



p30konkor.com

عنوان آزمون : هندسه ۱۲ فصل ۳

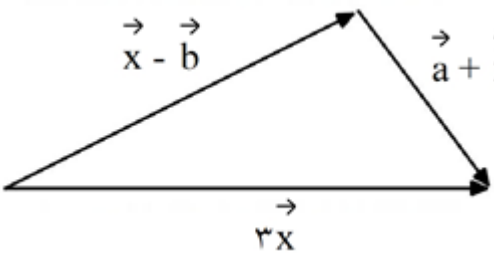
زمان آزمون :

تاریخ برگزاری

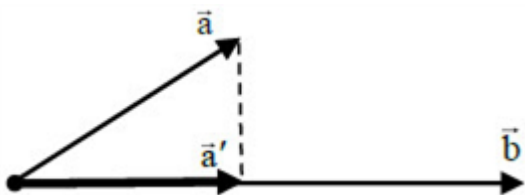
نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

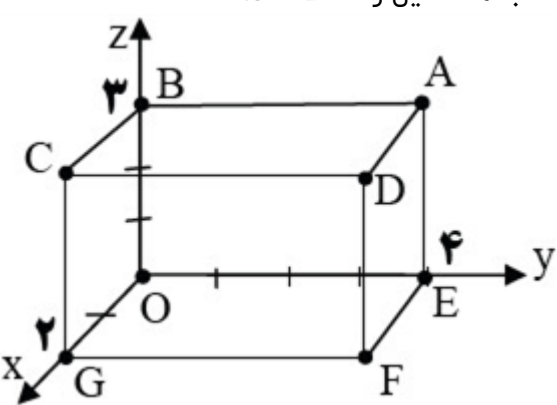
ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	دو بردار $\vec{a} = (-m, -1, -2)$ و $\vec{b} = (0, -3, m+2)$ مفروض‌اند. اگر دو بردار $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ ساخته می‌شود را به دست آورید.	
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳	
۲	اگر مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود $6\sqrt{3}$ باشد و $\vec{a} = 4$ ، $\vec{b} = 3$ ، حاصل $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$ را به دست آورید.	
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳	
۳	اگر $\vec{a} = -\vec{i} - \sqrt{3}\vec{k}$ و $\vec{b} = (\sqrt{3}, 2, 1)$ باشد. تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر $\vec{a}$ و اندازه بردار تصویر را به دست آورید.	
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳	
۴	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) معادله صفحه‌ای که موازی yoz است و از نقطه <math>A(2, -1, 3)</math> می‌گذرد، برابر با ..... است.</p> <p>ب) حاصل عبارت <math>\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k})</math> برابر ..... است.</p> <p>ج) در شکل مقابل بردار <math>\vec{x}</math> برحسب <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> برابر با ..... است.</p> 	
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳	
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط به معادله $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ بر صفحه xoz عمود است.	
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳	
۶	فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه $\frac{\pi}{4}$ می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $2\vec{a}$ تولید می‌شود را بیابید.	
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲	

۷	<p>اگر <math>\vec{a} = (1, -3, 4)</math> و <math>\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}</math> باشند، آنگاه تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> را بر امتداد بر بردار <math>\vec{a} - \vec{b}</math> بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۸	<p>بردارای عمود بر دو بردار <math>\vec{a} = (3, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, 2, -1)</math> بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۹	<p>اگر <math> \vec{a}  = 10</math> و <math> \vec{b}  = 2</math> و <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 12</math> باشند و زاویه بین دو بردار حاده باشد، مقدار <math> \vec{a} \times \vec{b} </math> را محاسبه کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۱۰	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>A_{n \times n}</math> ماتریس دلخواه <math>I_n</math> ماتریس همانی و <math>A^T - A = I</math> باشد، وارون ماتریس <math>A</math>، برابر <math>(I - A)</math> است.</p> <p>ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت <math>r</math> که بر دایره <math>C(O, r)</math> در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره <math>C'(O, 2r)</math> است.</p> <p>پ) بردار <math>\vec{a} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)</math>، یک بردار یکه است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۱۱	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) در ماتریس قطری <math>A = \begin{bmatrix} -3 &amp; 0 \\ 2k-1 &amp; 2 \end{bmatrix}</math>، مقدار <math>k</math> برابر ..... است.</p> <p>ب) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل ..... است.</p> <p>پ) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای واحد <math>\vec{i}</math> و <math>\vec{j}</math> و <math>\vec{k}</math> بنا می‌شود، برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۱۲	<p>اگر سه بردار <math>\vec{a} = (m, -1, 1)</math>، <math>\vec{b} = (1, -1, 1)</math> و <math>\vec{c} = (1, m, -1)</math> در یک صفحه واقع باشند، مقدار <math>m</math> را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p>
۱۳	<p>اگر <math>\vec{a} = (-2, 0, 1)</math> و <math>\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}</math> باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای <math>\vec{a} - \vec{j}</math> و <math>\vec{b}</math> تولید می‌شود را حساب کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p>
۱۴	<p>اگر <math>\vec{a} = (2, -1, 1)</math>، <math>\vec{b} = (-1, 2, 0)</math> و <math>\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}</math> باشد، تصویر قائم بردار <math>\vec{a} + \vec{b}</math> بر امتداد بردار <math>2\vec{c} - \vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p>
۱۵	<p>مقدار <math>m</math> را طوری بیابید که زاویه بین دو بردار <math>\vec{a} = (m, 0, 2)</math> و <math>\vec{b} = (2, -2, 0)</math> برابر <math>\frac{\pi}{3}</math> باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p>

