نام و نام خانوادگی :　　زمان آزمون :

پایه تحصیلی :　　نام درس :

نام دبیر :　　نام آموزشگاه :

عنوان آزمون : حسابان ۱۱ فصل ۵　　تاریخ برگزاری

p30konkor.com

ردیف	لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم

۱

مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = ۱$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & x > ۱ \\ b - ۱ & x = ۱ \\ x - ۲a & x < ۱ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳

پاسخ: ۱

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x-۱}}{x-۱} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x+۱})}$

$= \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۱}{\sqrt{x}+۱} = \frac{۱}{۲}$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} (x - ۲a) = ۱ - ۲a$

مقدار $f(۱) = b - ۱$

چون تابع f در $x = ۱$ پیوسته است $\Rightarrow \begin{cases} b - ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \frac{۳}{۲} \\ ۱ - ۲a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۴} \end{cases}$

۲

حدود زیر را محاسبه کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} ۵$　　ب) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{x^۲[x] - ۲۷}{x-۳}$　　پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} ۵ = ۵$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{x^۲[x] - ۲۷}{x-۳} = \lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{۳x^۲ - ۲۷}{x-۳} = \lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{۳(x^۲-۹)}{x-۳} = ۳\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳} = ۱۸$

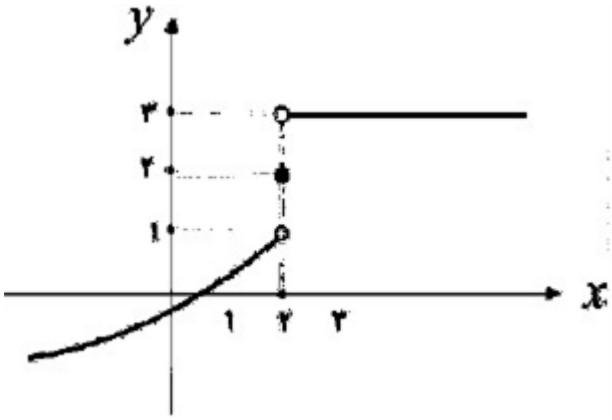
پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} \times \frac{۱ + \operatorname{Sin} x}{۱ + \operatorname{Sin} x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \operatorname{Sin}^۲ x}{\operatorname{Cos} x} \times \frac{۱}{۱ + \operatorname{Sin} x}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\operatorname{Cos}^۲ x}{\operatorname{Cos} x(۱ + \operatorname{Sin} x)} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\operatorname{Cos} x}{۱ + \operatorname{Sin} x} = \frac{۰}{۲} = ۰$

۳

با توجه به نمودار تابع $f(x)$ مقدار عبارت، $\lim\limits_{x\to ۲^-}[f(x)]+f(۲)+\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)$ را به دست آورید.

([ ] نماد جزء صحیح است.)



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to ۲^-}[f(x)]=۰,\ \lim_{x\to ۲^+}f(x)=۳,\ f(۲)=۲\Rightarrow A=۰+۲+۳=۵$$

۴

پیوستگی تابع مقابل را در $x=۰$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x & x<۰\\ \sqrt{۲} & x=۰\\ x^۲+۱ & x>۰\end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(\operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x)=۱,\ \lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(x^۲+۱)=۱$$

$f(۰)=\sqrt{۲}\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۰}f(x)\neq f(۰)\Rightarrow$ f در صفر پیوسته نیست.

۵

حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۸-x^۳}{x^۲+۳x-۱۰}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{|۲-x|}{[x]+۱}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(۲-x)(۴+۲x+x^۲)}{(x-۲)(x+۵)}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۴+۲x+x^۲}{-(x+۵)}=-\dfrac{۱۲}{۷}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{|۲-x|}{[x]+۱}=\dfrac{۱}{۳}$

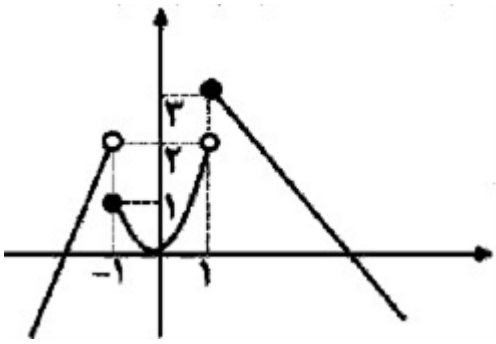
۶

نمودار تابع f به صورت مقابل داده شده است. مطلوب است:

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^{+}} f(x)$

پ) آیا تابع f در بازهٔ $[-۱, ۱]$ پیوسته است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) وجود ندارد ب) ۱ پ) خیر

۷

پیوستگی تابع f را در نقطه $x = -۱$ بررسی کنید. ([ ] نشان‌دهنده جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} ۲[x] + ۱ & x < -۱ \\ -۳ & x = -۱ \\ x^{۲} + ۴x & x > -۱ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ تابع پیوسته است

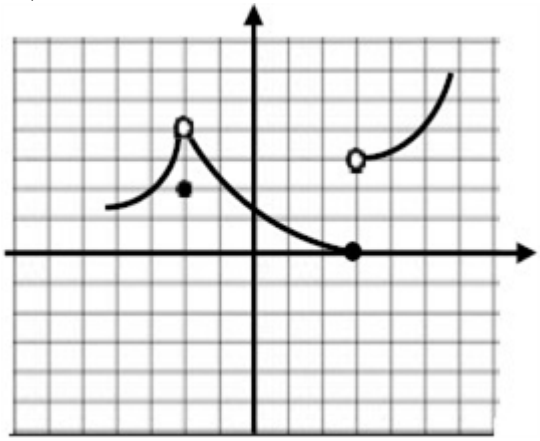
$$\left.\begin{array}{l} \text{حد چپ} \quad \lim\limits_{x\to(-۱)^{-}} (۲[x] + ۱) = ۲(-۲) + ۱ = -۳ \\ \text{حد راست} \quad \lim\limits_{x\to(-۱)^{+}} (x^{۲} + ۴x) = ۱ - ۴ = -۳ \\ f(-۱) = -۳ \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -۱} f(x) = f(-۱) \Rightarrow$$

