



p30konkor.com

عنوان آزمون : هندسه ۱۲ فصل ۳

زمان آزمون :

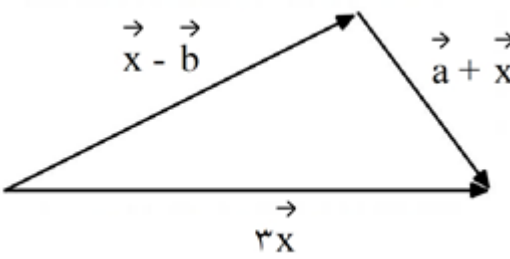
تاریخ برگزاری

نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p>دو بردار <math>\vec{a} = (-m, -1, -2)</math> و <math>\vec{b} = (0, -3, m+2)</math> مفروض‌اند. اگر دو بردار <math>\vec{a} - \vec{b}</math> و <math>\vec{a} + \vec{b}</math> بر هم عمود باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{a} \times \vec{b}</math> ساخته می‌شود را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p><b>پاسخ:</b> ۱ بخش اول، به سه روش زیر قابل حل است:</p> $(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \\ \begin{cases} (-m, 2, -m-4) \cdot (-m, -4, m) = 0 \Rightarrow m = -2 \\  \vec{a} ^2 -  \vec{b} ^2 = 0 \Rightarrow  \vec{a}  =  \vec{b}  \Rightarrow m = -2 \end{cases} \end{cases}$ <p>چهارضلعی بنا شده روی بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> لوزی است</p> $\Rightarrow  \vec{a}  =  \vec{b}  \Rightarrow m = -2$ <p>بخش دوم، به سه روش زیر قابل حل است:</p> $\vec{a} \times \vec{b} = (-6, 0, -6) \Rightarrow \begin{cases} V =  (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})  = 72 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 72 \Rightarrow V = 72 \\ h =  \vec{a} \times \vec{b}  \Rightarrow V = Sh =  (\vec{a} \times \vec{b}) ^2 = 72 \end{cases}$	
۲	<p>اگر مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> ساخته می‌شود <math>6\sqrt{3}</math> باشد و <math>\vec{a} = 4</math>، <math>\vec{b} = 3</math>، حاصل <math>(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p><b>پاسخ:</b> ۱</p> $ \vec{a} \times \vec{b}  = 6\sqrt{3}, \sin \theta = \frac{6\sqrt{3}}{4 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{2}$ $a \cdot (a - b) =  \vec{a} ^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 4^2 - 4 \times 3 \times \left(\pm \frac{1}{2}\right) = 16 \pm 6$	

	<p>اگر <math>\vec{a} = -\vec{i} - \sqrt{3}\vec{k}</math> و <math>\vec{b} = (\sqrt{3}, 2, 1)</math> باشد. تصویر قائم بردار <math>\vec{b}</math> بر <math>\vec{a}</math> و اندازه بردار تصویر را به دست آورید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} = (-1, 0, -\sqrt{3})$ $\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} ^2} \vec{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{4}(-1, 0, -\sqrt{3}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2}\right),  \vec{b}'  = \sqrt{3}$	۳
	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) معادله صفحه‌ای که موازی <math>YOZ</math> است و از نقطه <math>A(2, -1, 3)</math> می‌گذرد، برابر با ..... است.</p> <p>ب) حاصل عبارت <math>\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k})</math> برابر ..... است.</p> <p>ج) در شکل مقابل بردار <math>\vec{x}</math> برحسب <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> برابر با ..... است.</p>  <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ الف) <math>x = 2</math> ب) بردار صفر یا <math>\vec{O}</math> ج) <math>\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}</math></p>	۴
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>خط به معادله <math>\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}</math> بر صفحه <math>XOZ</math> عمود است.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>	۵
	<p>فرض کنید <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه <math>\frac{\pi}{4}</math> می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای <math>\vec{a} + \vec{b}</math> و <math>2\vec{a}</math> تولید می‌شود را بیابید.</p> <p>سوال‌ات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $S = \frac{1}{2} \left  2\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) \right  = \frac{1}{2} \left  2\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} \right  \quad (\text{ص } ۸۴)$ $S = \frac{1}{2} \left  0 + 2\vec{a} \times \vec{b} \right  = \left  \vec{a} \times \vec{b} \right  = \left  \vec{a} \right  \left  \vec{b} \right   \sin \theta  = 5 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$	۶

۷	<p>اگر <math>\vec{a} = (1, -3, 4)</math> و <math>\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}</math> باشند، آنگاه تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> را بر امتداد بر بردار <math>\vec{a} - \vec{b}</math> بیابید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>(ص ۸۴) <math>\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2, 1, 2)</math></p> $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{d} ^2} \vec{d} = \frac{(-2 - 3 + 8)}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} (-2, 1, 2) = \left( \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$
۸	<p>بردارای عمود بر دو بردار <math>\vec{a} = (3, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, 2, -1)</math> بیابید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>(ص ۸۴) <math>\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} &amp; \vec{j} &amp; \vec{k} \\ 3 &amp; -1 &amp; 2 \\ 1 &amp; 2 &amp; -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 &amp; 2 \\ 2 &amp; -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 &amp; 2 \\ 1 &amp; -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 &amp; -1 \\ 1 &amp; 2 \end{vmatrix}</math></p> <p><math>\vec{a} \times \vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} = (-3, 5, 7)</math></p>
۹	<p>اگر <math> \vec{a}  = 10</math> و <math> \vec{b}  = 2</math> و <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 12</math> باشند و زاویه بین دو بردار حاده باشد، مقدار <math> \vec{a} \times \vec{b} </math> را محاسبه کنید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>(ص ۸۴) <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta \Rightarrow 12 = 10 \times 2 \times \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}</math></p> <p><math>\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}</math> (<math>\theta</math> حاده است)</p> <p><math> \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}  \sin \theta = 2 \times 10 \times \frac{4}{5} = 16</math></p>
۱۰	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>A_{n \times n}</math> ماتریس دلخواه <math>I_n</math> ماتریس همانی و <math>A^T - A = I</math> باشد، وارون ماتریس <math>A</math>، برابر <math>(I - A)</math> است.</p> <p>ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت <math>r</math> که بر دایره <math>C(O, r)</math> در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره <math>C'(O, 2r)</math> است.</p> <p>پ) بردار <math>\vec{a} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)</math>، یک بردار یکه است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ الف) نادرست (ص ۲۲) ب) درست (ص ۳۹) پ) درست (ص ۷۵)</p>

۱۱	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) در ماتریس قطری <math>A = \begin{bmatrix} -۳ &amp; ۰ \\ ۲k-۱ &amp; ۲ \end{bmatrix}</math> مقدار <math>k</math> برابر ..... است.</p> <p>ب) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل ..... است.</p> <p>پ) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای واحد <math>\vec{i}</math> و <math>\vec{j}</math> و <math>\vec{k}</math> بنا می‌شود، برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ الف) <math>k = \frac{1}{۲}</math> (ص ۱۲)</p> <p>ب) دو خط متقاطع (ص ۳۹)</p> <p>پ) یک (ص ۸۲ و ۸۳)</p>
۱۲	<p>اگر سه بردار <math>\vec{a} = (m, -۱, ۱)</math>، <math>\vec{b} = (۱, -۱, ۱)</math> و <math>\vec{c} = (۱, m, -۱)</math> در یک صفحه واقع باشند، مقدار <math>m</math> را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ <math>V = ۰ \Rightarrow \left  \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right  = ۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} m &amp; -۱ &amp; ۱ \\ ۱ &amp; -۱ &amp; ۱ \\ ۱ &amp; m &amp; -۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۲m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۱</math></p>
۱۳	<p>اگر <math>\vec{a} = (-۲, ۰, ۱)</math> و <math>\vec{b} = \vec{i} - ۲\vec{j}</math> باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای <math>\vec{a} - \vec{j}</math> و <math>\vec{b}</math> تولید می‌شود را حساب کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ <math>\vec{u} = \vec{a} - \vec{j} = (-۲, -۱, ۱)</math>، <math>\vec{u} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i &amp; j &amp; k \\ -۲ &amp; -۱ &amp; ۱ \\ ۱ &amp; -۲ &amp; ۳ \end{vmatrix} = -\vec{i} + ۷\vec{j} + ۵\vec{k}</math>، <math>\left  \vec{u} \times \vec{b} \right  = \sqrt{۷۵}</math></p> <p><math>S = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}</math> (ص ۷۵ و ۸۴)</p>
۱۴	<p>اگر <math>\vec{a} = (۲, -۱, ۱)</math>، <math>\vec{b} = (-۱, ۲, ۰)</math> و <math>\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}</math> باشد، تصویر قائم بردار <math>\vec{a} + \vec{b}</math> بر امتداد بردار <math>\vec{c} - \vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ <math>\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (۱, ۱, ۱)</math></p> <p><math>\vec{v} = ۲\vec{c} - \vec{b} = (۳, -۴, ۰) \Rightarrow \left  \vec{v} \right  = ۵</math>، <math>\vec{u} \cdot \vec{v} = -۱</math></p> <p><math>\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left  \vec{v} \right } \vec{v} \Rightarrow \vec{u}' = \left( -\frac{۳}{۲۵}, \frac{۴}{۲۵}, ۰ \right)</math> (ص ۷۵ و ۸۴)</p>

