳, ۰ چند کد تلفن چهار رقمی شهرستان می توان نوشت؟

۶ (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴)

۳۱- چند عدد ۴ رقمی وجود دارد که در آن ها رقم ۷ فقط دوبار به صورت متوالی آمده باشد؟

۲۰۵ (۱) ۲۱۵ (۲) ۲۲۵ (۳) ۲۳۵ (۴)

۳۲- با استفاده از ارقام ۵, ۴, ۶, ۰ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که در همه آن ها رقم ۶ به کار رفته باشد؟ (بدون تکرار ارقام)

۱۴ (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۸ (۴)

۳۳- با استفاده از ارقام ۵, ۶, ۷ و ۹ چند عدد حداکثر سه رقمی و بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۲۴ (۱) ۴۰ (۲) ۴۲ (۳) ۵۲ (۴)

فاکتوریل

تعریف فاکتوریل: فاکتوریل یک عدد طبیعی به معنی ضرب آن عدد در همه اعداد طبیعی قبل از خودش است. علامت فاکتوریل به صورت (!) می باشد.

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1$$

مثلاً: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

طبق قرارداد $0! = 1$ تعریف می شود.

نکته

نوشتن عوامل ضربی در عمل فاکتوریل را می توانیم هر جایی قطع کنیم، به شرط آن که در جلوی جمله آخر، علامت فاکتوریل را قرار دهیم.

$$(n+1)! = (n+1)n! \quad \text{یا} \quad n! = n(n-1)(n-2)!$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4! \quad \text{یا} \quad 7! = 7 \times 6 \times 5!$$

نکته فوق در ساده کردن کسرهای دارای فاکتوریل کاربرد زیادی دارد:

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

۳۴- حاصل $(8 \times 9 \times 10)$ با فاکتوریل کدام عدد طبیعی برابر است؟

۹ (۴) ۸ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱)

۳۵- ساده شده عبارت $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ کدام است؟

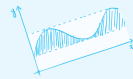
$n^2 + 5n + 6$ (۴) $n^2 + 5n - 6$ (۳) $n^2 + 3n - 2$ (۲) $n^2 + 3n + 2$ (۱)

۳۶- حاصل عبارت $\frac{n!(m-1)!}{(n-1)!m!}$ کدام است؟ ($m, n \in \mathbb{N}$)

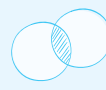
$\frac{n!}{m!}$ (۴) $\frac{n}{m}$ (۳) $\frac{n+1}{m+1}$ (۲) $\frac{m}{n}$ (۱)



ab max



$$f = \frac{1}{T}$$



$$A = \pi r^2$$



۳۷- اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ باشد، عدد طبیعی n کدام است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۳۸- اگر $n! = 120 \times 42$ باشد، آن گاه n کدام است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۳۹- چه تعداد از تساوی های زیر درست است؟

- الف) $5! + 3! = 2!$ ب) $\frac{10!}{5!} = 2!$ ج) تعریف نشده $\frac{2!}{0!} =$

- د) $\frac{9!}{6!} = 9 \times 8 \times 7$ ه) $(3!)^2 = 9!$

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۴۰- به ازای چند عدد صحیح، معادله $(x^2 - 4)! = 1$ برقرار است؟

- ۱ (۱) صفر ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

جایگشت

تعریف جایگشت: به هر یک از حالات قرارگیری اشیای متمایز در کنار یک دیگر، یک جایگشت می‌گوییم.

نکته

جایگشت n شیء متمایز برابر $n!$ است. برای مثال ۳ حرف a, d و y را در نظر بگیرید، کلماتی که با این حروف ساخته می‌شوند عبارتند از: day, dya, ady, ayd, yad, yda

ممکن است بعضی از کلمات معنی نداشته باشند که این موضوع در مسائل شمارش اهمیتی ندارد. مهم این است که با این حروف، چه تعداد کلمه متمایز ساخته می‌شود. با استفاده از نکته گفته شده، برای آن که همه حالت‌های ممکن را بنویسیم، چون ۳ شیء داریم، پس تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر است با:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

❓ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «PEDAR» کدام است؟

این کلمه، ۵ حرف (۵ شیء) متمایز دارد و تعداد جایگشت‌های آن برابر است با:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

❓ سه هم‌کلاسی به نام‌های «چیستا»، «آتنا» و «رایا» به چند طریق می‌توانند روی یک نیمکت بنشینند؟

تعداد حالت‌های کنار هم نشستن این ۳ نفر برابر است با:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

۴۱- حروف کلمه «SPORT» چند جایگشت ۵ حرفی دارد؟

- ۲۴ (۱) ۴۸ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۴۲- حروف کلمه «بوستان» را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

- ۱۲۰ (۱) ۲۴۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۴۸۰ (۴)

۴۳- با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، چند جایگشت سه رقمی فرد می‌توان نوشت؟

- ۲۴ (۱) ۴۸ (۲) ۶۰ (۳) ۹۶ (۴)

۴۴- با استفاده از حروف کلمه «بروجرد» چند جایگشت ۶ حرفی می‌توان نوشت که با حرف «ر» شروع شود؟

- ۴۰ (۱) ۶۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۴۵- تعداد جایگشت‌های پنج رقمی اعداد مضرب ۵ با استفاده از ارقام عدد ۴۵۷۸۵ کدام است؟

- ۱۲ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۸ (۴)

۴۶- با حروف کلمه «ارومیه»، چند کلمه چهار حرفی و با حروف متمایز می‌توان نوشت که با حرف «الف» شروع شود؟ (هم با معنی، هم بی معنی)

- ۳۰ (۱) ۶۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

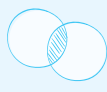
۴۷- تعداد جایگشت‌های چهار رقمی با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۹ که مضرب ۶ باشند کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

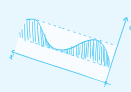
(مشابه انسانی دافل ۸۳)



$$A = \pi r^2$$



$$y = 2x$$



$$a^2 - b^2$$



۴۸- شش ورزشکار به همراه دو مربی خود به چند طریق می‌توانند در یک ردیف طوری بایستند که ابتدا و انتهای ردیف، مربی قرار داشته باشد؟

- (۱) ۴۸۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۹۶۰ (۴) ۱۴۴۰

۴۹- ۵ نفر به چند طریق می‌توانند روی ۱۰ صندلی طوری بنشینند که هیچ دو نفری کنار هم نباشند؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۴۰

۵۰- پنج دوست به نام‌های مهسا، میترا، مینا، مژگان و مهتاب در یک ردیف می‌ایستند. در چند حالت، مهسا بعد از مهتاب قرار می‌گیرد؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۸۰

جایگشت‌های یک در میان

در این نوع از جایگشت‌ها قرار است دو گروه از اشیاء یک در میان کنار هم قرار بگیرند. برای این کار دو حالت وجود دارد:

۱- تعداد اشیای دو گروه با هم برابر است.

۲- یکی از گروه‌ها یک شیء بیشتر از گروه دیگر دارد.

در هر دو صورت باید جایگشت اشیاء گروه اول را در جایگشت اشیاء گروه دوم ضرب کنیم. اما اگر حالت اول باشد (تعداد اشیاء دو گروه با هم برابر باشد)، جواب نهایی را در ۲ هم ضرب می‌کنیم.

❓ ارقام عدد ۴۷۳۵۸۶ چند جایگشت دارند به طوری که ارقام زوج یک در میان قرار گیرند؟

☐ ۳ رقم زوج و ۳ رقم فرد داریم، تعداد اشیاء دو دسته برابر است، پس:

$$\left. \begin{array}{l} 3! = \text{جایگشت ارقام زوج} \\ 3! = \text{جایگشت ارقام فرد} \end{array} \right\} \Rightarrow 3! \times 3! \times 2 = 6 \times 6 \times 2 = 72$$

❓ ارقام عدد ۴۷۳۵۸۶۱ چند جایگشت دارند به طوری که ارقام زوج، یک در میان قرار گیرند؟

☐ ۳ رقم زوج و ۴ رقم فرد داریم، چون تعداد اشیاء دو دسته برابر نیستند، پس:

$$\left. \begin{array}{l} 3! = \text{جایگشت ارقام زوج} \\ 4! = \text{جایگشت ارقام فرد} \end{array} \right\} \Rightarrow 3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$$

۵۱- ۴ نوع کتاب علمی متمایز و ۴ نوع کتاب ادبی متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف چید به طوری که کتاب‌های علمی یک در میان قرار گیرند؟

- (۱) ۵۷۶ (۲) ۸۶۴ (۳) ۱۱۵۲ (۴) ۱۷۲۸

(ریاضی فارغ ۱۹)

۵۲- با جابه‌جایی ارقام ۵۷۶۲۲۲، چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت به طوری که رقم‌های ۲، یک در میان قرار گیرند؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۵۳- ۵ افسر و ۴ سرباز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف طوری بایستند که هیچ دو افسری کنار هم نباشند؟

- (۱) ۱۴۴۰ (۲) ۲۸۸۰ (۳) ۳۷۲۰ (۴) ۴۶۸۰

۵۴- حروف کلمه «CANADA» را به چند طریق می‌توان بدون توجه به مفهوم آن، طوری کنار هم قرار داد که حروف A یک در میان قرار گیرند؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

جایگشت‌های کنار هم

● اعضای یک خانواده شامل پدر، مادر، ۳ دختر و ۲ پسر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف ایستاده و عکس یادگاری بگیرند به طوری که: (به سؤالات ۵۵ تا ۵۷ پاسخ دهید.)