۱۶	<p>جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید.  حاصل <math>\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k})</math> برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p>
۱۷	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.  نقطه <math>(-۲, ۳, -۱)</math> در ناحیه ششم مختصاتی قرار دارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p>
۱۸	<p>بردار <math>\vec{a} = (۴, -۴, ۲)</math> مفروض است. بردار <math>\vec{b}</math> غیرهم‌جهت با <math>\vec{a}</math> و به طول ۱۲ را طوری بیابید که  <math>\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}</math> باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۱۹	<p>زاویه بین دو بردار <math>\vec{a} = (۲, -۱, ۲)</math> و <math>\vec{b} = (۱, -۱, ۰)</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۰	<p>بردارهای <math>\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}</math>، <math>\vec{b} = (۰, ۱, ۱)</math> و <math>\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}</math> بر سه یال یک متوازی‌السطوح منطبق هستند. اگر  قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> تولید شود، اندازه ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۱	<p>نشان دهید: تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> روی بردار <math>\vec{b}</math> برابر <math>\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b}</math> است.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۲	<p>نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه <math>B(۱, ۰, ۱)</math> در فضا مفروض‌اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدأ  مختصات را حساب کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۳	<p>کدام‌یک از بردارهای زیر، بر راستای دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> عمود نیست.</p> <p>۱ <math>\sqrt{۳}\vec{a} \times \left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\vec{b}\right)</math>      ۲ <math>\vec{a} \times \vec{b}</math></p> <p>۳ <math>۲\vec{a} + ۳\vec{b}</math>      ۴ <math>\vec{b} \times \frac{\sqrt{۲}}{۵}\vec{a}</math></p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>

۲۴	<p>زاویه بین بردارهای غیرصفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math>، برابر <math>\theta</math> است. در کدامیک از موارد زیر حاصل ضرب داخلی آنها بیشتری مقدار را دارد.</p> <p> <math>\theta = 0</math> (۱)      <math>\theta = \frac{\pi}{3}</math> (۲)      <math>\theta = \frac{\pi}{2}</math> (۳)      <math>\theta = \frac{\pi}{3}</math> (۴) </p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>حاصل عبارت <math>\vec{i} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})</math> برابر صفر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۶	<p>در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات <math>\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}</math> خطی موازی محور ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۷	<p>شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط <math>x &gt; -2, x \leq 0, y^2 + x \leq 0</math> را در فضای دو بعدی رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>
۲۸	<p>سه بردار <math>\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}</math> و <math>\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}</math> و <math>\vec{c} = (0, 2, 1)</math> را در نظر بگیرید:</p> <p>الف) طول بردار <math>\vec{b} - \vec{c}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) مساحت متوازی الاضلاع که روی دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b} + \vec{c}</math> ایجاد می شود را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>
۲۹	<p>ثابت کنید اگر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم <math>\vec{a}</math> بر امتداد <math>\vec{b}</math>، برابر خود <math>\vec{a}</math> می شود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>
۳۰	<p>اگر زاویه بین دو بردار <math>\vec{a} = (2, -1, n)</math> و <math>\vec{b} = (1, 0, -1)</math> برابر با <math>135^\circ</math> درجه باشد، مقدار <math>n</math> را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>
۳۱	<p>شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط <math>-2 &lt; y \leq -1, y &lt; -x^2 + 1</math> را در فضای دو بعدی رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>
۳۲	<p>معادله صفحه ای که بر محور <math>z</math>ها در نقطه به مختصات <math>A = (0, 0, 3)</math> عمود باشد، به صورت ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>
۳۳	<p>حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار <math>\vec{a} = (1, 0, -1)</math> و <math>\vec{b} = (0, 2, 2)</math> و <math>\vec{c} = (2, -3, 0)</math> تولید می شود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p>

۳۴	<p>اگر <math> \vec{a}  = 3</math> و <math> \vec{b}  = 5</math> و حاصل ضرب داخلی دو بردار <math>10</math> باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> تولید می‌شود چقدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p>
۳۵	<p>مقدار <math>m</math> را چنان بیابید که دو بردار <math>\vec{a} = (2, m, -1)</math> و <math>\vec{b} = (m+1, 3, 2)</math> بر هم عمود باشند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p>
۳۶	<p>طول بردار <math>\vec{a} = (0, -3, 4)</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p>
۳۷	<p>شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه <math>y = x^2, -1 &lt; x \leq 2</math> را در فضای دو بعدی رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p>
۳۸	<p>اگر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> دو بردار دلخواه، <math>r</math> عدد حقیقی و <math>\vec{b} = r\vec{a}</math> آنگاه <math> \vec{b}  =  r   \vec{a} </math> (درست - نادرست)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p>
۳۹	<p>در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات <math>\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}</math>، معادله محور ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p>
۴۰	<p>برای دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> ثابت کنید دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> برهم عمودند اگر و فقط اگر <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 0</math>.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۴۱	<p>اگر <math>A = (2, -1, 3)</math> و <math>B = (3, 1, 4)</math> و <math>C = (-1, 1, 0)</math> سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۴۲	<p>دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> مفروض‌اند به طوری که <math> \vec{a}  = 6</math> و <math> \vec{b}  = 4</math> و زاویه بین آن‌ها <math>30^\circ</math> درجه است. مقدار عبارت <math> \vec{a} \times \vec{b} </math> را محاسبه کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۴۳	<p>سه بردار <math>\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}</math> و <math>\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}</math> و <math>\vec{c} = (0, 2, 1)</math> در نظر بگیرید:</p> <p>الف) زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> برابر با <math>\theta</math> باشد <math>\cos \theta</math> را بیابید.</p> <p>ب) تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> بر <math>\vec{b} - \vec{c}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>