۸

با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۲} (x + f(x))$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) ۳

ب) $\lim\limits_{x\to -۲} x + \lim\limits_{x\to -۲} f(x) = ۲ + ۴ = ۶$

۹

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

تابع $y=\sqrt{۱-x}$ در $x=۱$ پیوستگی ..... دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ چپ

۱۰

پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=-۲$ بررسی کنید. ([ ] نشان‌دهنده جزء صحیح است.)

$$f(x)=\begin{cases}[x]-۲ & x<-۲\\ -۵ & x=-۲\\ ۳-۲x^۲ & x>-۲\end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to -۲^+}(۳-۲x^۲)=-۵\ ,\ \lim_{x\to -۲^-}([x])-۲=-۳-۲=-۵\ ,\ f(-۲)=-۵$$

تابع در $x=-۲$ پیوسته است.

۱۱

در صورت وجود حاصل حدهای زیر را به دست آورید. ([ ] نشان‌دهنده جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^-}\dfrac{[x]+۱}{\mathrm{Cos}\,(-\pi x)}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۱)}{(x+۲)}=\dfrac{۱}{۴}$

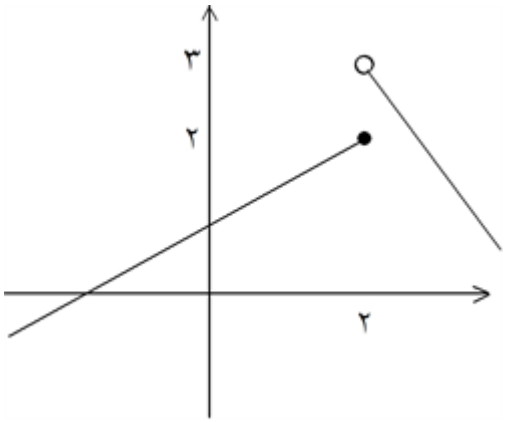
ب) $\lim\limits_{x\to -۱^-}\dfrac{[x]+۱}{\mathrm{Cos}\,(-\pi x)}=\lim\limits_{x\to -۱^-}\dfrac{-۲+۱}{-۱}=۱$

۱۲

نموداری از یک تابع رسم کنید که در نقطه $x=۲$، حد راست آن تابع برابر ۳ است ولی حد چپ و مقدار تابع در $x=۲$ برابر ۲ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱



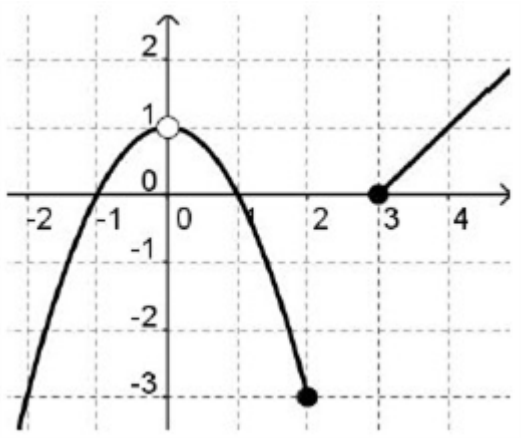
۱۳

با توجه به نمودار تابع f، حدهای خواسته شده را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) ۳- ب) وجود ندارد ج) ۱

۱۴

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- حد تابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند، برابر صفر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ نادرست

۱۵

نمودار تابع f به صورت مقابل است.

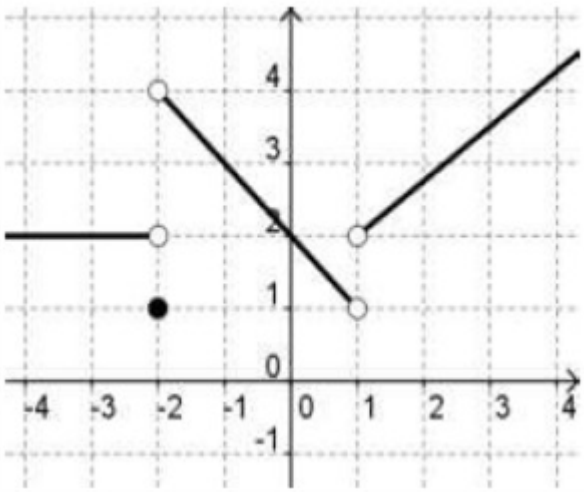
الف) دامنه این تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

ب) حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\lim\limits_{x\to -۲^+} [f(x)]$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

۳) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱ الف) ۱

ب) ۱) ۳ ۲) ۱ ۳) وجود ندارد

۱۶

پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x-۵ & x<۲ \\ -۳ & x=۲ \\ x^۲-۷ & x>۲ \end{cases}$ را در $x=۲$ بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱ چون حد تابع و مقدار تابع برابر است، پس تابع در $x=۲$ پیوسته می‌باشد.

$$۲-۵=-۳=۲^۲-۷ \Rightarrow -۳=-۳=-۳$$

۱۷

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{[x]-۲}{x-۲}$ را درنظر بگیرید. با کامل کردن جدول زیر، مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ را در صورت وجود به دست آورید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	→۲
f(x)	...	...	...	؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-شبه نهایی یازدهم-فروردین۱۴۰۳

پاسخ: ۱

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	→۲
f(x)	۰	۰	۰	۰

۱۸

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ در $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست.