۵۵- پدر و مادر کنار هم، دخترها هم کنار هم و پسرها نیز کنار هم باشند؟

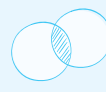
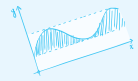
- (۱) ۷۲ (۲) ۱۴۴ (۳) ۲۸۸ (۴) ۵۱۲

۵۶- پدر و مادر کنار هم و دخترها نیز کنار هم باشند؟

- (۱) ۴۸۰ (۲) ۵۶۰ (۳) ۲۸۸ (۴) ۷۲۰

۵۷- پدر و مادر کنار هم باشند؟

- (۱) ۱۰۴۰ (۲) ۱۲۸۰ (۳) ۱۴۴۰ (۴) ۱۶۸۰



- ۳ کتاب زرد متمایز و ۲ کتاب قرمز متمایز به چند طریق کنار هم قرار می‌گیرند به طوری که: (به سؤالات ۵۸ تا ۶۰ پاسخ دهید).
- ۵۸- کتاب‌های هم‌رنگ کنار هم باشند؟

۶ (۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴)

- ۵۹- کتاب‌های زرد کنار هم باشند؟

۲۴ (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۵۶ (۴)

- ۶۰- کتاب‌های قرمز کنار هم باشند؟

۴۸ (۱) ۳۴ (۲) ۳۲ (۳) ۲۸ (۴)

- ۶۱- با حروف کلمه «گلدان» چند جایگشت می‌توان ساخت به طوری که کلمه «گل» همه جا به همین صورت بیاید؟

۱۸ (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۵۲ (۴)

(انسانی رافل ۸۴)

- ۶۲- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «DAMDARAN» به شرط آن که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟

۱۲۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

- ۶۳- در چند جایگشت از حروف کلمه «روزنامه»، کلمه «روز» دیده شده و حروف کلمه «نامه» کنار هم هستند؟

۱۸ (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۶۴ (۴)

- حروف کلمه «ملینا» به چند طریق می‌توانند کنار هم قرار بگیرند به طوری که: (به سؤالات ۶۴ و ۶۵ پاسخ دهید).

- ۶۴- حروف «ل» و «ن» کنار یکدیگر باشند؟

۱۲ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴)

- ۶۵- حرف «ل» بلافاصله بعد از حرف «ن» بیاید؟

۱۲ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۴۸ (۴)

اصل متمم

فرض کنید برگه یک دانش‌آموز در درس زبان که از ۱۰۰ نمره است را تصحیح می‌کنیم. اگر این دانش‌آموز فقط ۱/۵ نمره غلط داشته باشد، به جای آنکه نمرات را با هم جمع کنیم می‌توانیم بگوییم نمره وی برابر ۱۰۰ - ۱/۵ یعنی ۹۸/۵ است. اصل متمم یعنی اینکه وقتی تعداد حالات مطلوب زیاد است، بهتر آن است که به جای شمارش مستقیم حالات مطلوب، تعداد حالات نامطلوب را از تعداد کل حالات کم کنیم.

- ❓ با ارقام ۳، ۴، ۶، ۸، ۹ اعداد چهار رقمی ساخته ایم. در چه تعداد از آن‌ها حتماً رقم تکراری وجود دارد؟

۴۰۵ (۱) ۴۹۵ (۲) ۵۰۵ (۳) ۵۹۵ (۴)

☰ گزینه «۳»: تعداد حالاتی که در آن‌ها رقم تکراری وجود دارد بسیار زیاد و شمارش آن‌ها سخت است، بنابراین بهتر آن است که از اصل متمم استفاده کنیم:

اعداد چهار رقمی بدون رقم تکراری - تعداد کل ارقام چهار رقمی = تعداد اعداد چهار رقمی دارای رقم تکراری

$$۶۲۵ = ۵^4 = ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = \text{تعداد کل ارقام چهار رقمی}$$

$$۱۲۰ = ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = \text{تعداد اعداد چهار رقمی بدون رقم تکراری}$$

$$۵۰۵ = ۶۲۵ - ۱۲۰ = \text{تعداد اعداد چهار رقمی دارای رقم تکراری}$$

بنابراین داریم:

- ۶۶- با ارقام ۳، ۴، ۵، ۷، ۸، ۹ اعداد سه رقمی می‌سازیم. در چند حالت، حداقل دو رقم یکسان هستند؟

۸۰ (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۸۰ (۴)

- ۶۷- در چند عدد سه رقمی، حداقل یکی از ارقام ۸ یا ۹ دیده می‌شود؟

۴۳۸ (۱) ۴۵۲ (۲) ۴۸۴ (۳) ۴۹۶ (۴)

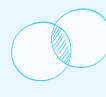
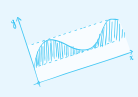
- ۶۸- در چه تعداد از اعداد سه رقمی ساخته شده با ارقام عدد ۵۸۴۹۲، حتماً رقم تکراری وجود دارد؟

۵۰ (۱) ۵۵ (۲) ۶۰ (۳) ۶۵ (۴)

(انسانی رافل ۹۷)

- ۶۹- با حروف کلمه «DANESH»، چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف S در هر رمز باشد؟

۲۴۰ (۱) ۲۵۰ (۲) ۲۶۰ (۳) ۲۷۰ (۴)



پاسخنامه تشریحی

$$\text{تهران} \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xleftarrow{2} \end{array} \text{اصفهان} \begin{array}{c} \xrightarrow{2} \\ \xleftarrow{3} \end{array} \text{شیراز} \Rightarrow 3 \times 2 = 6$$

۱۱ تعداد راه‌هایی که شخص می‌تواند طی کند برابر است با:

۲۲ در این مسأله، منظور از این که در برگشت، از راه‌هایی که رفته، عبور نکند، این است که در برگشت، تکرار راه مجاز نمی‌باشد. بنابراین:

$$\text{تهران} \begin{array}{c} \xrightarrow{3} \\ \xleftarrow{2} \end{array} \text{اصفهان} \begin{array}{c} \xrightarrow{2} \\ \xleftarrow{3} \end{array} \text{شیراز} \Rightarrow 3 \times 2 = 6 \Rightarrow \text{تعداد راه‌های ممکن برای رفتن از تهران به شیراز}$$

$$\text{شیراز} \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{2} \end{array} \text{اصفهان} \begin{array}{c} \xrightarrow{2} \\ \xleftarrow{3} \end{array} \text{تهران} \Rightarrow 1 \times 2 = 2 \Rightarrow \text{تعداد راه‌های ممکن برای برگشت از شیراز به تهران}$$

در واقع این شخص باید ۴ کار را انجام دهد: رفتن از تهران به اصفهان که به ۳ طریق ممکن است و رفتن از اصفهان به شیراز که به ۲ طریق ممکن است و برگشتن از شیراز به اصفهان که به ۱ طریق ممکن است (چون تکرار راه مجاز نیست). در نهایت بنابراین ضرب، تمام این طرق در هم ضرب می‌شوند. یعنی:

$$1) A \rightarrow B \rightarrow D \xRightarrow{\text{تعداد راه‌ها}} 4 \times 2 = 8$$

یا

$$2) A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \Rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12$$

یا

$$3) A \rightarrow C \rightarrow D \Rightarrow 3 \times 1 = 3$$

یا

$$4) A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \Rightarrow 3 \times 1 \times 2 \times 2 = 12$$

یا

$$5) A \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \Rightarrow 3 \times 1 \times 1 = 3$$

یا

$$6) A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \Rightarrow 4 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$$

$$8 + 12 + 3 + 12 + 3 + 8 = 46$$

طبق اصل جمع، تعداد کل حالات برابر است با:

۴۱ می‌خواهیم در سفر از شهر A به D، از شهر C عبور نکنیم، پس با توجه به پاسخ سؤال قبل، حالات ۳، ۴، ۵ و ۶ حذف می‌شود یعنی مسیر (۱) یا

$$8 + 12 = 20$$

مسیر (۲) که تعداد کل حالات برابر است با:

$$6 \times 3 \times 4 \times 2 = 144$$

۵۳ طبق اصل ضرب، تعداد راه‌های هر مرحله در هم ضرب می‌شوند:

۶۴ بررسی گزینه‌ها:

$$7 \times 3 \times 4 \times 2 = 168$$

گزینه «۱»: یک حالت به تعداد حالت‌های رنگ اضافه می‌شود:

$$6 \times 4 \times 4 \times 2 = 192$$

گزینه «۲»: یک حالت به تعداد حالت‌های حجم موتور اضافه می‌شود:

$$6 \times 3 \times 5 \times 2 = 180$$

گزینه «۳»: یک حالت به تعداد حالت‌های داشبورد اضافه می‌شود:

$$6 \times 3 \times 4 \times 3 = 216$$

گزینه «۴»: یک حالت به تعداد حالت‌های جعبه دنده اضافه می‌شود:

پس مشاهده می‌شود با اضافه شدن یک حالت به تعداد حالت‌های جعبه دنده، انواع بیشتری از این اتومبیل تولید می‌شود.