۴۴	<p>با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.  الف) نام وجهی از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.  <math>x = 2, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 3</math>  ب) معادلات مربوط به پاره خط (یال) AD را بنویسید.  پ) مختصات نقطه D را بنویسید.  ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه XOZ باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۴۵	<p>شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه <math>x^2 \leq y \leq 2</math> را رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۴۶	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.  - برای دو بردار واحد <math>\vec{i}</math> و <math>\vec{j}</math> حاصل ضرب خارجی <math>\vec{i} \times \vec{j} = \vec{0}</math> است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۴۷	<p>عبارت زیر را کامل کنید.  - اگر سه بردار <math>\vec{a}</math>، <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح بنا شده توسط سه بردار برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>
۴۸	<p>بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> مفروض‌اند به طوری که <math>\vec{a} = 3</math> و <math>\vec{b} = 26</math> و <math> \vec{a} \times \vec{b}  = 72</math>. اگر زاویه بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار <math>\vec{a} \cdot \vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۴۹	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> را در نظر بگیرید.  الف) زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.  ب) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> پیدا کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۵۰	<p>اگر طول و عرض و ارتفاع اتاقی ۴ متر و ۵ متر و ۳ متر باشد طول قطر اتاق که دو نقطه مقابل را به هم وصل می‌کند را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>

۵۱	<p>در فضای سه بعدی نقطه A روی محور <math>x</math> ها به طول ۲ و نقطه B در صفحه <math>yOz</math> با عرض ۳- و ارتفاع ۴ مفروض است، فاصله وسط پاره خط AB تا مبدأ مختصات را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۵۲	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ..... نامیده می شود.</p> <p>ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همگی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.</p> <p>پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در ..... بیضی است.</p> <p>ت) اگر برای دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> داشته باشیم: <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b} </math>، در این صورت زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۵۳	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر A و B دو ماتریس <math>2 \times 2</math> باشند آن‌گاه: <math> AB  =  A   B </math></p> <p>ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (I) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.</p> <p>پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود.</p> <p>ت) نقطه با مختصات <math>(-2, 3, -4)</math> در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p>
۵۴	<p>مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار <math>\vec{a} = (2, -1, 3)</math> و <math>\vec{b} = (0, m, -1)</math> و <math>\vec{c} = (1, -2, 3)</math> در یک صفحه باشند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>
۵۵	<p>بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> به طول‌های <math> \vec{a}  = 3</math> و <math> \vec{b}  = 26</math> و اندازه ضرب خارجی <math> \vec{a} \times \vec{b}  = 72</math> مفروض‌اند. اگر زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> کم‌تر از <math>90^\circ</math> باشد مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>
۵۶	<p>تصویر قائم بردار <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>
۵۷	<p>نقطه A به طول ۲ روی محور <math>x</math> ها و نقطه B روی صفحه <math>xOz</math> به طول ۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه بعدی مفروض‌اند.</p> <p>الف) مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.</p> <p>ب) طول پاره خط AB را محاسبه کنید.</p> <p>پ) مختصات وسط پاره خط AB را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>

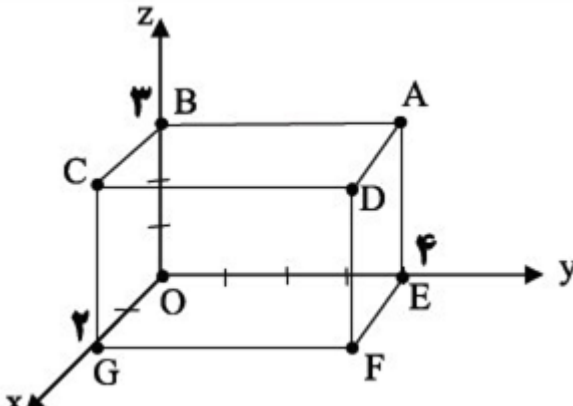
۵۸	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر A و B دو ماتریس <math>3 \times 3</math> دلخواه باشند آنگاه عبارت <math>(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T</math> همواره برقرار است.</p> <p>ب) اگر صفحه‌ی P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.</p> <p>پ) نقطه <math>(-2, 3)</math> روی دایره <math>x^2 + y^2 + 2x = 0</math> قرار دارد.</p> <p>ت) برای سه بردار <math>\vec{i}</math> و <math>\vec{j}</math> و <math>\vec{k}</math> به طول‌های واحد روی محوره‌های مختصات در <math>R^3</math> داریم: <math>\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}</math>.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>
۵۹	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطراصلی آن صفر باشند را ماتریس ..... گویند.</p> <p>ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.</p> <p>پ) در حالتی که <math>\frac{c}{a} = 1</math> بیضی به یک ..... تبدیل می‌شود.</p> <p>ت) بردار <math>\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}</math> در فضا سه بعدی بر صفحه‌ی مختصات سه بعدی ..... منطبق است.</p> <p>(xoz, yoz, xoy)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p>
۶۰	<p>سه بردار <math>\vec{a} = (2, 3, 1)</math> و <math>\vec{b} = (-1, 1, 0)</math> و <math>\vec{c} = (2, 1, -2)</math> مفروض‌اند.</p> <p>الف) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{b}</math> و <math>-\vec{c}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> تولید می‌شود را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۶۱	<p>ثابت کنید: دو بردار غیرصفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر <math>\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}</math>.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۶۲	<p>اگر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> بردارهایی باشند به ترتیب با طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این ویژگی که <math>\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}</math>، مقدار عددی عبارت <math>\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۶۳	<p>اگر <math>\vec{a} = (1, -3, 4)</math>، <math>\vec{b} = (3, -4, 2)</math> و <math>\vec{c} = (-1, 1, 4)</math> باشند آنگاه تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> بر امتداد <math>\vec{b} + \vec{c}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۶۴	<p>در فضای <math>R^3</math>، نقطه A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحه yoz و نقطه <math>B = (-4, 6, -3)</math> مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۶۵	<p>معادلات <math>\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}</math> مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات <math>R^3</math> است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>