۱۹

مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} -۲x+a & x<۰ \\ b+۱ & x=۰ \\ x^۲+۲ & x>۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$$-۲(۰)+a=(۰)^۲+۲=b+۱$$

$$a=۲, b=۱$$

۲۰

حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۹}{x^۲-۳x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{x+۳}{[x]}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\tan x + \cot x)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۹}{x^۲-۳x} = \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{(x-۳)(x+۳)}{x(x-۳)} = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{x+۳}{[x]} = \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{۲+۳}{[۲^-]} = \dfrac{۵}{۱} = ۵$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\tan x + \cot x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۱ + ۱ = ۲$

۲۱

اگر تابع $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته باشد، مقدار a و b را به‌دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ax+۳ & x<۱ \\ ۲ & x=۱ \\ x^۲+b & x>۱ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$f(۱) = ۲$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (x^۲+b) = ۱+b = ۲ \Rightarrow b = ۱$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} (ax+۳) = a+۳ = ۲ \Rightarrow a = -۱$

۲۲

حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^۲-۱}{x^۲-x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x^۲+۱}{[x]}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x)$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^۲-۱}{x^۲-x} = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x(x-۱)} = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x^۲+۱}{[x]} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۲^۲+۱}{[۲^+]} = \dfrac{۵}{۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x) = \operatorname{Sin}\left(\dfrac{\pi}{۴}\right) - \operatorname{Cos}\left(\dfrac{\pi}{۴}\right) = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} - \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$

۲۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. ([] نماد جزء صحیح است.) مقدار $\text{Lim}\,[x]$ وقتی $x \to ۰$ برابر صفر است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲ **پاسخ:** ۱ نادرست.	
۲۴	در جای خالی عبارت مناسب بنویسید. حاصل حد $\sqrt{x}$ وقتی $x \to ۰^+$ برابر ..... است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲ **پاسخ:** ۱ صفر	
۲۵	حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x^۲ - ۳x - ۴}{x^۲ + x} =$ $\lim\limits_{x\to -۲^-} \dfrac{۲x + ۳}{[x] + ۲} =$ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲ **پاسخ:** ۱ $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x^۲ - ۳x - ۴}{x^۲ + x} = \lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x - ۴}{x} = \dfrac{-۵}{-۱} = ۵$ $\lim\limits_{x\to -۲^-} \dfrac{۲x + ۳}{[x] + ۲} = \dfrac{۲(-۲) + ۳}{-۳ + ۲} = \dfrac{-۱}{-۱} = ۱$	
۲۶	پیوستگی تابع f را در $x = ۰$ ، به ازای تمام مقادیر a بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{\lvert x\rvert} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲ **پاسخ:** ۱ $f(۰) = ۱ \,,\, \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = a \,,\, \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = -a$ $a = ۰ \Rightarrow f(۰) \neq \lim\limits_{x\to ۰} f(x) \,,\, a \neq ۰ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) \neq f(x)$ تابع در $x = ۰$ پیوسته نیست.	

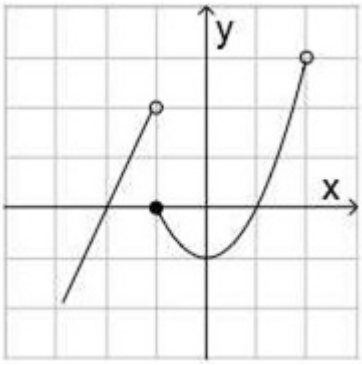
۲۷

با استفاده از نمودار زیر، مقادیر خواسته‌شده را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to -۱^+} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x \to -۱^-} f(x) =$

پ) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) =$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-خردادماه۱۴۰۲

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x \to -۱^+} f(x) = ۰$

ب) $\lim\limits_{x \to -۱^-} f(x) = ۲$

پ) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) = -۱$

۲۸

آیا تابع $f(x) = \sqrt{x - x^۲}$ در نقطه $x = ۱$ حد دارد؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱ خیر. با توجه به دامنه تابع، همسایگی راست یک، وجود ندارد.

$x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow D = [۰, ۱]$

۲۹

مقدار حدهای زیر را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۳-\sqrt{x+۸}}{x^۲-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{[x]}{x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۳-\sqrt{x+۸}}{x^۲-۱} = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۹-(x+۸)}{(x-۱)(x+۱)(۳+\sqrt{x+۸})}$

$= \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱}{(x+۱)(۳+\sqrt{x+۸})} = \dfrac{-۱}{۱۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{[x]}{x} = \lim\limits_{x\to ۰} ۰ = ۰$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲(۱-\cos ۲x)}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲(۲\sin^۲ x)}{x\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۴\sin x\times \sin x}{x\sin x} = ۴$

۳۰

مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطه‌ای به طول $x=۰$ پیوسته باشد. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x} & x>۰ \\ x-\frac{a}{۴} & x=۰ \\ b+\frac{[x]}{۲} & x<۰ \end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-یازدهم-شهریور۱۴۰۲

پاسخ: ۱

$f(۰)=\dfrac{-a}{۴}\ ,\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{۱+x-۱}{x(\sqrt{۱+x}+۱)} = \dfrac{۱}{۲}$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = b-\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow a=-۲\ ,\ b=۱$

۳۱

بازهٔ $(x-۱,۷)$ همسایگی عدد ۴ است. حدود x را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$x-۱<۴ \Rightarrow x<۵$