۷۲ تعداد راه‌ها از B به C برابر x و از A به E برابر y است. مسیری که می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد، به صورت زیر است:

$$1) \text{ مسیر } A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \Rightarrow 2 \times x \times 2 = 4x$$

$$2) \text{ مسیر } A \rightarrow E \rightarrow D \Rightarrow y \times 4 = 4y$$

طبق فرض مسئله، تعداد حالاتی که می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد برابر ۲۰ است.

بنابراین $4x + 4y = 20$ خواهد بود:

$$4x + 4y = 20 \xRightarrow{\text{فکتور از 4}} 4(x + y) = 20 \xRightarrow{\text{تقسیم طرفین بر 4}} x + y = 5$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

یعنی مجموع دو عدد x و y برابر ۵ است که می‌تواند حالت‌های زیر باشد:

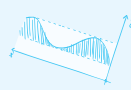
حاصل $x - y$ می‌تواند اعداد -۱ ، ۳ ، -۳ یا ۱ باشد.



$$A = \pi r^2$$



$$y = x^2$$



مسئله



۸ ۴ پاسخ دادن به این ۲۰ سؤال شامل ۲۰ تصمیم‌گیری است که هر تصمیم‌گیری به ۲ طریق انجام می‌شود. بنابراین جواب دادن به سؤال ۱، دو حالت دارد و جواب دادن به سؤال ۲، دو حالت دارد و ... و جواب دادن به سؤال ۲۰ نیز دو حالت دارد، که بنابر اصل ضرب، تعداد حالت‌های آن‌ها در هم ضرب می‌شود. یعنی:

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{20 \text{ بار}} = 2^{20}$$

فب یه سؤال پیش می‌اد. منظور سؤال از این‌که «پاسخ دادن به همه سؤالات الزامی است.» هیه؟

جواب این‌که اگر پاسخ دادن به سؤالات الزامی نباشه، ما برای هر سؤال، ۳ راه انتخاب داریم. یعنی مثلاً برای پاسخ دادن به سؤال اول می‌تونیم گزینه «الف» یا گزینه «ب» رو انتخاب کنیم، یا می‌تونیم اصلاً پاسخ ندریم. پس تعداد راه‌های ممکن برای جواب دادن برابر خواهد بود با:

$$\underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{20 \text{ بار}} = 3^{20}$$

۹ ۲ طبق اصل ضرب، تعداد جملات ایجاد شده برابر است با:

$$\underbrace{(a-b+c)}_3 \underbrace{(x-y)}_2 \underbrace{(z+t)}_2 = 12$$

۱۰ ۴ طبقه اول ساختمان را به ۴ طریق می‌توان رنگ کرد اما چون قرار است رنگ هر طبقه با رنگ طبقه قبلی یکسان نباشد، لذا طبقه‌های بعدی هر کدام ۳ حالت برای رنگ‌آمیزی خواهند داشت. مثلاً فرض کنید طبقه اول سبز رنگ باشد، طبقه دوم سفید، طبقه سوم می‌تواند مجدداً سبز باشد و طبقه چهارم می‌تواند مجدداً سفید باشد و ... یعنی همواره در هر طبقه (به جز طبقه اول) یکی از رنگ‌ها را دیگر نمی‌توان استفاده کرد. بنابراین:

$$4 \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{طبقه دیگر}} = 4 \times 3^5 = 4 \times 243 = 972$$

طبقه اول

۱۱ ۴ کلمه «مصباح» دارای پنج حرف «م، ص، ب، ا، ح» است:

$$\boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 60$$

همه حروف به جز دو حرف
همه حروف به جز حرف
به کار رفته در جایگاه‌های قبل
به کار رفته در جایگاه قبل

۱۲ ۱

$$\begin{matrix} \text{درگاه ۱} & \text{درگاه ۲} & \text{درگاه ۳} \\ \boxed{3} & \times & \boxed{2} \times \boxed{1} \end{matrix} = 6$$

به شش حالت می‌توان این ۳ فیش را به درگاه مربوطه متصل کرد و اگر امتحان کردن هر فیش ۱۵ ثانیه طول بکشد، $90 = 6 \times 15$ یا $1/5 = 90$ ثانیه یا 90 دقیقه طول می‌کشد تا تمام ۶ حالت را امتحان کنیم.

۱۳ ۳ چون عدد خواسته شده سه رقمی است، سه خانه (جایگاه) می‌کشیم و چون چهار عدد داریم و تکرار ارقام نیز مجاز است، هر خانه به ۴ طریق می‌تواند پر شود که بنابر اصل ضرب، تعداد حالات آن‌ها در هم ضرب می‌شود. یعنی:

$$\boxed{4} \times \boxed{4} \times \boxed{4} \Rightarrow 4 \times 4 \times 4 = 64$$

طریق طریق طریق

۱۴ ۲ چون عدد خواسته شده سه رقمی است، سه خانه می‌کشیم و چون چهار عدد داریم، خانه سمت چپ (صدگان) به ۴ طریق پر می‌شود. اما چون تکرار ارقام مجاز نیست، خانه وسط (دهگان) به ۳ طریق و خانه سمت راست (یکان) نیز به ۲ طریق پر می‌شود. یعنی:

$$\boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \Rightarrow 4 \times 3 \times 2 = 24$$

طریق طریق طریق

۱۵ ۱ ۵ خانه برای کلمه ۵ حرفی می‌کشیم. کلمه «نیستان» ۶ حرف دارد و خانه‌های سمت چپ و راست هر کدام فقط به یک طریق و آن هم با حرف «ن» پر می‌شوند و چون تکرار مجاز نیست، خانه‌های دیگر به ۴ طریق، ۳ طریق و ۲ طریق پر می‌شوند:

$$\boxed{1} \times \boxed{4} \times \boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{1} \Rightarrow 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

ن ن

۱۶ ۱ تمامی اعداد سه رقمی با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۲، ...، ۹ (یعنی ۱۰ رقم) ساخته می‌شوند:

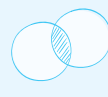
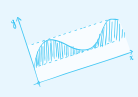
$$\boxed{9} \times \boxed{10} \times \boxed{10} = 900$$

همه ارقام به جز صفر
همه ارقام به جز صفر
همه ارقام به جز صفر

دقت کنید که در اینجا تکرار ارقام مجاز است. زیرا مسأله اشاره‌ای به این موضوع (تکرار ارقام) نکرده است و منظور سؤال، این است که چند عدد سه رقمی وجود دارد.