۶۶	<p>اگر <math>y = b</math> معادله‌ی صفحه‌ای در فضای <math>R^3</math> باشد که از نقطه <math>A = (2, -3, 4)</math> بگذرد، مقدار عددی <math>b</math> چه قدر است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۶۷	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو ماتریس هم مرتبه و <math>r</math> یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و <math>rA = rB</math> آن‌گاه داریم: <math>A = B</math>.</p> <p>ب) مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط <math>d</math> در نقطه‌ی ثابت <math>A</math> مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط <math>d</math> در نقطه‌ی <math>A</math> است.</p> <p>پ) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.</p> <p>ت) اگر زاویه بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۶۸	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر ماتریس <math>\begin{bmatrix} 2 &amp; 0 &amp; f \\ 0 &amp; a &amp; 0 \\ e &amp; c &amp; b \end{bmatrix}</math> اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ..... است.</p> <p>ب) اگر صفحه‌ی <math>P</math> با مولد <math>(d)</math> موازی باشد و از رأس <u>سطح مخروطی عبور کند</u>، در این صورت فصل مشترک صفحه <math>P</math> و سطح مخروطی یک ..... است.</p> <p>پ) در بیضی، در حالتی که <math>\frac{c}{a} = 0</math> بیضی به ..... تبدیل می‌شود.</p> <p>ت) در فضای <math>R^3</math>، نقطه <math>(-3, 2, -5)</math> در ناحیه (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p>
۶۹	<p>مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار <math>\vec{a} = (3, 2, 1)</math> و <math>\vec{b} = (2, 0, 1)</math> به وجود می‌آید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۷۰	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۷۱	<p>برای هر دو بردار غیرصفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> ثابت کنید: اگر <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 0</math> باشد آن‌گاه <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> بر هم عمودند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۷۲	<p>دو بردار <math>\vec{a} = (1, 2, -1)</math> و <math>\vec{b} = (0, 2, -1)</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) بردار <math>\vec{a}</math> در کدام ناحیه از فضای <math>R^3</math> واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود)</p> <p>ب) طول بردار <math>\vec{a} - \vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۷۳	<p>نقاط <math>A = (1, 2, 1)</math> و <math>B = (2, 2, 1)</math> و <math>C = (3, 2, -1)</math> را در فضا در نظر می‌گیریم، کدام‌ها روی خط <math>\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}</math> قرار دارند؟ چرا؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>

۷۴	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر برای ماتریس‌های متمایز <math>A, B</math> و <math>C</math> داشته باشیم، <math>AB = AC</math>، آن‌گاه لزوماً <math>B = C</math> است.</p> <p>ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع <math>d, d'</math> به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد.</p> <p>پ) نقطه <math>(-2, 3)</math> روی دایره <math>x^2 + y^2 + 2x = 0</math> قرار دارد.</p> <p>ت) برای دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math>، حاصل <math>\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0</math> است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۷۵	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ..... .</p> <p>ب) در حالتی که صفحه‌ی <math>P</math> بر محور سطح مخروطی <math>\alpha</math> عمود نباشد و با مولد آن <math>d</math> نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک ..... خواهد بود.</p> <p>پ) رأس سهمی به معادله <math>y^2 + 2x - 2y = 0</math> نقطه به مختصات ..... است.</p> <p>ت) حاصل ضرب خارجی دو برابر غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> که با هم موازی هستند، برابر بردار ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹</p>
۷۶	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> پیدا کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p>
۷۷	<p>اگر <math>\vec{a} = (2, -1, 3)</math> و <math>\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}</math> باشد اندازه بردار <math>\vec{a} + 2\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p>
۷۸	<p>نمودار مربوط به معادلات <math>\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}</math> در فضای <math>R^3</math> چه شکلی است؟ و چه ارتباطی با نمودار <math>x = 0</math> دارد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹</p>
۷۹	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (-2, 0, 2)</math> و <math>\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) تصویر قائم بردار <math>\vec{a} + \vec{b}</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p>
۸۰	<p>دو بردار <math>\vec{a} = (3, -2, 1)</math>، <math>\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) بردار <math>\vec{a}</math> در کدام ناحیه از فضای <math>R^3</math> واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود).</p> <p>ب) طول بردار <math>\vec{a} + 2\vec{b}</math> را حساب کنید.</p> <p>پ) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را پیدا کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹</p>