۳۲

اگر بازهٔ $(۲,۲x+۱)$ همسایگی عدد ۵ باشد، حدود x را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$۲x+۱>۵ \Rightarrow ۲x>۴ \Rightarrow x>۲$

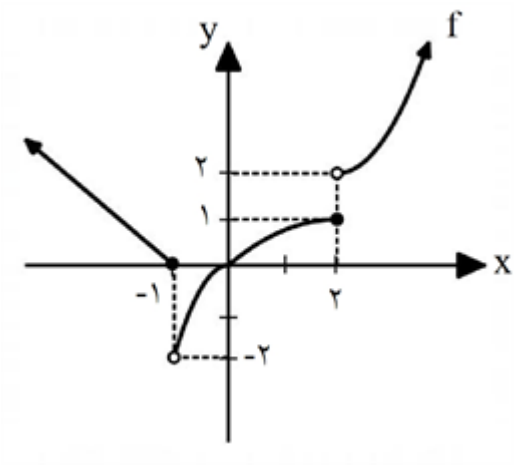
۳۳

نمودار f به صورت مقابل داده شده است. مطلوب است:

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x)$

پ) آیا تابع f در بازهٔ $[-۱,۲]$ پیوسته است؟



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۰$

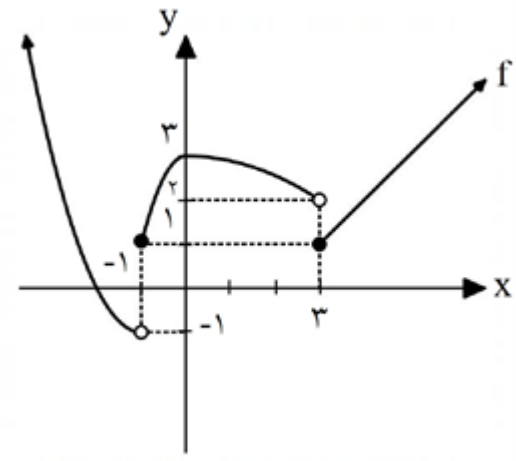
ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = -۲ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-۱)} f(x) =$ حد ندارد

پ) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = -۲ \\ f(-۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow$ در $x=-۱$ پیوستگی راست ندارد.

تابع f در $x=-۱$ پیوستگی راست ندارد، بنابراین تابع در بازهٔ $[-۱,۲]$ پیوسته نیست.

۳۴

آیا تابع f در بازهٔ $[-۱,۳]$ پیوسته است؟ چرا؟



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = ۲ \\ f(۳) = ۱ \end{cases} \Rightarrow$ تابع f در $x=۳$ پیوستگی چپ ندارد.

تابع f در $x=۳$ پیوستگی چپ ندارد. بنابراین در بازهٔ $[-۱,۳]$ پیوسته نیست.

۳۵

حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۳-۸}{x^۲-۵x+۶}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{|۳-x|}{[x]+۱}$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۳-۸}{x^۲-۵x+۶} = \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{(x-۲)(x-۳)} = \dfrac{۴+۴+۴}{۲-۳} = -۱۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{|۳-x|}{[x]+۱} = \dfrac{|۳-۵|}{[۵^-]+۱} = \dfrac{۲}{۴+۱} = \dfrac{۲}{۵}$

۳۶

پیوستگی تابع زیر را در $x=\dfrac{\pi}{۴}$ بررسی کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x & x>\frac{\pi}{۴} \\ \sqrt{۲} & x=\frac{\pi}{۴} \\ [-x]+\sqrt{۲}+۱ & x<\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{۴}\right)$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} \operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x = \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{۴}\right)+\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}$$

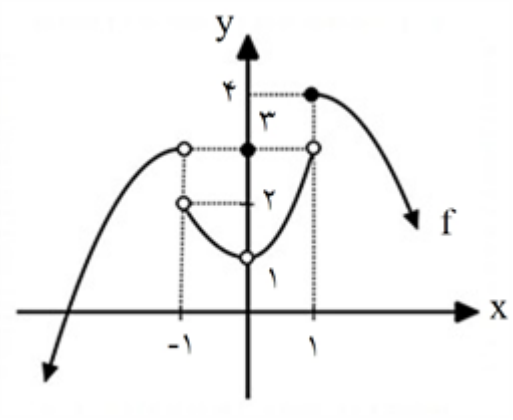
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} [-x]+\sqrt{۲}+۱ = -۱+\sqrt{۲}+۱ = \sqrt{۲}$$

بنابراین تابع در $x=\dfrac{\pi}{۴}$ پیوسته است.

۳۷

اگر نمودار f به صورت زیر باشد، مقدار عبارت $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}[f(x)]+f(۰)+\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)$ را به دست آورید.

([] نماد جزء صحیح است.)



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to(-۱)^+}[f(x)]+f(۰)+\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\left[۲^-\right]+۳+۳=۱+۳+۳=۷$$

۳۸

حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-x^۳}{x^۲-۷x+۶}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{|x-۵|}{[-x]+۳}$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

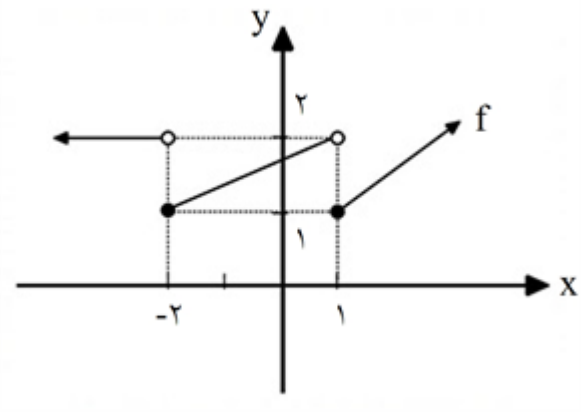
پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-x^۳}{x^۲-۷x+۶}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{-(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)(x-۶)}=\dfrac{-۳}{-۵}=\dfrac{۳}{۵}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{|x-۵|}{[-x]+۳}=\dfrac{۴}{-۲+۳}=۴$

۳۹

تابع f در بازهٔ $[-۲,۱]$ پیوسته ..... . (است - نیست)



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱ نیست.

۴۰ اگر $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+x-۱ & x>۲ \\ ax+۴ & x<۳ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)-\lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x)=۱۶$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{+}} ax^{۲}+x-۱=۹a+۲ \\ \lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{-}} ax+۴=۳a+۴ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)-\lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x)=۹a+۲-(۳a+۴)=۱۶$$

$$\Rightarrow ۹a+۲-۳a-۴=۱۶ \Rightarrow ۶a-۲=۱۶ \Rightarrow ۶a=۱۸ \Rightarrow a=۳$$

۴۱ اگر $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+۱ & x\geqslant ۲ \\ ax-۷ & x<۲ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=۱۰$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}} ax^{۲}+۱=۴a+۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}} ax-۷=۲a-۷ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=۴a+۱-(۲a-۷)=۱۰$$

$$\Rightarrow ۴a+۱-۲a+۷=۱۰ \Rightarrow ۲a+۸=۱۰ \Rightarrow ۲a=۲ \Rightarrow a=۱$$

۴۲ اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=a$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=b$ باشد، مقدار $h(a-b)$ را به دست آورید.

$$f(x)=\frac{x^{۳}-۸}{x-۲}$$

$$g(x)=\begin{cases} x^{۲}-۲x-۶ & x\neq ۵ \\ ۷ & x=۵ \end{cases}$$

$$h(x)=\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi x}{۴}\right)$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)}{x-۲}=۴+۴+۴=۱۲ \Rightarrow a=۱۲$$

$$\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=\lim\limits_{x\to ۵} x^{۲}-۲x-۶=۲۵-۱۰-۶=۹ \Rightarrow b=۹$$

$$\xrightarrow{a=۱۲ \text{ و } b=۹} h(۱۲-۹)=h(۳)=\mathrm{Sin}\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)=\mathrm{Sin}\left(\pi-\frac{\pi}{۴}\right)=\mathrm{Sin}\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۳

اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=a$ و $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)=b$ باشد، مقدار $h^{-۱}(a+b)$ را به دست آورید.

$$f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$$

$$g(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\neq ۳ \\ ۵ & x=۳ \end{cases}$$

$$h(x)=۳x-۱$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=۲+۲=۴\Rightarrow a=۴$$

$$\lim_{x\to ۳} g(x)=\lim_{x\to ۳} x^۲+۱=۹+۱=۱۰\Rightarrow b=۱۰$$

$$h(x)=۳x-۱\Rightarrow y=۳x-۱\Rightarrow y+۱=۳x\Rightarrow x=\frac{y+۱}{۳}\Rightarrow h^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۳}$$

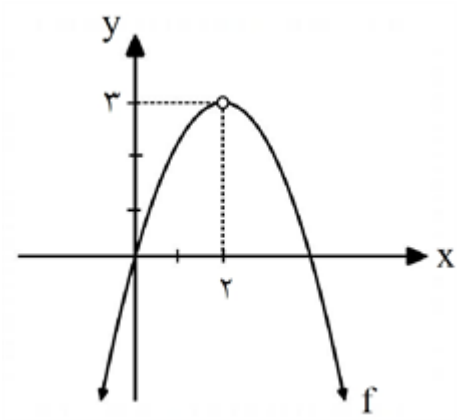
$$\xrightarrow{a=۴ \text{ و } b=۱۰} h^{-۱}(۴+۱۰)=h^{-۱}(۱۴)=\frac{۱۴+۱}{۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵$$

۴۴

با توجه به نمودار تابع f ، مقادیر زیر را به دست آورید.
([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}[f(x)]$

ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۲} f(x)\right]$



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}[f(x)]=\left[۳^-\right]=۲$

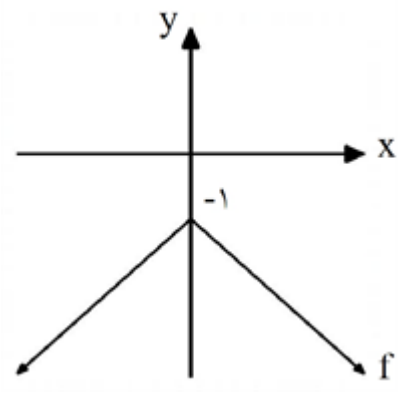
ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۲} f(x)\right]=[۳]=۳$

۴۵

با توجه به نمودار تابع f ، مقادیر زیر را به دست آورید.
([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} [f(x)]$

ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۰} f(x)\right]$



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} [f(x)] = \left[-۱^{-}\right] = -۲$

ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۰} f(x)\right] = [-۱] = -۱$

۴۶

اگر $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x) = ۴$ باشد، مقدار $f(-۱) + f(k)$ را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} + \mathrm{kx} & x \neq -۱ \\ ۵\mathrm{k} - ۱ & x = -۱ \end{cases}$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to(-۱)} f(x) = \lim_{x\to(-۱)} x^{۲} + \mathrm{kx} = (-۱)^{۲} + k(-۱) = ۱ - k = ۴ \Rightarrow -k = ۳ \Rightarrow k = -۳$$

$$\xrightarrow{k=-۳} f(-۱) + f(-۳) = ۵(-۳) - ۱ + (-۳)^{۲} - ۳(-۳) = -۱۶ + ۹ + ۹ = ۲$$