۱۷ ۳ برای ساختن اعداد سه رقمی با ارقام متمایز، باید از ارقام ۰ تا ۹ (بدون تکرار ارقام) استفاده کنیم:

$$\begin{matrix} \text{همه ارقام به جز صدگان} & \text{همه ارقام به جز صدگان و دهگان} & \text{همه ارقام به جز صدگان و دهگان و یکان} \\ \boxed{9} & \times & \boxed{8} \times \boxed{7} \\ \text{صدگان} & & \text{دهگان} & & \text{یکان} \end{matrix} \Rightarrow 9 \times 8 \times 7 = 504$$



۱۸ توجه کنید که این مسأله با سایر مسائلی که تاکنون حل کرده ایم، دو فرق دارد. اول این که ارقامی که به وسیله آن ها می خواهیم اعداد دو رقمی بدون صفر را بنویسیم، مشخص نیست و دوم این که مشخص نشده است که تکرار ارقام مجاز است یا خیر. اگر در مسأله ای اعداد مشخص نباشند، اعداد را از صفر تا ۹ در نظر می گیریم. حال برای حل این مسأله دو خانه در نظر می گیریم. در خانه سمت چپ عدد ۹ می گذاریم چون به ۹ حالت پرمی شود (یعنی اعداد ۱ تا ۹، چون صفر نمی تواند در آن قرار بگیرد) و در خانه سمت راست نیز ۹ می گذاریم (چون صفر مجاز نیست در آن قرار بگیرد)، پس:

$$\boxed{9} \boxed{9} \Rightarrow 9 \times 9 = 81$$

طریق طریق

بعضی از بچه ها این سؤال را این طوری حل می کنند که به جای ۹×۹ می نویسند ۸×۸ که غلط پاسخ، اشتباه و فکر می کنند که صفر تا ۹، نه تا عدد و آنگاه صفر نباشد، ۸ تا عدد می شه، در حالی که صفر تا ۹، ده تا عدد و آنگاه صفر نباشد، ۹ تا عدد می شه.

۱۹ چون عدد مورد نظر، سه رقمی است، سه خانه می کشیم و چون در این مسأله، اعداد مشخص نشده اند، آن ها را از صفر تا ۹ در نظر می گیریم. حال چون در خانه دهگان باید عددی اول قرار بگیرد، این خانه به چهار طریق پرمی شود (یعنی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶) و چون تکرار مجاز نیست و اعداد نمی توانند با صفر شروع شوند، خانه سمت چپ به ۸ طریق پرمی شود. چون صفر می تواند در خانه سمت راست قرار بگیرد، پس خانه سمت راست نیز به ۸ طریق پرمی شود (چون صفر تا ۹، ده عدد می باشند و خانه های سمت چپ و وسط هر کدام یک عدد را گرفته اند، بنابراین برای خانه سمت راست ۸ انتخاب می ماند). یعنی:

$$\boxed{8} \boxed{4} \boxed{8} \Rightarrow 8 \times 4 \times 8 = 256$$

طریق طریق طریق

۲۰ چون قرار است اعداد متشکل از ارقام فرد باشند، بنابراین باید از ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ استفاده کنیم. برای جایگاه یکان فقط می توانیم عدد ۵ را قرار دهیم، چون اعداد حاصل باید بر ۵ بخش پذیر باشند و می دانیم تنها اعدادی بر ۵ بخش پذیرند که رقم یکان آن ها صفر یا ۵ باشد. برای بقیه خانه ها شرط خاصی نداریم، پس هر کدام به ۵ حالت (همه ارقام موجود) پرمی شوند. در نتیجه داریم:

$$\boxed{5} \boxed{5} \boxed{1} \Rightarrow 5 \times 5 \times 1 = 25$$

یکان فقط ۵

۲۱ برای حل این تست باید سه خانه بکشیم (دو خانه برای عدد دو رقمی بدون رقم صفر و یک خانه برای حروف). دو خانه وسط و سمت چپ برای اعداد دو رقمی بدون رقم صفر است که هر کدام به ۹ طریق پرمی شوند و خانه سمت راست برای حروف است که به چهار طریق پرمی شود. بنابراین:

$$\boxed{9} \boxed{9} \boxed{4} \Rightarrow 9 \times 9 \times 4 = 324$$

یکی از ۴ حرف

تعداد اعداد دو رقمی بدون رقم صفر

۲۲ می خواهیم اعداد ۵ رقمی بسازیم، ۵ جایگاه (خانه) برای هر رقم در نظر می گیریم و چون باید از ارقام زوج و غیر صفر ۲، ۴، ۶ و ۸ استفاده کنیم، برای هر خانه ۴ حالت وجود دارد، پس تعداد اعداد ۵ رقمی که می توان با این ارقام ساخت، به صورت زیر به دست می آید:

$$\boxed{4} \boxed{4} \boxed{4} \boxed{4} \boxed{4} \Rightarrow 4^5 = 1024$$

یکان دهگان صدگان یکان هزار دهگان هزار

ممکنه براتون سؤال پیش بیاد که چرا ارقام رو تکراری گرفتیم، اینکه چون فقط گفته اعداد ۵ رقمی بسازیم و شرطی واسه تکراری نبودن ارقامش نذاشته (در ضمن نمی توئیم با ۴ رقم متمایز، اعداد ۵ رقمی با ارقام غیر تکراری بسازیم).

۲۳ ۵ ستاره داریم و به جای هر ستاره، یک رقم غیر صفر قرار می گیرد. چون می خواهیم پلاک با رقم فرد شروع و با رقم زوج پایان یابد، به جای ستاره سمت چپ، پنج عدد فرد را می توان قرار داد (اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹) و به جای ستاره سمت راست، چهار عدد زوج می توان قرار داد (اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸) و به جای بقیه ستاره ها، ۹ عدد (از ۱ تا ۹) می توان قرار داد (چون تکرار ارقام مجاز است) که در این صورت، تعداد کل حالات به صورت زیر است:

$$\boxed{9,7,5,3,1} \boxed{8,6,4,2} \Rightarrow 5 \times 9 \times 9 \times 9 \times 4 = 14580$$

طریق طریق طریق طریق طریق

۲۴ چون می خواهیم یک عدد سه رقمی بسازیم، سه خانه در نظر می گیریم. حال چون عدد مورد نظر بزرگ تر از ۳۰۰ است، در خانه سمت چپ که خانه صدگان می باشد باید اعدادی انتخاب کنیم که ۳ یا بزرگ تر از ۳ باشند، بنابراین خانه سمت چپ به سه حالت پرمی شود (اعداد ۳، ۴ و ۵) و چون تکرار مجاز نیست، خانه های بعدی به پنج حالت و چهار حالت پرمی شوند. یعنی:

$$\boxed{3} \boxed{5} \boxed{4} \Rightarrow 3 \times 5 \times 4 = 60$$

طریق طریق طریق

۲۵ چون می خواهیم یک عدد سه رقمی بسازیم، سه خانه در نظر می گیریم. حال چون عدد مورد نظر کوچک تر از ۴۰۰ است، در خانه سمت چپ که خانه صدگان می باشد باید اعدادی انتخاب کنیم که از ۴ کم تر باشد و صفر هم نباشد (چون اعداد با صفر شروع نمی شوند). بنابراین خانه سمت چپ به یک حالت که آن هم عدد ۲ است پرمی شود و چون تکرار مجاز نیست، خانه های بعدی به چهار حالت و سه حالت پرمی شوند. یعنی:

$$\boxed{1} \boxed{4} \boxed{3} \Rightarrow 1 \times 4 \times 3 = 12$$

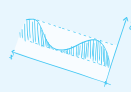
طریق طریق طریق



$$A = \pi r^2$$



$$y = 2x$$



عدد اعشاری



۲۶ ۳

نکته: اگر جایگشت مطلوب دارای شرط خاصی در یکی (یا چندتا) از جایگاه‌ها باشد، شمردن را از همان جایگاه شروع می‌کنیم و در صورت لزوم از اصل جمع برای محاسبه جایگشت مطلوب استفاده می‌کنیم. به طور مثال وقتی در مسأله‌ای تعداد اعداد زوج را بخواهد، ابتدا تعداد حالت‌های مطلوب برای یکان را محاسبه می‌کنیم، یا اگر در جایگشت‌های یک کلمه، ذکر شود که حروف خاصی در جای به خصوصی قرار دارند، چون جایگاه آن حروف معلوم است (ولذا جایگشتی ندارد)، ابتدا برای هر یک از آن‌ها یک حالت در نظر می‌گیریم، سپس جایگشت بقیه حروف را شمارش می‌کنیم.