۸۱	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نقطه <math>A(۲, -۳, ۰)</math> روی صفحه <math>xOy</math> قرار دارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>
۸۲	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. حاصل ضرب داخلی دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> که بر هم عمود هستند، برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>
۸۳	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر برای دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> داشته باشیم: <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b} </math> در این صورت <math>\theta = \frac{\pi}{۴}</math> است <math>\theta</math> زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> است).</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p>
۸۴	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر <math>\vec{i}</math>، <math>\vec{j}</math> و <math>\vec{k}</math> بردارهای یک‌ه در فضای <math>R^۳</math> باشند، حاصل <math>(\vec{i} \times \vec{j}) \cdot \vec{k}</math> برابر است با .....</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p>
۸۵	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> در <math>R^۳</math> داریم: <math>\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}</math></p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p>
۸۶	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر برای دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> داشته باشیم: <math>\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b} </math>، در این صورت زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> برابر ..... است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p>
۸۷	<p>اگر بردار <math>\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)</math> باشد، ثابت کنید: <math>\vec{a} \cdot \vec{a} =  \vec{a} ^2</math></p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p>
۸۸	<p>اگر <math>A = (-۱, ۲, ۰)</math> و <math>B = (۱, ۰, -۱)</math> و <math>C = (۰, -۱, ۱)</math> سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p>
۸۹	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (۱, ۲, ۳)</math> و <math>\vec{b} = (-۲, ۰, ۲)</math> مفروض‌اند: الف) تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> را به دست آورید. ب) طول بردار <math>\vec{a} - \vec{b}</math> را محاسبه کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p>

۹۰	<p>وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمتهایی از صفحات به معادلات <math>x = ۰, x = ۲</math> و <math>y = ۰, y = ۴</math> و <math>z = ۰, z = ۳</math> هستند. الف) مختصات نقطه A را مشخص کنید. ب) معادلات مربوط به یال AD و وجه CDFG را بنویسید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۸</p>
۹۱	<p>سه بردار <math>\vec{a} = (۲, ۳, ۱)</math> و <math>\vec{b} = (-۱, ۱, ۰)</math> و <math>\vec{c} = (۲, ۱, -۲)</math> مفروض‌اند. الف) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a} + \vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> را به دست آورید. ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> و <math>\vec{c}</math> تولید می‌شود را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p>
۹۲	<p>اگر <math>\vec{i}</math> و <math>\vec{j}</math> و <math>\vec{k}</math> بردارهای واحد در <math>R^3</math> باشند، حاصل <math>\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p>
۹۳	<p>ثابت کنید اگر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> در یک راستا باشند آن‌گاه تصویر قائم <math>\vec{a}</math> بر امتداد <math>\vec{b}</math>، برابر خود <math>\vec{a}</math> می‌شود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p>
۹۴	<p>نقاط <math>A(۳, ۱, ۲)</math> و <math>B(۳, -۲, ۲)</math> در <math>R^3</math> مفروض‌اند: الف) طول پاره‌خط AB را به دست آورید. ب) معادلات مربوط به پاره‌خط AB را بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ۹۸</p>
۹۵	<p>اگر طول بردارهای <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> به ترتیب ۴ و ۶ و <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = ۱۲</math> باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>
۹۶	<p>مقدار <math>m</math> را طوری تعیین کنید که سه بردار <math>\vec{a} = (۱, m, -۱۱)</math>، <math>\vec{b} = (۲, ۳, -۱)</math> و <math>\vec{c} = (۱, -۱, ۳)</math> در یک صفحه باشند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>

۹۷	<p>ثابت کنید: دو بردار غیر صفر <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> با هم موازی هستند اگر و فقط اگر <math>\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}</math></p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>
۹۸	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (1, -3, 2)</math> و <math>\vec{b} = (-2, 1, -5)</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> به دست آورید.</p> <p>ب) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>
۹۹	<p>اگر <math>\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}</math> و <math>\vec{b} = (1, 2, 1)</math> باشد، طول بردار <math>\vec{a} - 2\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>
۱۰۰	<p>به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه <math>A = (2, 3, 4)</math> بگذرد و با صفحه <math>xOy</math> موازی باشد.</p> <p>ب) معادلات <math>\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}</math> مربوط به کدام محور است؟</p> <p>پ) در فضای <math>R^3</math>، نقطه <math>A</math> به طول ۲ روی محور طولها و نقطه <math>B = (-4, 6, -3)</math> مفروض‌اند مختصات وسط <math>AB</math> را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۸</p>

بخش اول، به سه روش زیر قابل حل است:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \\ \begin{cases} (-m, 2, -m-4) \cdot (-m, -4, m) \\ = 0 \Rightarrow m = -2 \\ |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \Rightarrow m = -2 \end{cases} \end{cases}$$

چهارضلعی بنا شده روی بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  لوزی است

$$\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow m = -2$$

بخش دوم، به سه روش زیر قابل حل است:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-6, 0, -6) \Rightarrow \begin{cases} V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = 72 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 72 \Rightarrow V = 72 \\ h = |\vec{a} \times \vec{b}| \Rightarrow V = Sh = \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \right|^2 = 72 \end{cases}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 6\sqrt{3}, \sin \theta = \frac{6\sqrt{3}}{6 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{3}$$

$$a. (a-b) = |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 4^2 - 4 \times 3 \times \left(\pm \frac{1}{3}\right) = 16 \pm 4$$

$$\vec{a} = (-1, 0, -\sqrt{3})$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} (-1, 0, -\sqrt{3}) = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2} \right), |\vec{b}'| = \sqrt{3}$$

$$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b} \quad \text{ب) بردار صفر یا } \vec{O}$$

$$x = 2 \quad \text{الف) ۴}$$

$$\text{نادرست} \quad \text{۵}$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) \right| = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} \right| \quad (\text{ص ۸۴})$$

$$S = \frac{1}{2} \left| 0 + \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \theta| = 5 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2, 1, 2) \quad (\text{ص ۸۴})$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} = \frac{(-2-3+8)}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} (-2, 1, 2) = \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{ص ۸۴})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} = (-3, 5, 7)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 12 = 10 \times 2 \times \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5} \quad (\text{ص ۸۴})$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \quad (\theta \text{ حاده است})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 2 \times 10 \times \frac{4}{5} = 16$$