۱۵	<p>مقدار <math>m</math> را طوری بیابید که زاویه بین دو بردار <math>\vec{a} = (m, 0, 2)</math> و <math>\vec{b} = (2, -2, 0)</math> برابر <math>\frac{\pi}{3}</math> باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta \Rightarrow 2m = (\sqrt{m^2 + 4})(2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4m^2 = 2m^2 + 8$ $\Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 & \text{ق ق} \\ m = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases} \quad (\text{ص ۷۸})$
۱۶	<p>جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید.</p> <p>حاصل <math>\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k})</math> برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ صفر (ص ۸۲)</p>
۱۷	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>نقطه <math>(-2, 3, -1)</math> در ناحیه ششم مختصاتی قرار دارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ درست (ص ۶۴)</p>
۱۸	<p>بردار <math>\vec{a} = (4, -4, 2)</math> مفروض است. بردار <math>\vec{b}</math> غیرهم‌جهت با <math>\vec{a}</math> و به طول ۱۲ را طوری بیابید که <math>\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}</math> باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (4k, -4k, 2k)$ $ \vec{b}  = 6 k  = 12 \Rightarrow k = \pm 2 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \vec{b} = (-8, 8, -4) \quad (\text{ص ۸۲})$
۱۹	<p>زاویه بین دو بردار <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta \Rightarrow 3 = 3\sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ \quad (\text{ص ۷۸})$

بردارهای  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ،  $\vec{b} = (0, 1, 1)$  و  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$  بر سه یال یک متوازی‌السطوح منطبق هستند. اگر قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید شود، اندازه ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

**پاسخ: ۱** حجم متوازی‌السطوح برابر با حاصل ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است. (ص ۸۳)

حجم متوازی‌السطوح برابر  $2 = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$  است.

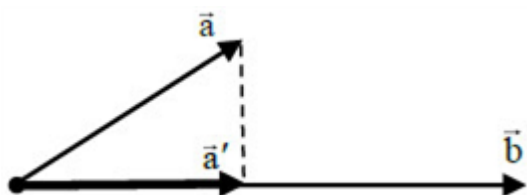
مساحت قاعده این متوازی‌السطوح که توسط بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید می‌شود برابر با:

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{3} \text{ است.}$$

$$h = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ در نتیجه:}$$

۲۰

نشان دهید: تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  روی بردار  $\vec{b}$  برابر  $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$  است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

**پاسخ: ۱** روش اول: بردار  $\vec{a}'$  با بردار  $\vec{b}$  موازی است،  $\vec{a}' = k\vec{b}$   $\Rightarrow \vec{a}' \parallel \vec{b}$ . (ص ۷۹)

$$(\vec{a} - \vec{a}') \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

روش دوم: در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را  $\theta$  می‌نامیم

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta$$

$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'| = k|\vec{b}| \Rightarrow k = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}| |\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|^2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

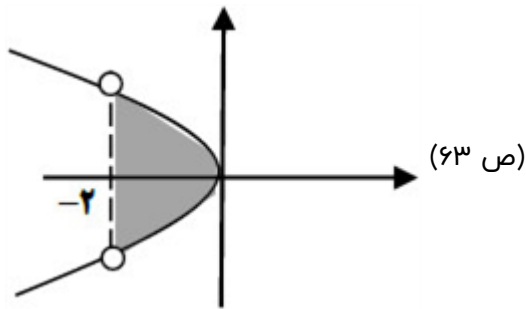
$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

۲۱

	<p>نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه <math>B(1, 0, 1)</math> در فضا مفروض‌اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ مختصات نقطه <math>A(0, 0, 3)</math>، مختصات وسط AB برابر با <math>M\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)</math> و فاصله تا مبدأ مختصات <math>\frac{\sqrt{17}}{2}</math> است. (ص ۶۶)</p>	۲۲
	<p>کدامیک از بردارهای زیر، بر راستای دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> عمود نیست.</p> <p>۱ <math>\sqrt{3}\vec{a} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{b}\right)</math> ۲ <math>\vec{a} \times \vec{b}</math> ۳ <math>2\vec{a} + 3\vec{b}</math> ۴ <math>\vec{b} \times \frac{\sqrt{2}}{5}\vec{a}</math></p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (ص ۸۱ و ۸۲)</p>	۲۳
	<p>زاویه بین بردارهای غیرصفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math>، برابر <math>\theta</math> است. در کدامیک از موارد زیر حاصل ضرب داخلی آنها بیشتری مقدار را دارد.</p> <p>۱ <math>\theta = 0</math> ۲ <math>\theta = \frac{2\pi}{3}</math> ۳ <math>\theta = \frac{\pi}{2}</math> ۴ <math>\theta = \frac{\pi}{3}</math></p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۸۰)</p>	۲۴
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>حاصل عبارت <math>\vec{i} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})</math> برابر صفر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ درست (ص ۸۱)</p>	۲۵
	<p>در فضای سه‌بعدی، نمودار مربوط به معادلات <math>\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}</math> خطی موازی محور ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ zها (ص ۶۷)</p>	۲۶

شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط  $y^2 + x \leq 0, x > -2$  را در فضای دو بعدی رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲



پاسخ: ۱

۲۷

سه بردار  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$  و  $\vec{c} = (0, 2, 1)$  را در نظر بگیرید:  
الف) طول بردار  $2\vec{b} - \vec{c}$  را به دست آورید.  
ب) مساحت متوازی الاضلاع که روی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b} + \vec{c}$  ایجاد می شود را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

الف)  $2\vec{b} = (2, 0, 2), |2\vec{b} - \vec{c}| = |(2, -2, 1)| = 3$  (ص ۷۶)

ب)  $\vec{b} + \vec{c} = (1, 2, 2)$  (ص ۸۱)

$S = |\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})| = |(8, -5, 1)| = 3\sqrt{10}$

پاسخ: ۱

۲۸

ثابت کنید اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b}$ ، برابر خود  $\vec{a}$  می شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$\vec{a} = r\vec{b}$

$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(r\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{r|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = r\vec{b} = \vec{a}$  (ص ۸۰)

پاسخ: ۱

۲۹

اگر زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (2, -1, n)$  و  $\vec{b} = (1, 0, -1)$  برابر با  $135^\circ$  درجه باشد، مقدار  $n$  را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

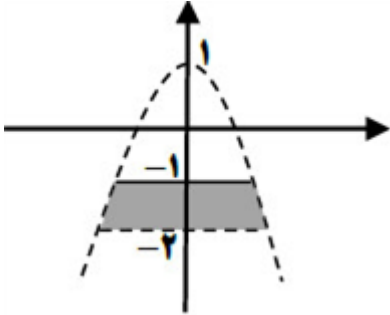
$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - n}{\sqrt{2} \times \sqrt{4 + 1 + n^2}} \Rightarrow \frac{n - 2}{\sqrt{n^2 + 5}} = 1$