می‌دانیم اعدادی مضرب ۵ می‌باشند که رقم سمت راست آن‌ها صفر یا ۵ باشد. بنابراین خانه سمت راست به دو طریق یعنی با صفر یا ۵ پر می‌شود و چون تکرار ارقام مجاز است، خانه وسط به ۶ طریق پر می‌شود، اما خانه سمت چپ به ۵ طریق پر می‌شود، چون صفر نمی‌تواند در آن قرار بگیرد (اعداد با صفر شروع نمی‌شوند). بنابراین:

$$\boxed{5} \boxed{6} \boxed{2} \Rightarrow 5 \times 6 \times 2 = 60$$

طریق طریق طریق

۲۷ ۲ چون شرط زوج بودن خواسته شده است، پس خانه سمت راست (رقم یکان) فقط با یکی از اعداد صفر یا ۲ یا ۴ می‌تواند پر می‌شود که سه حالت دارد و چون تکرار مجاز است، خانه وسط به ۶ طریق پر می‌شود. اما خانه سمت چپ به ۵ طریق پر می‌شود، چون صفر نمی‌تواند در آن قرار بگیرد (اعداد با صفر شروع نمی‌شوند) بنابراین:

$$\boxed{5} \boxed{6} \boxed{3} \Rightarrow 5 \times 6 \times 3 = 90$$

طریق طریق طریق

۲۸ ۱ می‌دانیم اعدادی مضرب ۵ می‌باشند که رقم سمت راست آن‌ها صفر یا ۵ باشد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، باید دو حالت زیر را جداگانه بررسی کنیم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد: در این حالت خانه سمت راست (یکان) فقط می‌تواند صفر باشد که به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانه سمت چپ (صدگان) به ۵ طریق (غیر صفر) و خانه وسط (دهگان) به ۴ طریق (غیر از صفر و صدگان) پر می‌شود. یعنی:

$$\boxed{5} \boxed{4} \boxed{1} \Rightarrow 5 \times 4 \times 1 = 20$$

طریق طریق طریق

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد: در این حالت خانه سمت راست (یکان) فقط می‌تواند ۵ باشد که به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانه سمت چپ (صدگان) به ۴ حالت پر می‌شود (چون ۵ و صفر نمی‌توانند در این خانه قرار بگیرند) و خانه وسط به ۴ طریق می‌تواند پر شود (چون از ۶ عدد داده شده دو عدد در خانه سمت چپ و راست قرار گرفته است). بنابراین:

$$\boxed{4} \boxed{4} \boxed{1} \Rightarrow 4 \times 4 \times 1 = 16$$

طریق طریق طریق

حال بنابر اصل جمع، تعداد حالت‌های اول و دوم را با هم جمع می‌کنیم تا تعداد اعداد مورد نظر به دست آید، یعنی:

$$20 + 16 = 36$$

۲۹ ۳ می‌دانیم اعدادی زوج هستند که رقم سمت راست آن‌ها عدد زوج باشد (در اینجا صفر، ۲ و ۴) و چون تکرار ارقام مجاز نمی‌باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد: در این حالت خانه سمت راست (یکان) فقط می‌تواند صفر باشد که به یک حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانه سمت چپ (صدگان) به ۵ طریق و خانه وسط (دهگان) به ۴ طریق پر می‌شود. یعنی:

$$\boxed{5} \boxed{4} \boxed{1} \Rightarrow 5 \times 4 \times 1 = 20$$

طریق طریق طریق

حالت دوم: رقم یکان ۲ یا ۴ باشد: در این حالت خانه سمت راست (یکان) فقط ۲ یا ۴ می‌تواند باشد که به دو حالت پر می‌شود و چون تکرار مجاز نیست، خانه سمت چپ (صدگان) به ۴ طریق پر می‌شود (چون صفر و عدد جایگزین در خانه سمت راست (یکان) نمی‌تواند در آن قرار بگیرد) و خانه وسط (دهگان) به ۴ طریق پر می‌شود (چون از ۶ عدد داده شده، دو عدد در خانه‌های سمت چپ و راست قرار گرفته است). بنابراین:

$$\boxed{4} \boxed{4} \boxed{2} \Rightarrow 4 \times 4 \times 2 = 32$$

طریق طریق طریق

حالا بنابر اصل جمع، تعداد حالت‌های اول و دوم را با هم جمع می‌کنیم تا تعداد اعداد مورد نظر به دست آید، یعنی:

$$20 + 32 = 52$$

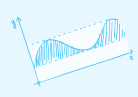
۳۰ ۴ می‌دانیم که کد تلفن شهرستان‌ها با عدد صفر شروع می‌شود، بنابراین خانه اول فقط به یک طریق آن هم با عدد صفر پر می‌شود. اما چون کد تلفن شهرستان‌ها فقط یک صفر در ابتدا دارد، خانه دوم از سمت چپ نباید صفر باشد، پس به ۳ طریق پر می‌شود ولی خانه‌های بعدی می‌توانند صفر داشته باشند که هر کدام به ۴ طریق پر می‌شوند. یعنی:

$$\boxed{1} \boxed{3} \boxed{4} \boxed{4} \Rightarrow 1 \times 3 \times 4 \times 4 = 48$$

طریق طریق طریق طریق

سوالی که پیش می‌آید این است که از کجا فهمیدیم تکرار ارقام مجاز؟

پاسخ این‌که: در شماره‌های تلفن تکرار ارقام مجاز است. اگر به شماره تلفن منزل خودتون یا دوستاتون توجه کنید، احتمالاً رقم تکراری داره.



□□۷۷ یا □۷۷□ یا ۷۷□□

حالت هایی که در یک عدد چهار رقمی، رقم ۷، دو رقم متوالی باشد، به صورت زیر می باشد:

$$\left. \begin{array}{l} \text{حالت اول: } ۷۷□□ \Rightarrow ۱ \times ۱ \times ۹ \times ۹ = ۸۱ \\ \text{همه ارقام به جز ۷} \quad \text{همه ارقام به جز ۷} \\ \text{حالت دوم: } □۷۷□ \Rightarrow ۸ \times ۱ \times ۱ \times ۹ = ۷۲ \\ \text{همه ارقام به جز ۷} \quad \text{همه ارقام به جز ۷} \\ \text{حالت سوم: } □□۷۷ \Rightarrow ۸ \times ۹ \times ۱ \times ۱ = ۷۲ \\ \text{همه ارقام به جز ۷} \quad \text{همه ارقام به جز ۷} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} ۸۱ + ۷۲ + ۷۲ = ۲۲۵$$

حالت های مختلفی که رقم ۶ می تواند در یک عدد سه رقمی به کار رود، به صورت زیر می باشد:

$$\left. \begin{array}{l} ۱ \times ۳ \times ۲ = ۶ \\ \text{دو رقم باقی مانده سه رقم باقی مانده فقط رقم ۶} \\ ۲ \times ۱ \times ۲ = ۴ \\ \text{دو رقم باقی مانده فقط رقم ۶ ارقام ۴ یا ۵ (صفر قرار نمی گیرد)} \\ ۲ \times ۲ \times ۱ = ۴ \\ \text{فقط رقم ۶ دو رقم باقی مانده ارقام ۴ یا ۵} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} ۶ + ۴ + ۴ = ۱۴$$

قرار است اعداد ساخته شده حداکثر سه رقمی باشند، یعنی باید سه رقمی یا دو رقمی یا یک رقمی باشند.

$$\left. \begin{array}{l} ۴ = \text{تعداد اعداد یک رقمی} \\ ۴ \times ۳ = ۱۲ = \text{تعداد اعداد دو رقمی} \\ ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴ = \text{تعداد اعداد سه رقمی} \end{array} \right\} \Rightarrow ۴ + ۱۲ + ۲۴ = ۴۰$$

۱ ۳۴ می دانیم که حاصل $۷۲۰ = ۸ \times ۹ \times ۱۰$ می شود. از طرفی $۷۲۰ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶$ است، بنابراین گزینه «۱» صحیح می باشد.

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2) = n^2 + 5n + 6$$

$$\frac{n!(m-1)!}{(n-1)!m!} = \frac{n(n-1)! \times (m-1)!}{(n-1)! \times m(m-1)!} = \frac{n}{m}$$

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1) \times n \times (n-1)!} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n)} = \frac{1}{6} \Rightarrow n(n+1) = 6$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow (n+3)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -3 \\ n = 2 \end{cases}$$

روش دوم: به جای حل معادله درجه دوم $n(n+1) = 6$ ، می توان گفت $(n+1)$ و n دو عدد متوالی (پشت سر هم) می باشند. پس می توان عدد ۶ را هم به صورت ضرب دو عدد متوالی، یعنی ۳×۲ نوشت:

$$(n+1)(n) = ۳ \times ۲ \Rightarrow n = ۲$$

یه دانش آموز سؤال می کنه که: بیفشید! من معادله رو به صورت مقابل حل کردم:

$$n^2 + n = 6 \Rightarrow n(n+1) = 6 \Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n+1 = 6 \Rightarrow n = 5 \end{cases}$$

پاسخی که می شه دار اینه که اگر ضرب دو یا چند عبارت برابر صفر باشه، تک تک عبارت ها رو می شه مساوی صفر قرار دار. مثلاً آله $n(n+1) = 0$ باشه، اون وقت $n = 0$ یا $n+1 = 0$ اما آله ضرب چند عبارت برابر با یک عدد غیر صفر باشه، حق نداریم تک تک عبارت ها رو برابر با همون عدد قرار بدیم.