پ (ص ۷۵) درست

ب (ص ۳۹) درست

الف (ص ۲۲) نادرست

$$k = \frac{1}{2} \quad (\text{الف (ص ۱۲)})$$

ب (ص ۳۹) دو خط متقاطع

پ (ص ۸۲ و ۸۳) یک

$$V = 0 \Rightarrow \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{j} = (-2, -1, 1), \vec{u} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}, |\vec{u} \times \vec{b}| = \sqrt{75}$$

$$S = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad (\text{ص ۷۵ و ۸۴})$$

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{v} = 2\vec{c} - \vec{b} = (3, -4, 0) \Rightarrow |\vec{v}| = 5, \vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \vec{v} \Rightarrow \vec{u}' = \left( -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right) \quad (\text{ص ۷۵ و ۸۴})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 2m = (\sqrt{m^2 + 4})(2\sqrt{2}) \left( \frac{1}{2} \right) \Rightarrow 4m^2 = 2m^2 + 8$$

$$\Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 & \text{ق ق} \\ m = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases} \quad (\text{ص ۷۸})$$

۱۶ صفر (ص ۸۲)

۱۷ درست (ص ۶۴)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (4k, -4k, 2k)$$

$$|\vec{b}| = 6|k| = 12 \Rightarrow k = \pm 2 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \vec{b} = (-8, 8, -4) \quad (\text{ص ۸۲})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 3 = 3\sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ \quad (\text{ص ۷۸})$$

حجم متوازی السطوح برابر با حاصل ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است. (ص ۸۳)

حجم متوازی السطوح برابر ۲ است.  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = 2$

مساحت قاعده این متوازی السطوح که توسط بردارهای  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید می شود برابر با:  $|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{3}$  است.

$$h = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{در نتیجه:}$$

روش اول: بردار  $\vec{a}'$  با بردار  $\vec{b}$  موازی است،  $\vec{a}' = k\vec{b}$ ،  $\vec{a}' \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b}$  (ص ۷۹)

$$(\vec{a} - \vec{a}') \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

روش دوم: در مثلث قائم الزاویه، زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را  $\theta$  می نامیم

$$\cos \theta = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta$$

$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'| = k|\vec{b}| \Rightarrow k = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}| |\vec{a}| \cos \theta}{|\vec{b}|^2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

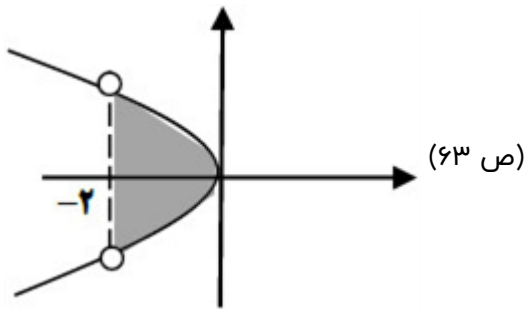
$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

مختصات نقطه  $A(0, 0, 3)$ ، مختصات وسط AB برابر با  $M\left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$  و فاصله تا مبدأ مختصات  $\frac{\sqrt{17}}{2}$  است. (ص ۶۶)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (ص ۸۱ و ۸۲)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۸۰)





(ص ۶۳)

الف)  $\vec{b} = (2, 0, 2), |\vec{b} - \vec{c}| = |(2, -2, 1)| = 3$  (ص ۷۶)

ب)  $\vec{b} + \vec{c} = (1, 2, 2)$  (ص ۸۱)

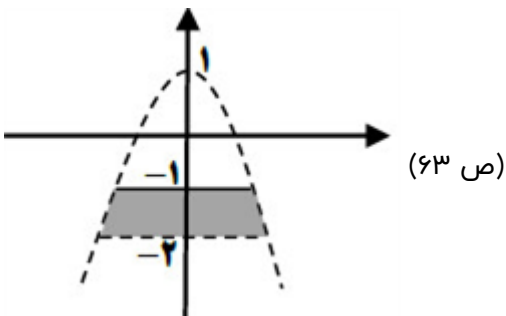
$$S = \left| \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) \right| = |(8, -5, 1)| = 3\sqrt{10}$$

$$\vec{a} = r\vec{b}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(r\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{r|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = r\vec{b} = \vec{a} \quad (\text{ص } ۸۰)$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-n}{\sqrt{2} \times \sqrt{4+1+n^2}} \Rightarrow \frac{n-2}{\sqrt{n^2+5}} = 1$$

$$n^2 + 5 = n^2 - 4n + 4 \Rightarrow n = -\frac{1}{4} \quad (\text{ص } ۷۸)$$



(ص ۶۳)

$$z = 3 \quad (\text{ص } ۶۸)$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) = (6, 4, -4) \text{ (ص ۸۳)}$$

$$v = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = |(1, 0, 1) \cdot (6, 4, -4)| = 10$$