$n^2 + 5 = n^2 - 4n + 4 \Rightarrow n = -\frac{1}{4}$  (ص ۷۸)

پاسخ: ۱

۳۰



	<p>شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط <math>y &lt; -x^2 + 1</math>, <math>-2 &lt; y \leq -1</math> را در فضای دو بعدی رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>  <p>(ص ۶۳)</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۳۱
	<p>معادله صفحه‌ای که بر محور zها در نقطه به مختصات <math>A = (0, 0, 3)</math> عمود باشد، به صورت ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p> <p><math>z = 3</math> (ص ۶۸)</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۳۲
	<p>حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار <math>\vec{a} = (1, 0, -1)</math> و <math>\vec{b} = (0, 2, 2)</math> و <math>\vec{c} = (2, -3, 0)</math> تولید می‌شود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p><math>(\vec{b} \times \vec{c}) = (6, 4, -4)</math> (ص ۸۳)</p> <p><math>v =  \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})  =  (1, 0, -1) \cdot (6, 4, -4)  = 10</math></p> <p>اگر دانش‌آموز به صورت زیر حل کند نمره کامل داده شود:</p> <p><math>v =  \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})  = \left  \begin{vmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ 0 &amp; 2 &amp; 2 \\ 2 &amp; -3 &amp; 0 \end{vmatrix} \right  = 10</math></p> <p>پاسخ: ۱</p>	۳۳
	<p>اگر <math> \vec{a}  = 3</math> و <math> \vec{b}  = 5</math> و حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> تولید می‌شود چقدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p><math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta \Rightarrow 10 = 3 \times 5 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}</math></p> <p><math> \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}  \sin \theta = 5\sqrt{5} \Rightarrow s_{\Delta} = \frac{1}{2}  \vec{a} \times \vec{b}  = \frac{5\sqrt{5}}{2}</math> (ص ۸۴)</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۳۴
	<p>مقدار m را چنان بیابید که دو بردار <math>\vec{a} = (2, m, -1)</math> و <math>\vec{b} = (m+1, 3, 2)</math> بر هم عمود باشند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p><math>\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 2(m+1) + 3m - 2 = 0 \Rightarrow m = 0</math> (ص ۷۹)</p> <p>پاسخ: ۱</p>	۳۵

۳۶	طول بردار $\vec{a} = (0, -3, 4)$ را به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ $ \vec{a}  = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5$ (ص ۷۳)
۳۷	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $y = x^2, -1 < x \leq 2$ را در فضای دو بعدی رسم کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ رسم نمودار (به طوری که نقطه توپر و توخالی مشخص باشد) (ص ۶۳)
۳۸	اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه، $r$ عدد حقیقی و $\vec{b} = r\vec{a}$ آنگاه $ \vec{b}  =  r   \vec{a} $ (درست - نادرست) سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ درست (ص ۷۵)
۳۹	در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ، معادله محور ..... است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ عرض ها یا محور $y$ ها (ص ۶۷)
۴۰	برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ (ص ۷۹) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$
۴۱	اگر $A = (2, -1, 3)$ و $B = (3, 1, 4)$ و $C = (-1, 1, 0)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ $\vec{AB} = (1, 2, 1), \vec{AC} = (-3, 2, -3)$ (ص ۸۴) $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-8, 0, 8), S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}  \vec{AB} \times \vec{AC}  = 4\sqrt{2}$
۴۲	دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند به طوری که $ \vec{a}  = 6$ و $ \vec{b}  = 4$ و زاویه بین آن ها $30^\circ$ درجه است. مقدار عبارت $ \vec{a} \times \vec{b} $ را محاسبه کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱ پاسخ: ۱ (ص ۸۱) $ \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}  \sin 30^\circ = 6(4) \left(\frac{1}{2}\right) = 12$

سه بردار  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$  و  $\vec{c} = (0, 2, 1)$  در نظر بگیرید:  
 الف) زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برابر با  $\theta$  باشد  $\cos \theta$  را بیابید.  
 ب) تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر  $\vec{b} - \vec{c}$  را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف)  $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 0, 1)$

پاسخ: ۱

۴۳

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 1 = \sqrt{14} \sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{7}} \quad (\text{ص } ۷۸)$$

ب)  $\vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (1, -2, 0)$  (ص ۷۹)

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} = \frac{-4}{5} (1, -2, 0)$$

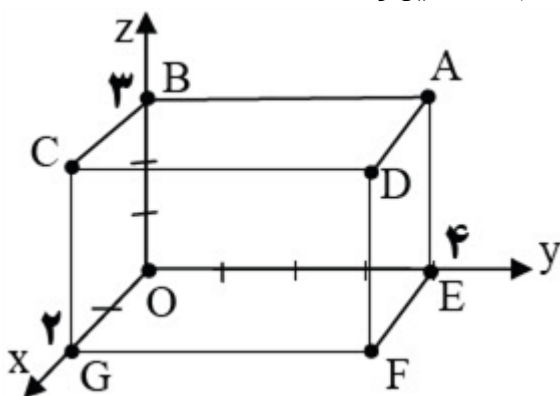
با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.  
 الف) نام وجهی از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.

$$x = 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3$$

ب) معادلات مربوط به پاره‌خط (پال) AD را بنویسید.

پ) مختصات نقطه D را بنویسید.

ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه XOZ باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.



۴۴

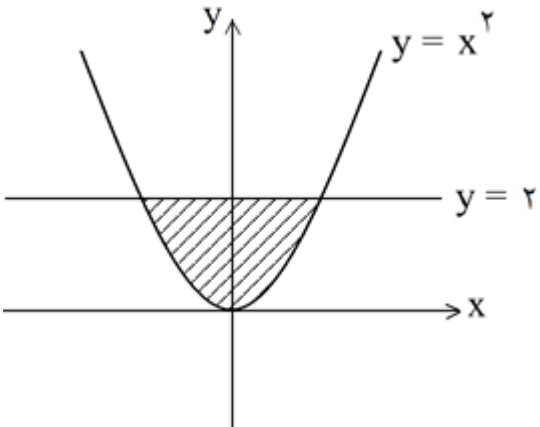
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

ت)  $y = 2$  (ص ۶۸)

پاسخ: ۱ الف) CDFG

پ)  $D(2, 4, 3)$

	<p>شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه <math>x^2 \leq y \leq 2</math> را رسم کنید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ رسم نمودار (ص ۵۵)</p> <p><math>y = x^2</math> نمودار یک سهمی است و <math>y \geq x^2</math> داخل این سهمی است و <math>y \leq 2</math> نقاط زیر خط <math>y = 2</math> هستند، پس <math>x^2 \leq y \leq 2</math> ناحیه هاشورخورده می‌باشد.</p> 	۴۵
	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.</p> <p>- برای دو بردار واحد <math>\vec{i}</math> و <math>\vec{j}</math> حاصل ضرب خارجی <math>\vec{i} \times \vec{j} = \vec{0}</math> است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست، <math>\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}</math> (ص ۷۹)</p>	۴۶
	<p>عبارت زیر را کامل کنید.</p> <p>- اگر سه بردار <math>\vec{a}</math>، <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح بنا شده توسط سه بردار برابر ..... است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ صفر (ص ۸۴)</p>	۴۷
	<p>بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> مفروض‌اند به طوری که <math>\vec{a} = 3</math> و <math>\vec{b} = 26</math> و <math> \vec{a} \times \vec{b}  = 72</math>. اگر زاویه بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار <math>\vec{a} \cdot \vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $ \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}  \sin \theta \Rightarrow 72 = 3(26) \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{13}$ $\cos \theta = \frac{5}{13} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta = 3(26) \frac{5}{13} = 30$	۴۸