۴۷

مقدار k را چنان بیابید که تابع f در $x = ۳$ دارای حدی برابر ۱۲ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{۲}-۹}{\mathrm{kx}-۳\mathrm{k}} & x \neq ۳ \\ ۴ + k & x = ۳ \end{cases}$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = ۱۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۳} \frac{x^{۲} - ۹}{\mathrm{kx} - ۳\mathrm{k}} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)}{k(x-۳)} = \frac{۶}{k} = ۱۲$$

$$\Rightarrow ۱۲\mathrm{k} = ۶ \Rightarrow k = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

۴۸

مقدار m را چنان بیابید که تابع f در $x = ۲$ دارای حدی برابر ۹ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۲\mathrm{mx} + ۷ & x \neq ۲ \\ ۴\mathrm{m} - ۱ & x = ۲ \end{cases}$$

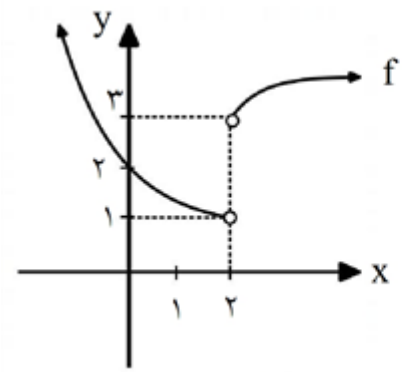
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = ۹ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} ۲\mathrm{mx} + ۷ = ۴\mathrm{m} + ۷ = ۹ \Rightarrow ۴\mathrm{m} = ۲ \Rightarrow m = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۴۹

با توجه به نمودار تابع f ، حد خواسته شده را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است)



$$\lim_{x \to ۲^-} \frac{f(x) + [x]}{۳ + [-x]}$$

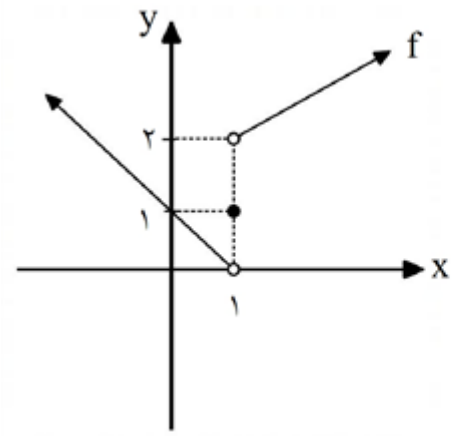
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{f(x)+[x]}{۳+[-x]} = \frac{\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) + \lim\limits_{x\to ۲^-} [x]}{\lim\limits_{x\to ۲^-} (۳) + \lim\limits_{x\to ۲^-} [-x]} = \frac{۱+۱}{۳-۲} = ۲$$

پاسخ: ۱

۵۰

با توجه به نمودار تابع f ، حد خواسته شده را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است)



$$\lim_{x \to ۱^-} \frac{f(x) + [x]}{x + ۱}$$

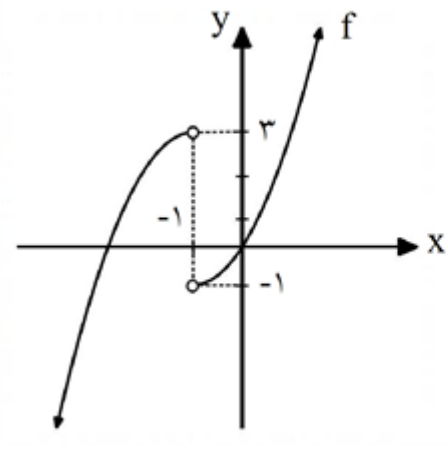
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{f(x)+[x]}{x+۱} = \frac{\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) + \lim\limits_{x\to ۱^-} [x]}{\lim\limits_{x\to ۱^-} (x) + \lim\limits_{x\to ۱^-} ۱} = \frac{۰-۰}{۱+۱} = ۰$$

پاسخ: ۱

۵۱

با توجه به نمودار تابع f ، حد خواسته شده را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است)



$$\lim_{x \to (-۱)^-} \frac{f(x) + [x]}{x - ۱}$$

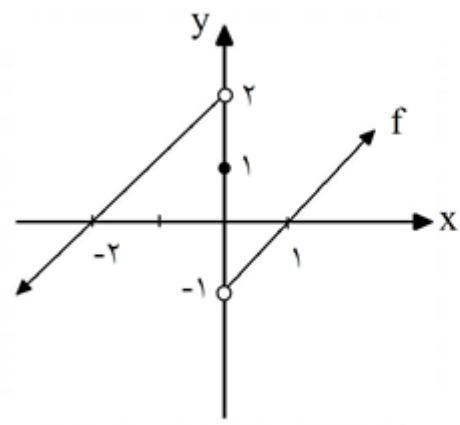
سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to(-۱)^-} \frac{f(x)+[x]}{x-۱} = \frac{\lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) + \lim\limits_{x\to(-۱)^-} [x]}{\lim\limits_{x\to(-۱)^-} (x) - \lim\limits_{x\to(-۱)^-} ۱} = \frac{۳-۲}{-۱-۱} = -\frac{۱}{۲}$$

۵۲

با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حد زیر را حساب کنید.