اگر دانش‌آموز به صورت زیر حل کند نمره کامل داده شود:

$$v = \left| \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \right| = 10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 10 = 3 \times 5 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 5\sqrt{5} \Rightarrow s_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{5\sqrt{5}}{2} \text{ (ص ۸۴)}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 2(m+1) + 3m - 2 = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ (ص ۷۹)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5 \text{ (ص ۷۳)}$$

رسم نمودار (به طوری که نقطه توپر و توخالی مشخص باشد) (ص ۶۳)

درست (ص ۷۵)

عرض‌ها یا محور yها (ص ۶۷)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \text{ (ص ۷۹)}$$

$$\vec{AB} = (1, 2, 1), \vec{AC} = (-3, 2, -3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-8, 0, 8), S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 4\sqrt{2} \text{ (ص ۸۴)}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ = 2(6)(4) \left( \frac{1}{2} \right) = 24 \text{ (ص ۸۱)}$$

$$\text{الف) } \vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, 0, 1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 1 = \sqrt{14} \sqrt{2} \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{7}} \text{ (ص ۷۸)}$$

$$\text{ب) } \vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (1, -2, 0) \text{ (ص ۷۹)}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} \vec{d} = \frac{-4}{5} (1, -2, 0)$$

۴۴ الف) CDFG

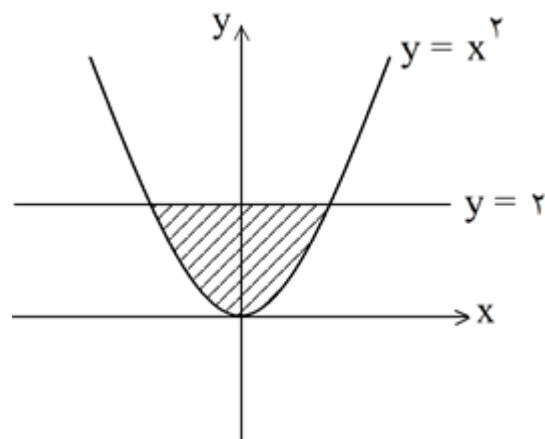
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

ت)  $y = 2$  (ص ۶۸)

پ)  $D(2, 4, 3)$

۴۵ رسم نمودار (ص ۵۵)

$y = x^2$  نمودار یک سهمی است و  $y \geq x^2$  داخل این سهمی است و  $y \leq 2$  نقاط زیر خط  $y = 2$  هستند، پس ناحیه  $x^2 \leq y \leq 2$  هاشورخورده می‌باشد.



۴۶ نادرست،  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  (ص ۷۹)

۴۷ صفر (ص ۸۴)

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow 12 = 3(26) \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{5}{13} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 3(26) \frac{5}{13} = 30$$

الف)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 1 + 0 = 3 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, 2) \times (1, -1, 0) = (2, 2, -1)$$

ب) بردار عمود بر دو بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$A = (2, 0, 0), B = (0, -3, 4)$$

$$M = \left( \frac{2+0}{2}, \frac{0+(-3)}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = \left( 1, \frac{-3}{2}, 2 \right)$$

$$OM = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{29}{4}}$$

ت) صفر

پ) خارج

ب) مشترک

۵۲ الف) ماتریس

مختصات وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow (0, m, -1) \cdot (3, -3, -3) = 0 \Rightarrow -3m + 3 = 0 \Rightarrow m = 1 \quad (\text{ص ۸۲})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{3 \times 26} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{5}{13} \xrightarrow{\theta < 90^\circ}$$

۵۵ روش اول:

$$\cos \theta = \frac{5}{13} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 30 \quad (\text{ص ۸۴})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Rightarrow 72^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 3^2 \times 26^2$$

روش دوم:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 900 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \pm 30 \xrightarrow{\theta < 90^\circ} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 30$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + 2 \times 0 = 3, \quad \vec{b} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$a' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{3}{\sqrt{2}} (1, -1, 0) = \left( \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad (\text{ص ۸۵})$$

الف)  $A = (2, 0, 0), B = (1, 0, 3)$

ب)  $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (0-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$

پ)  $M = \left( \frac{2+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+3}{2} \right) = \left( \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2} \right) \quad (\text{ص ۷۶ و ۶۶})$

۵۷

۵۸ الف نادرست (ص ۲۱) درست (ص ۸۱) ب نادرست (ص ۳۹) پ نادرست (ص ۴۲) ت

۵۹ الف قطری (ص ۱۲) ب مشترک (ص ۳۶) پ پاره خط (ص ۴۹) ت yoz (ص ۷۳)

۶۰ الف برداری عمود بر دو بردار  $\vec{b}$  و  $-\vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$(-2\vec{b}) \times \vec{c} = (2, -2, 0) \times (2, 1, -2) = (4, 4, 4)$$

ب) حجم متوازی السطوح تولید شده توسط سه بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(2, 3, 1) \cdot (-2, -2, -3)| = 13$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{0}| \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \xrightarrow{|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0}$$

$$\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

۶۱

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= |\vec{0}|^2 \Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \\ \Rightarrow 1 + 4 + 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) &= 0 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = -7 \end{aligned}$$

۶۲

$$\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6), \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|^2} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{35}{49} (2, -3, 6)$$