<p>۴۹</p>	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> پیدا کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 1 + 0 = 3 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} } = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ</math></p> <p>ب) بردار عمود بر دو بردار <math>\vec{a} \times \vec{b}</math></p> <p><math>\vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, 2) \times (1, -1, 0) = (2, 2, -1)</math></p> <p>پاسخ: ۱</p>
<p>۵۰</p>	<p>اگر طول و عرض و ارتفاع اتاقی ۴ متر و ۵ متر و ۳ متر باشد طول قطر اتاق که دو نقطه مقابل را به هم وصل می‌کند را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p><math>\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}</math></p> <p>پاسخ: ۱</p>
<p>۵۱</p>	<p>در فضای سه بعدی نقطه A روی محور xها به طول ۲ و نقطه B در صفحه yoz با عرض ۳- و ارتفاع ۴ مفروض است، فاصله وسط پاره خط AB تا مبدأ مختصات را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p><math>A = (2, 0, 0), B = (0, -3, 4)</math></p> <p>مختصات وسط پاره خط AB برابر است با:</p> <p><math>M = \left( \frac{2+0}{2}, \frac{0+(-3)}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = \left( 1, -\frac{3}{2}, 2 \right)</math></p> <p><math>OM = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{29}{4}}</math></p> <p>پاسخ: ۱</p>
<p>۵۲</p>	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ..... نامیده می‌شود.</p> <p>ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.</p> <p>پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در ..... بیضی است.</p> <p>ت) اگر برای دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> داشته باشیم: <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b} </math>، در این صورت زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) ماتریس      ب) مشترک      پ) خارج      ت) صفر</p> <p>پاسخ: ۱</p>

	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر A و B دو ماتریس <math>2 \times 2</math> باشند آن‌گاه: <math> AB  =  A   B </math></p> <p>ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.</p> <p>پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.</p> <p>ت) نقطه با مختصات <math>(-2, 3, -4)</math> در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ الف) درست      ب) درست      پ) نادرست      ت) نادرست</p>
۵۴	<p>مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار <math>\vec{a} = (2, -1, 3)</math> و <math>\vec{b} = (0, m, -1)</math> و <math>\vec{c} = (1, -2, 3)</math> در یک صفحه باشند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ (ص ۸۲) <math>\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow (0, m, -1) \cdot (3, -3, -3) = 0 \Rightarrow -3m + 3 = 0 \Rightarrow m = 1</math></p>
۵۵	<p>بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> به طول‌های <math> \vec{a}  = 3</math> و <math> \vec{b}  = 26</math> و اندازه ضرب خارجی <math> \vec{a} \times \vec{b}  = 72</math> مفروض‌اند. اگر زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> کمتر از <math>90^\circ</math> باشد مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ روش اول:</p> $ \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}  \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{72}{3 \times 26} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{5}{13} \xrightarrow{\theta < 90^\circ}$ <p>روش دوم:</p> $ \vec{a} \times \vec{b} ^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 =  \vec{a} ^2  \vec{b} ^2 \Rightarrow 72^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 3^2 \times 26^2$ $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 900 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \pm 30 \xrightarrow{\theta < 90^\circ} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 30$
۵۶	<p>تصویر قائم بردار <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + 2 \times 0 = 3, \quad  \vec{b}  = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ $a' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} } \vec{b} = \frac{3}{\sqrt{2}} (1, -1, 0) = \left( \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad (\text{ص ۸۰})$

۵۷	<p>نقطه A به طول ۲ روی محور <math>x</math> ها و نقطه B روی صفحه <math>xOz</math> به طول ۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه بعدی مفروض اند.</p> <p>الف) مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.</p> <p>ب) طول پاره خط AB را محاسبه کنید.</p> <p>پ) مختصات وسط پاره خط AB را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) <math>A = (2, 0, 0), B = (1, 0, 3)</math></p> <p>ب) <math>AB = \sqrt{(2-1)^2 + (0-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}</math></p> <p>پ) <math>M = \left(\frac{2+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)</math> (ص ۷۶ و ۷۷)</p> <p>پاسخ: ۱</p>
۵۸	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر A و B دو ماتریس <math>3 \times 3</math> دلخواه باشند آنگاه عبارت <math>(A+B)^T = A^T + 2AB + B^T</math> همواره برقرار است.</p> <p>ب) اگر صفحه‌ی P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.</p> <p>پ) نقطه <math>(3, -2)</math> روی دایره <math>x^2 + y^2 + 2x = 0</math> قرار دارد.</p> <p>ت) برای سه بردار <math>\vec{i}</math> و <math>\vec{j}</math> و <math>\vec{k}</math> به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در <math>R^3</math> داریم: <math>\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}</math>.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) نادرست (ص ۲۱)      ب) نادرست (ص ۳۹)      پ) نادرست (ص ۴۲)</p> <p>ت) درست (ص ۸۱)</p>
۵۹	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس ..... گویند.</p> <p>ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.</p> <p>پ) در حالتی که <math>\frac{c}{a} = 1</math> بیضی به یک ..... تبدیل می‌شود.</p> <p>ت) بردار <math>\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}</math> در فضا سه بعدی بر صفحه‌ی مختصات سه بعدی ..... منطبق است.</p> <p>(<math>xOz, yOz, xOy</math>)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) قطری (ص ۱۲)      ب) مشترک (ص ۳۶)      پ) پاره خط (ص ۴۹)</p> <p>ت) <math>yOz</math> (ص ۷۳)</p>
۶۰	<p>سه بردار <math>\vec{a} = (2, 3, 1)</math> و <math>\vec{b} = (-1, 1, 0)</math> و <math>\vec{c} = (2, 1, -2)</math> مفروض اند.</p> <p>الف) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{b}</math> و <math>-\vec{c}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> تولید می‌شود را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>الف) برداری عمود بر دو بردار <math>-\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> برابر است با:</p> <p><math>(-\vec{b}) \times \vec{c} = (2, -2, 0) \times (2, 1, -2) = (4, 4, 4)</math></p> <p>ب) حجم متوازی السطوح تولید شده توسط سه بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> برابر است با:</p> <p><math> \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})  =  (2, 3, 1) \cdot (-2, -2, -3)  = 13</math></p> <p>پاسخ: ۱</p>

۶۱	<p>ثابت کنید: دو بردار غیرصفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر <math>\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}</math>.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow  \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{0}  \Leftrightarrow  \vec{a}   \vec{b}  \times \sin \theta = 0 \quad \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ $\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
۶۲	<p>اگر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> بردارهایی باشند به ترتیب با طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این ویژگی که <math>\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}</math>، مقدار عددی عبارت <math>\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} ^2 =  \vec{0} ^2 \Rightarrow  \vec{a} ^2 +  \vec{b} ^2 +  \vec{c} ^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$ $\Rightarrow 1 + 4 + 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = -7$
۶۳	<p>اگر <math>\vec{a} = (1, -3, 4)</math>، <math>\vec{b} = (3, -4, 2)</math> و <math>\vec{c} = (-1, 1, 4)</math> باشند آن‌گاه تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> بر امتداد <math>\vec{b} + \vec{c}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6), \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{ \vec{b} + \vec{c} ^2} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{35}{49} (2, -3, 6)$
۶۴	<p>در فضای <math>R^3</math>، نقطه A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحه <math>YOZ</math> و نقطه <math>B = (-4, 6, -3)</math> مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>نقطه <math>A = (0, 2, 3)</math> و مختصات وسط AB برابر است با: <math>(-2, 4, 0)</math></p>
۶۵	<p>معادلات <math>\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}</math> مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات <math>R^3</math> است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>محور Z ها</p>
۶۶	<p>اگر <math>y = b</math> معادله‌ی صفحه‌ای در فضای <math>R^3</math> باشد که از نقطه <math>A = (2, -3, 4)</math> بگذرد، مقدار عددی b چه قدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p><math>b = -3</math></p>