۲ ۳۸ دو عدد ۱۲۰ و ۴۲ را به صورت حاصل ضرب اعداد طبیعی یک رقمی می نویسیم، یعنی $۱۲۰ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵$ و $۴۲ = ۶ \times ۷$. بنابراین:

$$n! = ۱۲۰ \times ۴۲ = \underbrace{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵}_{۱۲۰} \times \underbrace{۶ \times ۷}_{۴۲} = ۷! \Rightarrow n = ۷$$

$$\text{الف) } ۲! + ۳! = (۲ \times ۱) + (۳ \times ۲ \times ۱) = ۲ + ۶ = ۸ \Rightarrow ۸ \neq ۵! \times$$

$$\text{ب) } \frac{۱۰!}{۵!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۵!} = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \neq ۲! \times$$

$$\text{ج) } \frac{۲!}{۰!} = \frac{۲!}{۱} = ۲! = ۲ \times$$

$$\text{د) } \frac{۹!}{۶!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶!} = ۹ \times ۸ \times ۷ \checkmark$$

$$\text{ه) } (۳!)^۲ = (۳ \times ۲ \times ۱)^۲ = (۶)^۲ = ۳۶ \neq ۹! \times$$

پس فقط یکی از تساوی ها صحیح است.

فصل سوم: آمار





آمار: به مطالعه نحوه جمع‌آوری، سازماندهی و تحلیل و تفسیر داده‌ها جهت ارائه اطلاعات، آمار گفته می‌شود. به عبارت دیگر، یک آماردان می‌تواند براساس مجموعه اطلاعات عددی و بر مبنای مدل‌های ریاضی، نحوه رفتار یک فرآیند را پیش‌بینی کند. علم آمار در قلمروهای گوناگون علوم انسانی نظیر روان‌سنجی، آمار بازرگانی، اقتصاد سنجی، جمعیت‌شناسی، علوم سیاسی، هواشناسی و محیط‌شناسی، علوم پزشکی، مهندسی و ... نقش عمده‌ای ایفا می‌کند. خلاصه می‌توان گفت آمار، سنجش گذشته، شناخت حال و درک آینده است.

گردآوری: فرض کنید می‌خواهیم در مورد اندازه قد دانش‌آموزان پایه دوازدهم دبیرستان‌های ایران اطلاعاتی را به دست آوریم. تعدادی که در این مورد بعد از بررسی به دست می‌آیند، در علم آمار، داده نامیده می‌شوند.

داده: واقعیت‌هایی درباره یک چیز هستند که در محاسبه، استنباط یا برنامه‌ریزی به کار می‌روند. (اعداد مربوط به اندازه قد در مثال بالا)

واحد آماری: به هر یک از افراد یا چیزهایی می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود. (هر کدام از دانش‌آموزان مورد بررسی در مثال بالا)

جامعه آماری: مجموعه کل واحدهای آماری را جامعه آماری می‌گویند (تمام دانش‌آموزان مورد بررسی در مثال بالا).

در مثال بالا چون دسترسی به همه دانش‌آموزان پایه دوازدهم کشور وقت‌گیر و هزینه‌بر خواهد بود بنابراین با روش‌های خاصی تعدادی از آنها را انتخاب می‌کنیم که به این عمل نمونه‌گیری می‌گوییم.

نمونه‌ای را که در آن همه اعضای جامعه آماری شانس انتخاب یکسان در نمونه را داشته باشند، نمونه تصادفی نامیده می‌شود.

توجه

جامعه آماری همیشه موجودات زنده نیستند. به مثال‌های زیر دقت کنید:

• اتومبیل‌های تولید شده در سال ۹۶ توسط شرکت ایران خودرو

• درختان خیابان ولیعصر (عج) در شهر تهران

• شامپوهای تولید شده توسط یک شرکت

مثال‌های بالا همگی معرف یک جامعه آماری هستند.

ضرب‌المثل «مشت، نمونه خروار است» به این موضوع اشاره دارد که اگر نمونه، تصادفی انتخاب شود آن‌گاه معرف جامعه است و آن را به خوبی معرفی می‌کند. چون هدف از نمونه و مطالعه آن، شناخت جامعه آماری است، بنابراین نمونه باید طوری انتخاب شود که بتواند بیانگر تمام خصوصیات جامعه باشد به این منظور اندازه نمونه باید متناسب با اندازه جامعه باشد و روش انتخاب آن باید به گونه‌ای باشد که امکان انتخاب هر کدام از اعضای جامعه به عنوان نمونه امکان‌پذیر باشد.

آمارگیری: گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن

آمارگیر: کسی که عمل آمارگیری را انجام می‌دهد.

اگر همه اعضای جامعه را بررسی کنیم عمل سرشماری انجام گرفته است. البته این روش اشکالات و محدودیت‌هایی هم دارد که عبارتند از:

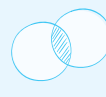
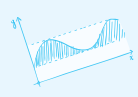
۱. هزینه زیاد

۲. زمان بر بودن

۳. خطای بیشتر در گردآوری داده‌ها

۴. عدم امکان استفاده از آن در بررسی‌های مخرب (یعنی واحدهای انتخاب شده از بین می‌رود).

برای مثال فرض کنید می‌خواهیم بدانیم که وقتی روی یک قوطی کنسرو ماهی، وزن ۱۸۰ گرم اعلام می‌شود. درست است یا نه! اگر بخواهیم به محل تولید این محصول در کارخانه مراجعه و عمل سرشماری را انجام دهیم، به معنای آن است که همه قوطی‌ها را باز کنیم و وزن همه آنها را تک‌تک بررسی کنیم که این کار به معنی از بین رفتن تمام محصولات است. پس در این مواقع از نمونه‌گیری استفاده می‌کنیم.



روش‌های گردآوری داده‌ها

۱ **مشاهده (آزمایش):** گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخگو، مانند: شمارش تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک تقاطع، تأثیر نور خورشید بر رشد گیاه، اندازه‌گیری وزن محصولات یک زمین کشاورزی

۲ **پرسش‌نامه:** مجموعه‌ای از سؤالات پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخ‌دهنده تکمیل می‌گردد. پرسش‌نامه، مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات است. مانند: سرشماری نفوس و مسکن توسط مرکز آمار ایران (هر ۱۰ سال یک بار)، پرسش‌نامه در هنگام ثبت نام در مدرسه.

۳ **مصاحبه:** یکی از روش‌های جمع‌آوری اطلاعات است که در آن به صورت حضوری یا غیرحضوری از افراد یا گروهی از آنان پرسش می‌شود. این روش بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر (مصاحبه‌گر) اطلاع کافی از تمامی پاسخ‌های ممکن ندارد. امکان دریافت پاسخ در این روش بیشتر از روش‌های دیگر است. مانند: دریافت نظرات مردم در مورد اقدام جدید دولت در موضوعی خاص.

۴ **دادگان (داده‌های از پیش تهیه شده):**

در این روش می‌توان از اطلاعاتی که از قبل جمع‌آوری شده است استفاده کرد. مانند متوسط تعداد مسافرین ورودی روزانه به فرودگاه امام خمینی (ره). دقت کنید که ممکن است برای گردآوری اطلاعات در مورد یک مسئله، چند روش قابل انجام باشد اما به دنبال بهترین روش جمع‌آوری اطلاعات در هر زمینه‌ای هستیم.

اشکالات روش‌های گردآوری داده‌ها

۱ **پرسش‌نامه:** اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان بر است.

۲ **مشاهده:** اگر به دقت زیاد نیاز داشته باشیم، مناسب نیست.

۳ **دادگان:** همیشه اطلاعات ثبتي را در اختیار آمارگیر قرار نمی‌دهند.

پارامتر جامعه: مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و از داده‌های جامعه به دست می‌آید.

آماره نمونه: مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

مثلاً میانگین اجاره بهای آپارتمان‌های دو خوابه در یک شهر معین یک پارامتر است و حال فرض کنید ما در این شهر ۱۰۰ آپارتمان دو خوابه را به عنوان نمونه و به طور تصادفی از مناطق مختلف شهر انتخاب می‌کنیم. میانگین اجاره‌بهای این ۱۰۰ آپارتمان اخیر یک آماره است. حال اگر یک نمونه ۵۰ تایی دیگر از آپارتمان‌های همین شهر را، مجدداً از لحاظ اجاره‌بها بررسی کنیم باز یک آماره دیگر خواهیم داشت. (توجه کنید که ممکن است عددی که برای آماره گروه اول به دست می‌آید با آماره گروه دوم یکسان نباشد).