۶۳

نقطه  $A = (0, 2, 3)$  و مختصات وسط AB برابر است با:  $(-2, 4, 0)$  ۶۴

محور Z ها ۶۵

$$b = -3$$

۶۶

ت) نادرست

پ) درست

ب) نادرست

الف) درست ۶۷

ت) ۶

پ) دایره

ب) خط

الف) ۸ ۶۸

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, 2, 1) \times (2, 0, 1) = (2, -1, -4)$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{2 + 1 + 0}{1 + 1 + 0} (1, -1, 0) = \frac{3}{2} (1, -1, 0)$$

۶۹

۷۰

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

۷۱

الف) بردار  $\vec{a}$  در ناحیه ۵ واقع است. ۷۲

$$\vec{a} - \vec{b} = (2, 2, -1) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

نقاط  $A, B$  زیرا در این دو نقطه  $y = 2$  و  $z = 1$  می‌باشد. ۷۳

ت) درست

پ) نادرست

ب) درست

الف) نادرست ۷۴

ت) صفر

پ)  $(\frac{1}{2}, 1)$

ب) بیضی

الف) ندارد ۷۵

$$\text{الف) } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

۷۶

$$\text{ب) } \vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, 2) \times (1, -1, 0) = (2, 2, -1)$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, -1, 2) + 2(1, 2, 0) = (4, 3, 2)$$

۷۷

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$$

محور yها است. معادله  $x = 0$  معادله صفحه yz که شامل محور yها است.  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

۷۸

$$\text{الف) } \vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 0, 2) \cdot (0, 2, 2) = 4 \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$$

۷۹

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-2, 0, 2) + (0, 2, 2) = (-2, 2, 4)$$

$$\text{ب) } (\vec{a} + \vec{b})' = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{12}{8} (0, 2, 2) = (0, 3, 3)$$

الف) بردار  $\vec{a}$  در ناحیه چهارم

۸۰

$$\text{ب) } \vec{a} + 2\vec{b} = (3, -2, 1) + 2(-2, 1, -1) = (-1, 0, -1)$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$$

پ) ضرب خارجی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر آن‌ها عمود است.

۸۱ درست (۰/۲۵)

۸۲ صفر یا ۰ (۰/۲۵)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

۸۳ نادرست

۸۴ ۱

۸۵ درست

۸۶ صفر

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

۸۷

$$\vec{AB} = (2, -2, -1), \vec{AC} = (1, -3, 1)$$

۸۸

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{\sqrt{2}} |(-5, -3, -4)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{25 + 9 + 16} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{50}$$

الف)  $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b} = \frac{(1, 2, 3) \cdot (-2, 0, 2)}{(-2, 0, 2) \cdot (-2, 0, 2)} (-2, 0, 2) = \frac{-2 + 6}{4 + 4} (-2, 0, 2) = (-1, 0, 1)$

۸۹

ب)  $2\vec{a} - \vec{b} = 2(1, 2, 3) - (-2, 0, 2) = (4, 4, 4), |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{16 + 16 + 16} = \sqrt{48}$

الف)  $A(0, 4, 3)$

۹۰

ب)  $AD : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \quad CDFG : \begin{cases} x = 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$

۹۱ الف) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (1, 4, 1) \times (2, 1, -2) = (-9, 4, -7)$$

ب) حجم متوازی السطوح تولید شده توسط سه بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  برابر است با:

$$\text{حجم} = |(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))| = |(2, 3, 1) \cdot (-2, -2, -3)| = |-13| = 13$$

$$\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i} \cdot (\vec{j}) = |\vec{i}|^2 = 1$$

۹۲

$$\vec{a} = r \vec{b}$$

۹۳

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(r \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{r |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = r \vec{b} = \vec{a}$$

الف)  $|AB| = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-1)^2 + (2-2)^2} = 3$

۹۴

ب)  $\begin{cases} x = 3 \\ -2 \leq y \leq 1 \\ z = 2 \end{cases}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{12}{4 \times 6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad (0/25)$$

روش اول: ۹۵

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \quad (0/25)$$

روش دوم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \quad (0/25) \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (12)^2 = (4)^2 (6)^2 \quad (0/5)$$

$$\rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 12\sqrt{3} \quad (0/25)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = 6\sqrt{3} \quad (0/25)$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$\vec{b} \times \vec{c} = (2, 3, -1) \times (1, -1, 2) = (8, -5, -5) \quad (0/25)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \cdot \frac{(0/25)}{1} (1, m, -1) (8, -5, -5) = 8 - 5m + 55 = 0 \cdot \frac{(0/25)}{1} m = 9 \quad (0/25)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \quad \begin{matrix} |\vec{a}| \neq 0 & |\vec{b}| \neq 0 \\ \hline \end{matrix}$$

$$\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{-2-3-10}{4+1+25} (-2, 1, -5) = \frac{-1}{30} (-2, 1, -5) \text{ یا } \left(1, -\frac{1}{30}, \frac{5}{30}\right)$$

الف) ۹۸

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1, -3, 2) \times (-2, 1, -5) = (13, 1, -5) \quad (0/5)$$

ب)

$$(\vec{b} \times \vec{a} = (-2, 1, -5) \times (1, -3, 2) = (-13, -1, 5) \quad (0/5) \text{ یا } )$$

$$\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 0, -1) - (2, 4, 2) = (0, -4, -3) \quad (0/25), |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{16+9} = 5 \quad (0/25)$$

۹۹



پ) نقطه  $A = (۲, ۰, ۰)$  (۰/۲۵) و مختصات وسط  $AB$  برابر است با:  $(۰/۲۵) \left(-۱, ۳, \frac{-۳}{۲}\right)$

۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