۶۷	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و ۲ یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و <math>rA = rB</math> آن گاه داریم: <math>A = B</math>.</p> <p>ب) مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.</p> <p>پ) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.</p> <p>ت) اگر زاویه بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ الف) درست ب) نادرست پ) درست ت) نادرست</p>
۶۸	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر ماتریس <math>\begin{bmatrix} 2 &amp; 0 &amp; f \\ 0 &amp; a &amp; 0 \\ e &amp; c &amp; b \end{bmatrix}</math> اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ..... است.</p> <p>ب) اگر صفحه‌ی P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک ..... است.</p> <p>پ) در بیضی، در حالتی که <math>\frac{c}{a} = 0</math> بیضی به ..... تبدیل می‌شود.</p> <p>ت) در فضای <math>R^3</math>، نقطه <math>(-3, 2, -5)</math> در ناحیه (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ الف) ۸ ب) خط پ) دایره ت) ۶</p>
۶۹	<p>مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار <math>\vec{a} = (3, 2, 1)</math> و <math>\vec{b} = (2, 0, 1)</math> به وجود می‌آید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} \times \vec{b} = (3, 2, 1) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$ $S =  \vec{a} \times \vec{b}  = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}$
۷۰	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = \frac{2 + 1 + 0}{1 + 1 + 0} (1, -1, 0) = \frac{3}{2} (1, -1, 0)$
۷۱	<p>برای هر دو بردار غیرصفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> ثابت کنید: اگر <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 0</math> باشد آن گاه <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> بر هم عمودند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta = 0 \xrightarrow{ \vec{a} ,  \vec{b}  \neq 0} \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

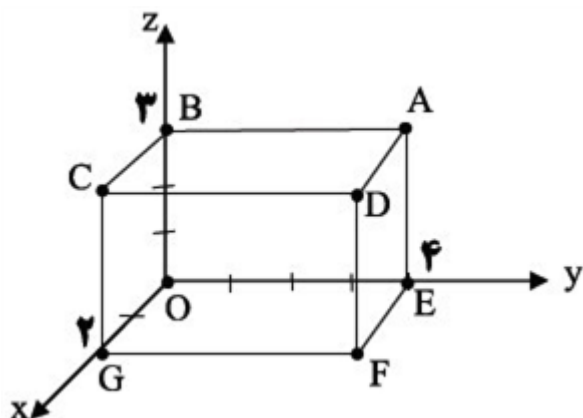
۷۲	<p>دو بردار <math>\vec{a} = (1, 2, -1)</math> و <math>\vec{b} = (0, 2, -1)</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) بردار <math>\vec{a}</math> در کدام ناحیه از فضای <math>R^3</math> واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود)</p> <p>ب) طول بردار <math>\vec{a} - \vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ: ۱ الف) بردار <math>\vec{a}</math> در ناحیه ۵ واقع است.</p> <p>ب) <math>2\vec{a} - \vec{b} = (2, 2, -1) \Rightarrow  2\vec{a} - \vec{b}  = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3</math></p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۷۳	<p>نقاط <math>A = (1, 2, 1)</math> و <math>B = (2, 2, 1)</math> و <math>C = (3, 2, -1)</math> را در فضا در نظر می‌گیریم، کدام‌ها روی خط <math>\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}</math> قرار دارند؟ چرا؟</p> <p>پاسخ: ۱ نقاط <math>A, B</math> زیرا در این دو نقطه <math>y = 2</math> و <math>z = 1</math> می‌باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۷۴	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر برای ماتریس‌های متمایز <math>A, B</math> و <math>C</math> داشته باشیم، <math>AB = AC</math>، آن‌گاه لزوماً <math>B = C</math> است.</p> <p>ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع <math>d, d'</math> به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد.</p> <p>پ) نقطه <math>(3, -2)</math> روی دایره <math>x^2 + y^2 + 2x = 0</math> قرار دارد.</p> <p>ت) برای دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math>، حاصل <math>\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0</math> است.</p> <p>پاسخ: ۱ الف) نادرست      ب) درست      پ) نادرست      ت) درست</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۷۵	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ..... .</p> <p>ب) در حالتی که صفحه‌ی <math>P</math> بر محور سطح مخروطی <math>\alpha</math> عمود نباشد و با مولد آن <math>d</math> نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک ..... خواهد بود.</p> <p>پ) رأس سهمی به معادله <math>y^2 + 2x - 2y = 0</math> نقطه به مختصات ..... است.</p> <p>ت) حاصل ضرب خارجی دو برابر غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> که با هم موازی هستند، برابر بردار ..... است.</p> <p>پاسخ: ۱ الف) ندارد      ب) بیضی      پ) <math>(\frac{1}{2}, 1)</math>      ت) صفر</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>

۷۶	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> پیدا کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>الف) <math>\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} } = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}</math></p> <p>ب) <math>\vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, 2) \times (1, -1, 0) = (2, 2, -1)</math></p> <p>پاسخ: ۱</p>
۷۷	<p>اگر <math>\vec{a} = (2, -1, 3)</math> و <math>\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}</math> باشد اندازه بردار <math>\vec{a} + 2\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p><math>\vec{a} + 2\vec{b} = (2, -1, 3) + 2(1, 2, 0) = (4, 3, 3)</math></p> <p><math> \vec{a} + 2\vec{b}  = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}</math></p> <p>پاسخ: ۱</p>
۷۸	<p>نمودار مربوط به معادلات <math>\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}</math> در فضای <math>R^3</math> چه شکلی است؟ و چه ارتباطی با نمودار <math>x = 0</math> دارد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p> <p>محور <math>y</math>ها است. معادله <math>x = 0</math> معادله صفحه <math>yz</math> که شامل محور <math>y</math>ها است.</p> <p>پاسخ: ۱</p>
۷۹	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (-2, 0, 2)</math> و <math>\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) تصویر قائم بردار <math>\vec{a} + \vec{b}</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p> <p>الف) <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 0, 2) \cdot (0, 2, 2) = 4</math> <math> \vec{a}  =  \vec{b}  = 2\sqrt{2}</math></p> <p><math>\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} } = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ</math></p> <p><math>\vec{a} + \vec{b} = (-2, 0, 2) + (0, 2, 2) = (-2, 2, 4)</math></p> <p>ب) <math>(\vec{a} + \vec{b})' = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = \frac{12}{8} (0, 2, 2) = (0, 3, 3)</math></p> <p>پاسخ: ۱</p>

۸۰	<p>دو بردار <math>\vec{a} = (3, -2, 1)</math>، <math>\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) بردار <math>\vec{a}</math> در کدام ناحیه از فضای <math>R^3</math> واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود).</p> <p>ب) طول بردار <math>\vec{a} + 2\vec{b}</math> را حساب کنید.</p> <p>پ) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را پیدا کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p> <p>پاسخ: ۱ الف) بردار <math>\vec{a}</math> در ناحیه چهارم</p> <p>ب) <math>\vec{a} + 2\vec{b} = (3, -2, 1) + 2(-2, 1, -1) = (-1, 0, -1)</math></p> <p><math> \vec{a} + 2\vec{b}  = \sqrt{2}</math></p> <p>پ) ضرب خارجی دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> بر آن‌ها عمود است.</p> <p><math>\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i &amp; j &amp; k \\ 3 &amp; -2 &amp; 1 \\ -2 &amp; 1 &amp; -1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)</math></p>
۸۱	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>نقطه <math>A(2, -3, 0)</math> روی صفحه <math>xoy</math> قرار دارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ درست (۰/۲۵)</p>
۸۲	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>حاصل ضرب داخلی دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> که بر هم عمود هستند، برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ صفر یا ۰ <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 0</math> (۰/۲۵)</p>
۸۳	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>اگر برای دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> داشته باشیم: <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b} </math> در این صورت <math>\theta = \frac{\pi}{4}</math> است <math>\theta</math> زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>
۸۴	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>اگر <math>\vec{i}</math>، <math>\vec{j}</math> و <math>\vec{k}</math> بردارهای یک‌ه در فضای <math>R^3</math> باشند، حاصل <math>(\vec{i} \times \vec{j}) \cdot \vec{k}</math> برابر است با .....</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ ۱</p>
۸۵	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>برای بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> در <math>R^3</math> داریم: <math>\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}</math></p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>