$$\lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - ۲}{f(x) + ۳}$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{f(x)-۲}{f(x)+۳} = \frac{\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) - \lim\limits_{x\to ۰^-} ۲}{\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) + \lim\limits_{x\to ۰^-} ۳} = \frac{۲-۲}{۲+۳} = \frac{۰}{۵} = ۰$$

۵۳

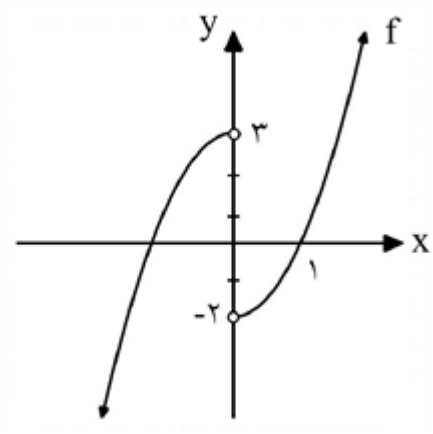
با توجه به نمودار تابع f ، حدهای خواسته شده را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

د) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -یازدهم

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = -۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۳$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) =$ حد ندارد

د) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۰$

۵۴

a و b را طوری بیابید که f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۳ax - ۱ & x > ۱ \\ ۷ & x = ۱ \\ ۲bx + ۱۰ & x < ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ دارای حدی برابر ۵ باشد.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ -یازدهم

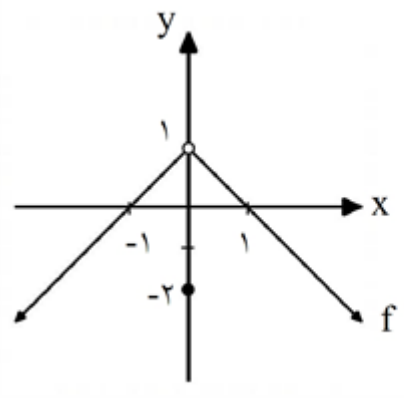
پاسخ: ۱

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ۳ax - ۱ = ۳a - ۱ = ۵ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow a = ۲$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ۲bx + ۱۰ = ۲b + ۱۰ = ۵ \Rightarrow ۲b = -۵ \Rightarrow b = -\frac{۵}{۲}$

۵۵

اگر نمودار f به صورت زیر باشد، حاصل حد زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x \to ۰} \frac{f(x) + ۲}{f(x) - ۳}$$

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

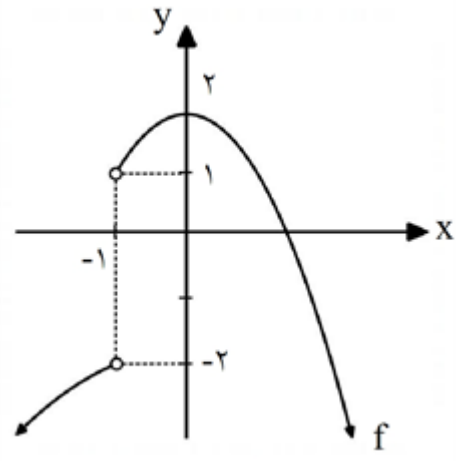
$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)+۲}{f(x)-۳} = \frac{\lim\limits_{x\to ۰} f(x) + \lim\limits_{x\to ۰} ۲}{\lim\limits_{x\to ۰} f(x) - \lim\limits_{x\to ۰} ۳} = \frac{۱+۲}{۱-۳} = -\frac{۳}{۲}$$

۵۶

اگر نمودار f ، به صورت زیر باشد، حاصل حدهای زیر به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} \sqrt{۲ - f(x)}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} (f(x))^۲$



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^-} \sqrt{۲ - f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to(-۱)^-} (۲) - \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x)} = \sqrt{۲-(-۲)} = \sqrt{۴} = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} (f(x))^۲ = (\lim\limits_{x\to ۰} f(x))^۲ = (۲)^۲ = ۴$

۵۷

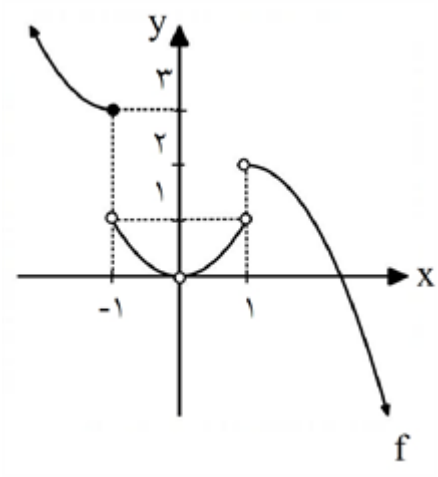
با توجه به نمودار تابع f ، حدهای خواسته شده را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

د) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -یازدهم

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۲$

ج) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۰$

د) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۱$

۵۸

مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۱-\cos x}{x^۲} & x > ۰ \\ b-۱ & x = ۰ \\ x-۲a & x < ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ پیوسته باشد.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰)$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱-\cos x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin^۲\left(\frac{x}{۲}\right)}{x^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin^۲\left(\frac{x}{۲}\right)}{۴\left(\frac{x}{۲}\right)^۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (x-۲a) = -۲a$$

$$f(۰) = b-۱$$

$$-۲a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴} \text{ و } b-۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

۵۹

بازه‌ی بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x) = ۲ - \sqrt{۳ - x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱ ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم. هر بازه بسته‌ای که زیرمجموعه‌ی دامنه تابع باشد می‌تواند جواب مسئله باشد.

$$۳ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۳ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۳]$$

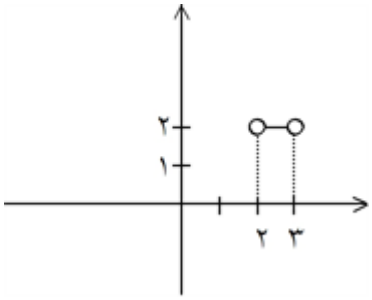
بازه‌هایی مانند $[۰, ۳]$ و $[۱, ۲]$ را می‌توان به عنوان پاسخ در نظر گرفت.