به عنوان مثالی دیگر، فرض کنید قرار است درباره دبیران استان کرمان یک پژوهش آماری انجام گیرد. اگر داده‌های مربوط به تک تک دبیران را داشته باشیم، یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم و یک ویژگی این جامعه مثلاً نسبت مردان در کل جامعه دبیران استان کرمان معرف یک پارامتر است.

$$\text{پارامتر جامعه} = \frac{\text{تعداد اعضا از یک ویژگی خاص جامعه}}{\text{تعداد کل اعضای جامعه}}$$

حال اگر از بین آن دبیران یک نمونه‌گیری انجام گیرد. یعنی داده‌های بعضی از دبیران را داشته باشیم (داده‌های نمونه را در اختیار داریم) نسبت دبیران مرد به این داده‌های نمونه‌ای را آماره (مقدار آماره) می‌گویند.

$$\text{آماره نمونه} = \frac{\text{تعداد اعضا از یک ویژگی خاص نمونه}}{\text{تعداد کل اعضای نمونه}}$$

تفاوت پارامتر و آماره: پارامتر جامعه مقداری ثابت و پایدار است و تا موقعی که خود جامعه تغییر نکند، پارامتر جامعه تغییر نمی‌کند. اما آماره مقداری متغیر و ناپایدار است. بدین معنی که از یک نمونه به نمونه دیگر ممکن است تغییر کند. مثلاً اگر ما ۳ نمونه تصادفی ۵۰ تایی از اجاره‌بهای آپارتمان‌های دو خوابه را در یک شهر معین بررسی کنیم، احتمالاً به سه عدد متفاوت می‌رسیم.

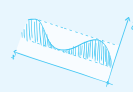
پارامتر یک جامعه زمانی قابل محاسبه است که داده‌های کل جامعه را در اختیار داشته باشیم. به همین دلیل پارامترها معمولاً برآورد می‌شوند. به خصوص زمانی که جامعه آماری بزرگ باشد که در این صورت چون آماره کمیته است که از یک نمونه به دست می‌آید از آن به عنوان برآوردگر پارامتر جامعه استفاده می‌شود.



$$A = \pi r^2$$



$$y = x^2$$



الف - ماهی



۱- نمونه انتخاب شده، باید چه ویژگی هایی داشته باشد تا معرف جامعه باشد؟

(۱) نمونه انتخابی باید با روش مشخص انتخاب شود.

(۲) نمونه انتخابی باید به اندازه کافی کوچک باشد تا بتوان آن را بررسی کرد.

(۳) نمونه انتخابی باید به اندازه کافی بزرگ و طبق قاعده خاصی انتخاب شود.

(۴) نمونه انتخابی باید به صورت کاملاً تصادفی انتخاب شود و اندازه آن متناسب با اندازه جامعه باشد.

• می خواهیم وزن ماهی های یک حوضچه پرورش ماهی را به منظور فروش آن ها تخمین بزنیم. ابتدا رضا از قسمت عمیق ۶ ماهی و سپس علی با تقسیم حوضچه به ۳ قسمت مساوی و صید ۲ ماهی از هر قسمت، ۶ ماهی صید می کند. با توجه به توضیحات فوق، (به سؤالات ۲ و ۳ پاسخ دهید):

۲- واحد آماری و جامعه آماری به ترتیب کدام اند؟

(۱) ماهی های درون حوضچه - هر ماهی درون حوضچه

(۲) ۶ ماهی صید شده از قسمت عمیق - ماهی های درون حوضچه

(۳) هر ماهی درون حوضچه - ماهی های درون حوضچه

(۴) ماهی های صید شده توسط رضا - کل ماهی های صید شده

۳- کدام یک از گزینه های زیر به ترتیب می توانند یک نمونه و یک نمونه تصادفی از جامعه آماری فوق باشند؟

(۱) کل ماهی های حوضچه - کل ماهی های صید شده

(۲) ماهی های صید شده توسط علی - ماهی های صید شده توسط رضا

(۳) کل ماهی های صید شده - کل ماهی های حوضچه

(۴) ماهی های صید شده توسط رضا - ماهی های صید شده توسط علی

۴- در کدام بررسی، اندازه نمونه برابر اندازه جامعه است؟

(۱) نمونه تصادفی

(۳) سرشماری

(۲) دسته بندی

(۴) متغیر کمی

۵- کدام یک از گزینه های زیر، از محدودیت های سرشماری نیست؟

(۱) زمان بر بودن

(۳) به صرفه نبودن از لحاظ اقتصادی

(۲) بررسی تمام اعضای جامعه

(۴) خطای بیشتر در گردآوری داده ها

۶- در کدام گزینه لزوماً عمل سرشماری انجام نشده است؟

(۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرند.

(۳) اندازه نمونه برابر اندازه جامعه باشد.

(۲) نمونه برابر جامعه آماری باشد.

(۴) نمونه زیرمجموعه جامعه آماری باشد.

۷- در کدام یک از موارد زیر، می توان عمل سرشماری را انجام داد؟

(۱) بررسی وزن هندوانه های برداشت شده در استان خوزستان

(۳) بررسی قد دانش آموزان یک کلاس

(۲) بررسی قیمت ماشین های سواری در یک شهر

(۴) بررسی طول عمر لامپ های تولیدی یک کارخانه

۸- کدام یک، از روش های گردآوری داده ها نمی باشد؟

(۱) پرسش نامه

(۳) پرسش و پاسخ

(۲) استفاده از اطلاعات از پیش تهیه شده

(۴) پیش بینی و تخمین

۹- در طراحی پرسش نامه، کدام مورد ضروری نیست؟

(۱) سازمان دهی

(۳) تعیین هدف

(۲) پرسش های راهنمایی کننده

(۴) پرسش های ساده

۱۰- کدام گزینه در مورد محدودیت های روش های جمع آوری داده ها صحیح نیست؟

(۱) پرسش نامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان بر است.

(۲) مشاهده: اگر به دقت زیادی نیاز داریم، مناسب نیست.

(۳) مصاحبه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، روش وقت گیری می باشد.

(۴) دادگان ها: همیشه اطلاعات ثبتي در اختیار آمارگیر قرار می گیرد.

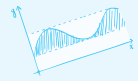
(تهرانی دافل ۸۹)

(ریاضی دافل ۹۲)

(انسانی خارج ۹۷)



ab max



$$f(x) = x^2$$



$$A = \pi r^2$$



۱۱- کدام گزینه در مورد روش جمع‌آوری داده‌ها صحیح است؟

- (۱) در جمع‌آوری داده‌ها، نباید از اطلاعات از پیش تهیه شده استفاده کرد.
- (۲) مشاهده، آزمایش و اندازه‌گیری یکی از روش‌های جمع‌آوری داده‌ها می‌باشد.
- (۳) در طراحی پرسش‌نامه، از سؤالات هدایت‌کننده می‌توان استفاده کرد.
- (۴) از روش مصاحبه، بیشتر در زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر اطلاع کافی از تمامی پاسخ‌ها داشته باشد.

۱۲- در هر مورد، بهترین روش برای جمع‌آوری داده‌ها، کدام است؟

- (الف) تعداد داوطلبان کنکور ۱۳۹۷ رشته انسانی با سن کمتر از ۱۸ سال
- (ب) میزان رضایت سرنشینان خودرو از کیفیت جاده‌ها در سطح شهر
- (ج) بررسی کیفیت محصولات یک باغ میوه
- (د) بررسی ارتباط بین وزن افراد و رژیم غذایی آن‌ها

(۱) دادگان، مصاحبه یا پرسش‌نامه، پرسش‌نامه، مشاهده

(۳) مشاهده، مصاحبه، مشاهده، مصاحبه

۱۳- علی‌رغم این‌که پارامتر جامعه دارای مقدار است، این مقدار می‌باشد. به همین دلیل از برای تخمین استفاده می‌کنند.