	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>اگر برای دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> داشته باشیم: <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b} </math>، در این صورت زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ صفر</p>	۸۶
	<p>اگر بردار <math>\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)</math> باشد، ثابت کنید:</p> $\vec{a} \cdot \vec{a} =  \vec{a} ^2$ <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 =  \vec{a} ^2$	۸۷
	<p>اگر <math>A = (-1, 2, 0)</math> و <math>B = (1, 0, -1)</math> و <math>C = (0, -1, 1)</math> سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{AB} = (2, -2, -1), \vec{AC} = (1, -3, 1)$ $S = \frac{1}{2}  \vec{AB} \times \vec{AC}  = \frac{1}{2}  (-5, -3, -4)  = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 9 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{50}$	۸۸
	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (1, 2, 3)</math> و <math>\vec{b} = (-2, 0, 2)</math> مفروض‌اند:</p> <p>الف) تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) طول بردار <math>\vec{a} - \vec{b}</math> را محاسبه کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) <math>\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b} = \frac{(1, 2, 3) \cdot (-2, 0, 2)}{(-2, 0, 2) \cdot (-2, 0, 2)} (-2, 0, 2) = \frac{-2 + 6}{4 + 4} (-2, 0, 2) = (-1, 0, 1)</math></p> <p>ب) <math>\vec{a} - \vec{b} = 2(1, 2, 3) - (-2, 0, 2) = (4, 4, 4),  \vec{a} - \vec{b}  = \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{48}</math></p>	۸۹

وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمتهایی از صفحات به معادلات  $x = 0, x = 2$  و  $y = 0, y = 4$  و  $z = 0, z = 3$  هستند. الف) مختصات نقطه A را مشخص کنید. ب) معادلات مربوط به یال AD و وجه CDFG را بنویسید.



۹۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸

الف)  $A(0, 4, 3)$

پاسخ: ۱

ب)  $AD : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$   $CDFG : \begin{cases} x = 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$

سه بردار  $\vec{a} = (2, 3, 1)$  و  $\vec{b} = (-1, 1, 0)$  و  $\vec{c} = (2, 1, -2)$  مفروض‌اند. الف) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{c}$  را به دست آورید. ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید می‌شود را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

پاسخ: ۱ الف) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (1, 4, 1) \times (2, 1, -2) = (-9, 4, -7)$$

ب) حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط سه بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$\text{حجم} = |(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))| = |(2, 3, 1) \cdot (-2, -2, -3)| = |-13| = 13$$

۹۱

اگر  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  بردارهای واحد در  $R^3$  باشند، حاصل  $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$  را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸

$$\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i} \cdot (\vec{j}) = |\vec{i}|^2 = 1$$

پاسخ: ۱

۹۲

	<p>ثابت کنید اگر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> در یک راستا باشند آنگاه تصویر قائم <math>\vec{a}</math> بر امتداد <math>\vec{b}</math>، برابر خود <math>\vec{a}</math> می‌شود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> $\vec{a} = r \vec{b}$ $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = \frac{(r \vec{b}) \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = \frac{r  \vec{b} ^2}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = r \vec{b} = \vec{a}$	۹۳
	<p>نقاط <math>A(3, 1, 2)</math> و <math>B(3, -2, 2)</math> در <math>R^3</math> مفروض‌اند: الف) طول پاره‌خط AB را به دست آورید. ب) معادلات مربوط به پاره‌خط AB را بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>الف) <math> AB  = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-1)^2 + (2-2)^2} = 3</math></p> <p>ب) <math>\begin{cases} x = 3 \\ -2 \leq y \leq 1 \\ z = 2 \end{cases}</math></p>	۹۴
	<p>اگر طول بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> به ترتیب ۴ و ۶ و <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 12</math> باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p> <p>پاسخ: ۱ روش اول:</p> $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} } = \frac{12}{4 \times 6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ (} 0/25 \text{)}$ $S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}  \vec{a} \times \vec{b}  = \frac{1}{2}  \vec{a}   \vec{b}  \sin \theta = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (} 0/25 \text{)}$ <p>روش دوم:</p> $ \vec{a} \times \vec{b} ^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 =  \vec{a} ^2  \vec{b} ^2 \text{ (} 0/25 \text{)} \rightarrow  \vec{a} \times \vec{b} ^2 + (12)^2 = (4)^2 (6)^2 \text{ (} 0/5 \text{)}$ $\rightarrow  \vec{a} \times \vec{b}  = 12\sqrt{3} \text{ (} 0/25 \text{)}$ $S = \frac{1}{2}  \vec{a} \times \vec{b}  = 6\sqrt{3} \text{ (} 0/25 \text{)}$ <p>مساحت مثلث برابر است با:</p>	۹۵

۹۶

مقدار  $m$  را طوری تعیین کنید که سه بردار  $\vec{a} = (1, m, -11)$ ,  $\vec{b} = (2, 3, -1)$  و  $\vec{c} = (1, -1, 3)$  در یک صفحه باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\vec{b} \times \vec{c} = (2, 3, -1) \times (1, -1, 3) = (8, -7, -5) \quad (0/25)$$

پاسخ: ۱

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \xrightarrow{(0/25)} (1, m, -11) \cdot (8, -7, -5) = 8 - 7m + 55 = 0 \xrightarrow{(0/25)} m = 9 \quad (0/25)$$

۹۷

ثابت کنید: دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با هم موازی هستند اگر و فقط اگر  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{|\vec{a} \times \vec{b}| = 0}_{0/25} \Leftrightarrow \underbrace{|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0}_{0/25} \Leftrightarrow \begin{matrix} |\vec{a}| \neq 0 \text{ و } |\vec{b}| \neq 0 \\ \hline \sin \theta = 0 \end{matrix}$$

پاسخ: ۱

$$\underbrace{\sin \theta = 0}_{0/25} \Leftrightarrow \underbrace{\theta = 0 \vee \theta = \pi}_{0/25} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

۹۸

بردارهای  $\vec{a} = (1, -3, 2)$  و  $\vec{b} = (-2, 1, -5)$  را در نظر بگیرید.

الف) تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}$  به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

پاسخ: ۱ الف)

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{-2 - 3 - 10}{\sqrt{4 + 1 + 25}} (-2, 1, -5) = \frac{-1}{\sqrt{30}} (-2, 1, -5) \quad \text{یا} \quad \left(1, -\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1, -3, 2) \times (-2, 1, -5) = (13, 1, -5) \quad (0/5)$$

ب)

$$(\vec{b} \times \vec{a} = (-2, 1, -5) \times (1, -3, 2) = (-13, -1, 5) \quad (0/5) \quad \text{یا} \quad (13, 1, -5) \quad (0/5))$$



اگر  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = (1, 2, 1)$  باشد، طول بردار  $\vec{a} - 2\vec{b}$  را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

$$\vec{a} - 2\vec{b} = \underbrace{(2, 0, -1)}_{(0/25)} - \underbrace{(2, 4, 2)}_{(0/25)} = (0, -4, -3) \quad (0/25), \quad |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{16 + 9} = 5 \quad (0/25)$$

پاسخ: ۱

۹۹

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه  $A = (2, 3, 4)$  بگذرد و با صفحه  $xoy$  موازی باشد.

ب) معادلات  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  مربوط به کدام محور است؟

پ) در فضای  $R^3$ ، نقطه  $A$  به طول ۲ روی محور طولها و نقطه  $B = (-4, 6, -3)$  مفروض‌اند. مختصات وسط  $AB$  را بیابید.

۱۰۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸

ب) محور  $y$ ها  $(0/5)$

پاسخ: ۱ الف)  $z = 4$   $(0/5)$

پ) نقطه  $A = (2, 0, 0)$   $(0/25)$  و مختصات وسط  $AB$  برابر است با:  $(0/25) \left(-1, 3, \frac{-3}{2}\right)$

بخش اول، به سه روش زیر قابل حل است:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \\ \begin{cases} (-m, 2, -m-4) \cdot (-m, -4, m) \\ = 0 \Rightarrow m = -2 \\ |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \Rightarrow m = -2 \end{cases} \end{cases}$$

چهارضلعی بنا شده روی بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  لوزی است

$$\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow m = -2$$

بخش دوم، به سه روش زیر قابل حل است:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-6, 0, -6) \Rightarrow \begin{cases} V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = 72 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 72 \Rightarrow V = 72 \\ h = |\vec{a} \times \vec{b}| \Rightarrow V = Sh = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \right|^2 = 72 \end{cases}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 6\sqrt{3}, \sin \theta = \frac{6\sqrt{3}}{6 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{3}$$

$$a. (a-b) = |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 4^2 - 4 \times 3 \times \left(\pm \frac{1}{3}\right) = 16 \pm 4$$

$$\vec{a} = (-1, 0, -\sqrt{3})$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} (-1, 0, -\sqrt{3}) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2} \right), |\vec{b}'| = \sqrt{3}$$

$$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} \quad \text{ب) بردار صفر یا } \vec{O}$$

$$x = 2 \quad \text{الف) ۴}$$

$$\text{نادرست} \quad \text{۵}$$

$$S = \frac{1}{3} \left| 2\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) \right| = \frac{1}{3} \left| 2\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} \right| \quad (\text{ص ۸۴})$$

$$S = \frac{1}{3} \left| 0 + 2\vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \theta| = 5 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2, 1, 2) \quad (\text{ص ۸۴})$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} = \frac{(-2-3+8)}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} (-2, 1, 2) = \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{ص ۸۴})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} = (-3, 5, 7)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 12 = 10 \times 2 \times \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5} \quad (\text{ص ۸۴})$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \quad (\theta \text{ حاده است})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 2 \times 10 \times \frac{4}{5} = 16$$

پ (درست ص ۷۵)

ب (درست ص ۳۹)

الف (نادرست ص ۲۲)

$$k = \frac{1}{2} \quad (\text{الف ص ۱۲})$$

ب (دو خط متقاطع ص ۳۹)

پ (یک ص ۸۲ و ۸۳)

$$V = 0 \Rightarrow \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{j} = (-2, -1, 1), \vec{u} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}, |\vec{u} \times \vec{b}| = \sqrt{75}$$

$$S = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad (\text{ص ۷۵ و ۸۴})$$

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{v} = 2\vec{c} - \vec{b} = (3, -4, 0) \Rightarrow |\vec{v}| = 5, \vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \vec{v} \Rightarrow \vec{u}' = \left( -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right) \quad (\text{ص ۷۵ و ۸۴})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 2m = (\sqrt{m^2 + 4})(2\sqrt{2}) \left( \frac{1}{2} \right) \Rightarrow 4m^2 = 2m^2 + 8$$

$$\Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 & \text{ق ق} \\ m = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases} \quad (\text{ص ۷۸})$$

۱۶ صفر (ص ۸۲)

۱۷ درست (ص ۶۴)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (4k, -4k, 2k)$$

$$|\vec{b}| = 6|k| = 12 \Rightarrow k = \pm 2 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \vec{b} = (-8, 8, -4) \quad (\text{ص ۸۲})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 3 = 3\sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ \quad (\text{ص ۷۸})$$

حجم متوازی السطوح برابر با حاصل ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است. (ص ۸۳)

حجم متوازی السطوح برابر ۲ است.  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = 2$

مساحت قاعده این متوازی السطوح که توسط بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید می شود برابر با:  $|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{3}$  است.

$$h = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{در نتیجه:}$$

روش اول: بردار  $\vec{a}'$  با بردار  $\vec{b}$  موازی است،  $\vec{a}' = k\vec{b}$ ،  $\vec{a}' \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b}$  (ص ۷۹)

$$(\vec{a} - \vec{a}') \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

روش دوم: در مثلث قائم الزاویه، زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را  $\theta$  می نامیم

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta$$

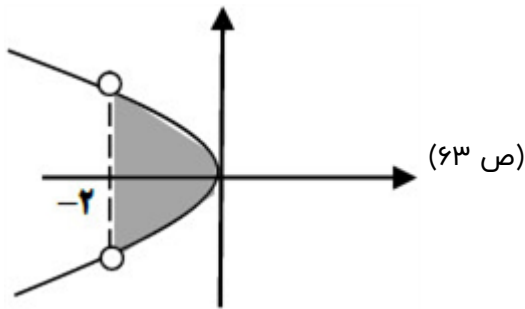
$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'| = k|\vec{b}| \Rightarrow k = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}| |\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|^2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

مختصات نقطه  $A(0, 0, 3)$ ، مختصات وسط AB برابر با  $M\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$  و فاصله تا مبدأ مختصات  $\frac{\sqrt{17}}{2}$  است. (ص ۶۶)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (ص ۸۱ و ۸۲)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۸۰)



الف)  $\vec{b} = (2, 0, 2), |\vec{b} - \vec{c}| = |(2, -2, 1)| = 3$  (ص ۷۶)

ب)  $\vec{b} + \vec{c} = (1, 2, 2)$  (ص ۸۱)

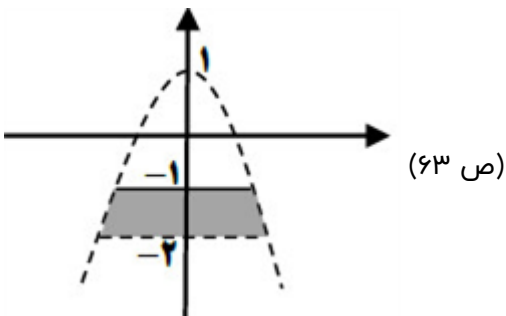
$S = |\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})| = |(8, -5, 1)| = 3\sqrt{10}$

$\vec{a} = r\vec{b}$

$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(r\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{r|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = r\vec{b} = \vec{a}$  (ص ۸۰)

$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-n}{\sqrt{2} \times \sqrt{4+1+n^2}} \Rightarrow \frac{n-2}{\sqrt{n^2+5}} = 1$

$n^2 + 5 = n^2 - 4n + 4 \Rightarrow n = -\frac{1}{4}$  (ص ۷۸)



$z = 3$  (ص ۶۸)

$$(\vec{b} \times \vec{c}) = (6, 4, -4) \text{ (ص ۸۳)}$$

$$v = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = |(1, 0, 1) \cdot (6, 4, -4)| = 10$$

اگر دانش‌آموز به صورت زیر حل کند نمره کامل داده شود:

$$v = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \right| = 10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 10 = 3 \times 5 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 5\sqrt{5} \Rightarrow s_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ (ص ۸۴)}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 2(m+1) + 3m - 2 = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ (ص ۷۹)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5 \text{ (ص ۷۳)}$$

رسم نمودار (به طوری که نقطه توپر و توخالی مشخص باشد) (ص ۶۳)

درست (ص ۷۵)

عرض‌ها یا محور yها (ص ۶۷)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \text{ (ص ۷۹)}$$

$$\vec{AB} = (1, 2, 1), \vec{AC} = (-3, 2, -3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-8, 0, 8), S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 4\sqrt{2} \text{ (ص ۸۴)}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ = 2(6)(4) \left( \frac{1}{2} \right) = 24 \text{ (ص ۸۱)}$$

$$\text{الف) } \vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, 0, 1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 1 = \sqrt{14} \sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{7}} \text{ (ص ۷۸)}$$

$$\text{ب) } \vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (1, -2, 0) \text{ (ص ۷۹)}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} \vec{d} = \frac{-4}{5} (1, -2, 0)$$

۴۴ الف CDFG

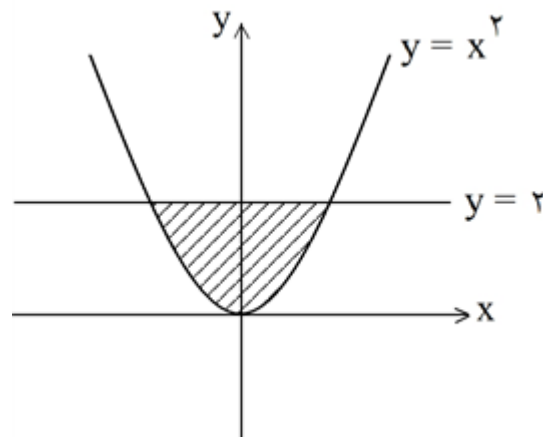
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{ب}$$

ت)  $y = 2$  (ص ۶۸)

پ)  $D(2, 4, 3)$

۴۵ رسم نمودار (ص ۵۵)

$y = x^2$  نمودار یک سهمی است و  $y \geq x^2$  داخل این سهمی است و  $y \leq 2$  نقاط زیر خط  $y = 2$  هستند، پس ناحیه  $x^2 \leq y \leq 2$  هاشورخورده می‌باشد.