(۱) ثابت، مجهول، آماره، پارامتر

(۳) متغیر، معلوم، پارامتر، آماره

۱۴- تعداد تولیدات هفتگی یک کارخانه خودروسازی، ۱۰۰۰ عدد می‌باشد. جهت بررسی کیفیت محصولات تولیدی کارخانه، ۲۰۰ خودرو را به تصادف انتخاب کرده و متوجه می‌شویم ۴۰ تای آن‌ها نقص فنی دارند. تعداد اعضای جامعه، تعداد اعضای نمونه، متغیر تصادفی و نوع آن کدام است؟

(۱) ۱۰۰۰، ۲۰۰، تعداد تولیدات هفتگی کارخانه، کمی با مقیاس نسبتی

(۲) ۲۰۰، ۴۰، تعداد تولیدات هفتگی کارخانه، کمی با مقیاس نسبتی

(۳) ۱۰۰۰، ۲۰۰، کیفیت تولیدات کارخانه، کیفی با مقیاس اسمی

(۴) ۲۰۰، ۴۰، کیفیت تولیدات کارخانه، کیفی با مقیاس اسمی

۱۵- تعداد کارمندان یک شرکت با مدارک دیپلم، لیسانس و فوق لیسانس به ترتیب ۲۰۰، ۷۰۰ و ۱۰۰ نفر می‌باشند. جهت بررسی وضعیت تحصیلی کارمندان، ۲۸۰ کارمند که $\frac{3}{4}$ آن‌ها مدرک تحصیلی غیر از لیسانس دارند، انتخاب می‌کنیم. نسبت پارامتر جامعه به آماره برای کارمندان با مدرک لیسانس در نمونه انتخابی کدام است؟

(۱) $\frac{5}{14}$ (۲) $\frac{14}{5}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{7}{3}$

۱۶- در یک مزرعه هندوانه، ۲۰۰۰ هندوانه موجود است. می‌خواهیم آن‌ها را بر اساس معیار «وزن» بررسی کنیم (سبک، متوسط و سنگین). نسبت هندوانه‌های سبک و متوسط به کل هندوانه‌ها برابر $\frac{1100}{2000}$ می‌باشد. حال ۸۰۰ هندوانه به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. نسبت تعداد هندوانه‌های سنگین در این حالت برابر $\frac{300}{800}$ می‌باشد. نسبت پارامتر به آماره برای هندوانه‌های سنگین و غیرسنگین در نمونه انتخابی کدام است؟

(۱) $\frac{22}{25}, \frac{30}{25}$ (۲) $\frac{25}{30}, \frac{25}{22}$ (۳) $\frac{22}{25}, \frac{22}{25}$ (۴) $\frac{25}{22}, \frac{25}{30}$

۱۷- اطلاعاتی که در مورد یک موضوع، مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرند، نام دارد و به شخصی که وظیفه تهیه این اطلاعات را بر عهده دارد، گوئیم.

(۱) نمونه‌گیری، آمارگیر (۲) داده، دادگان (۳) نمونه‌گیری، دادگان (۴) داده، آمارگیر

۱۸- کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد علم آمار صحیح نمی‌باشد؟

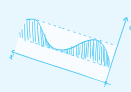
- (۱) با استفاده از روش‌های آماری، به تنهایی نمی‌توان در مورد جامعه‌ای تصمیم‌گیری کرد.
- (۲) روش‌های آماری ما را قادر می‌سازند تا با داشتن اطلاعات از مجموعه‌های کوچک، برای گروه‌های بزرگ‌تر تصمیم‌گیری کنیم.
- (۳) مراحل مختلف علم آمار شامل گردآوری، سازمان‌دهی و تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج اطلاعات می‌باشد.
- (۴) یک روش آماری مناسب، دقیق‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی می‌باشد.



$$A = \pi r^2$$



$$y = x^2$$



۸۵٪ موفق



متغیرها و انواع آن

فرض کنید در یک پارکینگ پراز اتومبیل هستید. شما می‌توانید یک یا چند ویژگی این اتومبیل‌ها را بررسی کنید. (مانند سال تولید، رنگ، حجم موتور و ...) به هر یک از ویژگی‌هایی که مورد بررسی قرار می‌گیرد متغیر می‌گویند. هر یک از متغیرهای مورد بررسی می‌توانند کمی یا کیفی باشند.

متغیر: هر ویژگی از اشخاص یا اشیاء که قرار است بررسی شود.

- انواع متغیرها**
- ۱- **کمی:** متغیرهایی هستند که مقادیر عددی می‌گیرند و برای آنها عملیات ریاضی (جمع، تفریق، معدل‌گیری و ...) و اندازه‌گیری قابل انجام است و یا قابل شمردن هستند. مانند: قد، وزن، سن و ...
 - ۲- **کیفی:** متغیرهایی هستند که الزاماً مقدار عددی نمی‌گیرند و صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیاء در گروه‌ها به کار می‌روند. مانند رنگ مو، گروه خونی، جنسیت افراد و ...

دقت کنید مثلاً وقتی می‌خواهیم بدانیم «شماره شناسنامه افراد» چه نوع متغیری است باید بگوییم اگرچه «شماره شناسنامه افراد» یک عدد است اما چون نمی‌توان آن را شمرد یا اندازه‌گیری کرد. پس متغیر کیفی است.

اما «تعداد طبقات ساختمان‌ها» یک عدد است که می‌توان آن را شمرد و یا «وزن افراد» را می‌توانیم اندازه‌گیری کنیم. بنابراین متغیر کمی هستند.

اندازه‌گیری: در تعریف به معنای ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیاء است.

می‌توانیم متغیرها را با توجه به دقت و سطح اندازه‌گیری، به چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی تقسیم می‌کنیم.

مقیاس‌های اندازه‌گیری

۱ **اسمی:** این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام‌ها، برچسب‌ها و گروه‌ها می‌باشد و فقط جنبه کیفی یک صفت را در نظر می‌گیرند یعنی کدهایی که به پاسخ اختصاص داده می‌شود اولویتی بر یک دیگر ندارند و فقط برای گروه‌بندی به کار می‌روند.

۱- متغیر نوع رنگ سفید (۱) سیاه (۲) زرد (۳)

۲- متغیر جنسیت خانم (۱) آقا (۲)

رنگ چشم، گروه خونی و ...

۲ **ترتیبی:** این مقیاس، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیاء، ارجحیت نیز قائل است و علاوه بر داشتن خصوصیات اسمی از ویژگی‌های ترتیبی نیز برخوردار است. این مقیاس برای متغیرهای کیفی که قابل مرتب کردن هستند و در عین حال، محاسبه اختلاف بین مقادیر داده‌ها که یا امکان پذیر نیست یا بی‌معناست، استفاده می‌شود. مثلاً در یک مسابقه دو، نفرات اول تا سوم را مشخص می‌کنیم. حال ممکن است نفر اول با نفر دوم فاصله زمانی زیادی در رسیدن به خط پایان داشته باشند ولی به این فاصله توجهی نمی‌کنیم و یا مثلاً اگر سه دانش‌آموز اول در درس ریاضی نمرات ۱۹، ۱۴ و ۱۰ گرفته باشند رتبه‌های اول تا سوم را به آنها می‌دهیم و توجه نمی‌کنیم که اختلاف نمرات چه قدر است.

مثال‌های دیگر: ۱- میزان تحصیلات (بی‌سواد، ابتدایی، دیپلم، لیسانس و ...)

۲- میزان توانایی در مکالمه به زبان انگلیسی (کم، متوسط، زیاد، خیلی زیاد و ...)

۳- میزان درآمد خانوار در ماه (کم، متوسط، زیاد و ...)

۳ **فاصله‌ای:** در این مقیاس ویژگی افراد یا اشیاء به دقت اندازه‌گیری می‌شود و برای داده‌هایی به کار می‌رود که قابل مرتب کردن هستند. این مقیاس علاوه بر دارا بودن ویژگی دو مقیاس قبلی یعنی رده‌بندی تفاوت‌ها (مقیاس اسمی) و رتبه‌بندی تفاوت‌ها (مقیاس ترتیبی)، توان آن را دارد که تفاوت‌ها را فاصله‌بندی کند یعنی در تعیین فواصل بین ارزش‌ها و مقادیر یک صفت کمک کند چرا که انتخاب مبدأ یا صفر، اختیاری است. به عنوان مثال، متغیر «دمای هوای شهرها» دارای مقیاس فاصله‌ای می‌باشد، زیرا نمی‌توان ادعا نمود که ۵۰ درجه سانتی‌گراد دو برابر ۲۵ درجه سانتی‌گراد است. اما می‌توان به طور مقایسه‌ای عنوان نمود که فاصله ۳۸ و ۳۹ درجه برابر ۴۵ تا ۴۶ درجه است. یعنی اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معناست اما نسبت مقادیر داده‌ها بی‌معناست. یعنی اعمال ضرب و تقسیم در این جا وجود ندارد. مانند درجه حرارت بین دو شهر که اختلاف آن‌ها قابل محاسبه است اما ضرب این دو درجه دما معنی ندارد.

دمای هوای شهرها، سال‌های تحصیل، مقیاس‌های مانند دماسنج و میزان شنوایی مصادیقی از این نوع مقیاس هستند.

۴ **نسبتی:** این مقیاس برای داده‌هایی به کار می‌رود که قابل مرتب کردن هستند، اختلاف بین مقادیر داده‌ها و همچنین نسبت مقادیر داده‌ها با معناست. اغلب متغیرهای فیزیکی مانند وزن، قد و یا حتی درآمد افراد در این مقیاس اندازه‌گیری می‌شوند.