۴۶ نادرست،  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  (ص ۷۹)

۴۷ صفر (ص ۸۴)

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow 12 = 3(26) \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{5}{13} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 3(26) \frac{5}{13} = 30$$

الف)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 1 + 0 = 3 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, 2) \times (1, -1, 0) = (2, 2, -1)$$

ب) بردار عمود بر دو بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$A = (2, 0, 0), B = (0, -3, 4)$$

$$M = \left( \frac{2+0}{2}, \frac{0+(-3)}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = \left( 1, \frac{-3}{2}, 2 \right)$$

$$OM = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{29}{4}}$$

مختصات وسط پاره‌خط AB برابر است با:

ت) صفر

پ) خارج

ب) مشترک

۵۲ الف) ماتریس

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow (0, m, -1) \cdot (3, -3, -3) = 0 \Rightarrow -3m + 3 = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ (ص ۸۲)}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{3 \times 26} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{5}{13} \xrightarrow{\theta < 90^\circ}$$

روش اول: ۵۵

$$\cos \theta = \frac{5}{13} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 30 \text{ (ص ۸۴)}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Rightarrow 72^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 3^2 \times 26^2$$

روش دوم:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 900 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \pm 30 \xrightarrow{\theta < 90^\circ} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 30$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + 2 \times 0 = 3, \vec{b} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$a' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3}{2} (1, -1, 0) = \left( \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0 \right) \text{ (ص ۸۵)}$$

الف)  $A = (2, 0, 0), B = (1, 0, 3)$

ب)  $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (0-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$

پ)  $M = \left( \frac{2+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left( \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2} \right)$  (ص ۷۶ و ۶۶)

۵۷

الف) نادرست (ص ۲۱) ۵۸  
درست (ص ۸۱)

الف) قطری (ص ۱۲) ۵۹  
yoz (ص ۷۳)

ب) مشترک (ص ۳۶)

پ) پاره خط (ص ۴۹)

ت)

الف) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{b}$  و  $-\vec{b}$  برابر است با: ۶۰

$$(-2\vec{b}) \times \vec{c} = (2, -2, 0) \times (2, 1, -2) = (4, 4, 4)$$

ب) حجم متوازی السطوح تولید شده توسط سه بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(2, 3, 1) \cdot (-2, -2, -3)| = 13$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{0}| \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \xrightarrow{|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0}$$

$$\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

۶۱



$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= |\vec{0}|^2 \Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \\ \Rightarrow 1 + 4 + 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) &= 0 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = -7 \end{aligned}$$

۶۲

$$\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6), \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|^2} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{35}{49} (2, -3, 6)$$

۶۳

نقطه  $A = (0, 2, 3)$  و مختصات وسط AB برابر است با:  $(-2, 4, 0)$  ۶۴

محور  $Z$  ها ۶۵

$$b = -3$$

۶۶

ت) نادرست

پ) درست

ب) نادرست

الف) درست ۶۷

ت) ۶

پ) دایره

ب) خط

الف) ۸ ۶۸

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, 2, 1) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{2 + 1 + 0}{1 + 1 + 0} (1, -1, 0) = \frac{3}{2} (1, -1, 0)$$

۶۹

۷۰

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

۷۱

الف) بردار  $\vec{a}$  در ناحیه ۵ واقع است. ۷۲

$$\vec{a} - \vec{b} = (2, 2, -1) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

نقاط  $A, B$  زیرا در این دو نقطه  $y = 2$  و  $z = 1$  می‌باشد. ۷۳

ت) درست

پ) نادرست

ب) درست

الف) نادرست ۷۴

ت) صفر

پ)  $(\frac{1}{2}, 1)$

ب) بیضی

الف) ندارد ۷۵

$$\text{الف) } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

۷۶

$$\text{ب) } \vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, 2) \times (1, -1, 0) = (2, 2, -1)$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, -1, 2) + 2(1, 2, 0) = (4, 3, 2)$$

۷۷

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$$

محور yها است. معادله  $x = 0$  معادله صفحه yz که شامل محور yها است.  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

۷۸

$$\text{الف) } \vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 0, 2) \cdot (0, 2, 2) = 4 \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

۷۹

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-2, 0, 2) + (0, 2, 2) = (-2, 2, 4)$$

$$\text{ب) } (\vec{a} + \vec{b})' = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{12}{8} (0, 2, 2) = (0, 3, 3)$$

الف) بردار  $\vec{a}$  در ناحیه چهارم

۸۰

$$\text{ب) } \vec{a} + 2\vec{b} = (3, -2, 1) + 2(-2, 1, -1) = (-1, 0, -1)$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$$

پ) ضرب خارجی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر آن‌ها عمود است.

درست (۰/۲۵)

۸۱

صفر یا (۰/۲۵)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

۸۲

نادرست

۸۳

۱

۸۴

درست

۸۵

صفر

۸۶

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

۸۷

$$\vec{AB} = (2, -2, -1), \vec{AC} = (1, -3, 1)$$

۸۸

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(-5, -3, -4)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{25 + 9 + 16} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{50}$$

الف)  $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b} = \frac{(1, 2, 3) \cdot (-2, 0, 2)}{(-2, 0, 2) \cdot (-2, 0, 2)} (-2, 0, 2) = \frac{-2 + 6}{4 + 4} (-2, 0, 2) = (-1, 0, 1)$

۸۹

ب)  $2\vec{a} - \vec{b} = 2(1, 2, 3) - (-2, 0, 2) = (4, 4, 4), |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{48}$

الف)  $A(0, 4, 3)$

۹۰

ب)  $AD : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \quad CDFG : \begin{cases} x = 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$

۹۱ الف) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (1, 4, 1) \times (2, 1, -2) = (-9, 4, -7)$$

ب) حجم متوازی السطوح تولید شده توسط سه بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$\text{حجم} = |(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))| = |(2, 3, 1) \cdot (-2, -2, -3)| = |-13| = 13$$

$$\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i} \cdot (\vec{j}) = |\vec{i}|^2 = 1$$

۹۲

$$\vec{a} = r \vec{b}$$

۹۳

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(r \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{r |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = r \vec{b} = \vec{a}$$

الف)  $|AB| = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-1)^2 + (2-2)^2} = 3$

۹۴

ب)  $\begin{cases} x = 3 \\ -2 \leq y \leq 1 \\ z = 2 \end{cases}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{12}{4 \times 6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad (0/25)$$

روش اول: ۹۵

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \quad (0/25)$$

روش دوم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \quad (0/25) \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (12)^2 = (4)^2 (6)^2 \quad (0/5)$$

$$\rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 12\sqrt{3} \quad (0/25)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = 6\sqrt{3} \quad (0/25)$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$\vec{b} \times \vec{c} = (2, 3, -1) \times (1, -1, 3) = (8, -7, -5) \quad (0/25)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \cdot \frac{(0/25)}{1} (1, m, -1) (8, -7, -5) = 8 - 7m + 5 = 0 \cdot \frac{(0/25)}{1} m = 9 \quad (0/25)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \quad \begin{matrix} |\vec{a}| \neq 0 & |\vec{b}| \neq 0 \\ \hline \end{matrix}$$

$$\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{-2-3-10}{4+1+25} (-2, 1, -5) = \frac{-1}{30} (-2, 1, -5) \text{ یا } \left(1, -\frac{1}{30}, \frac{5}{30}\right)$$

الف) ۹۸

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1, -3, 2) \times (-2, 1, -5) = (13, 1, -5) \quad (0/5)$$

ب)

$$(\vec{b} \times \vec{a} = (-2, 1, -5) \times (1, -3, 2) = (-13, -1, 5) \quad (0/5) \text{ یا } )$$

$$\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 0, -1) - (2, 4, 2) = (0, -4, -3) \quad (0/25), |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{16+9} = 5 \quad (0/25)$$

۹۹

پ) نقطه  $A = (۲, ۰, ۰)$  (۰/۲۵) و مختصات وسط  $AB$  برابر است با:  $(۰/۲۵) \left(-۱, ۳, \frac{-۳}{۲}\right)$

۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