۶۰

تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(۲, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چه‌قدر است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱ حداکثر مقدار k برابر ۳ است.



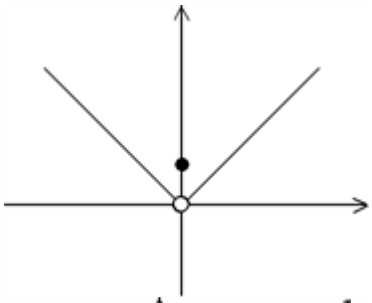
۶۱

الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری‌که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.
ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری‌که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.
پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری‌که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

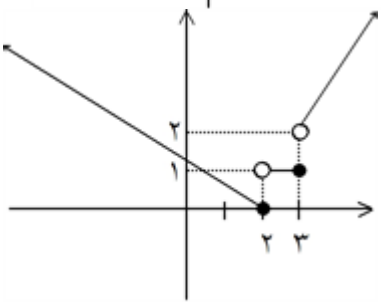
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

الف) $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$



ب)



پ) $f(x) = \dfrac{x + ۱}{x^۲ - ۴}$ این تابع در دو نقطه $x = ۲$ و $x = -۲$ ناپیوسته است. زیرا تابع در این دو نقطه تعریف نشده است. در سایر نقاط یعنی $R - \{\pm ۲\}$ تابع پیوسته است.

۶۲

نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x = ۰$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x) = \begin{cases} x & x < ۰ \\ a & x = ۰ \\ ۲x + ۱ & x > ۰ \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

الف) $\lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = ۲(۰) + ۱ = ۱$

$\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = ۰$

$f(۰) = a$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ) یعنی صفر و یک برابر شوند و چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a درنظر گرفته شود باز این تابع پیوسته نیست.

ب) $\lim\limits_{x \to ۰^+} g(x) = \lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{ax}{x} = a$

$\lim\limits_{x \to ۰^-} g(x) = \lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{ax}{|a|} = \lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{ax}{-x} = -a$

$g(۰) = ۱$

برای پیوسته بودن باید حد راست و چپ و مقدار تابع در نقطه‌ی صفر برابر شوند. چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a درنظر گرفته شود باز این تابع پیوسته نیست.

۶۳

با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y = |x - ۱| + ۲$

ب) $y = x - [x]$

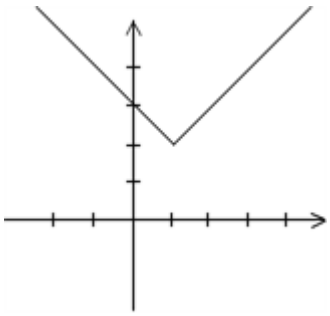
پ) $y = [x] + [-x]$

ت) $y = \begin{cases} x(x - ۱) & x \leq ۱ \\ -x + ۲ & x > ۱ \end{cases}$

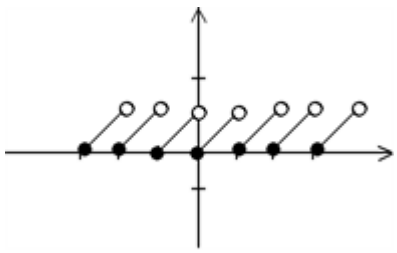
مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

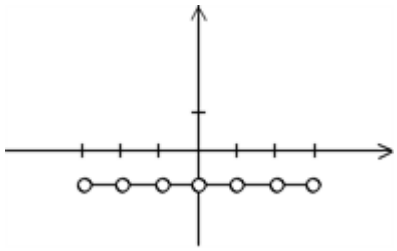
الف)



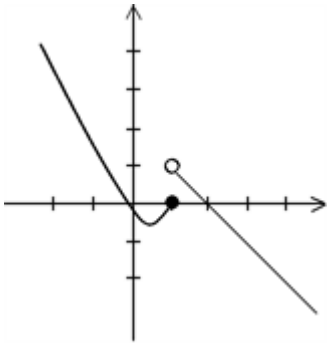
ب)



پ)



ت)



۶۴

اگر $f(x)=\dfrac{x+۱}{۲x^۲-x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)g(x)$ را بیابید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)g(x)=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\left(\frac{x+۱}{۲x^۲-x-۱}\times\frac{۲x+۱}{x}\right)=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{(x+۱)(۲x+۱)}{(۲x+۱)(x-۱)x}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{x+۱}{x(x-۱)}=\frac{-\frac{۱}{۲}+۱}{-\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۳}{۲}\right)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

۶۵

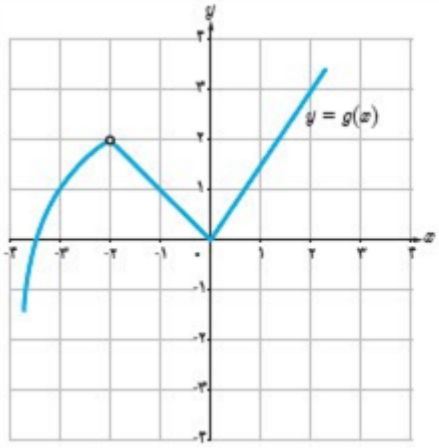
در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

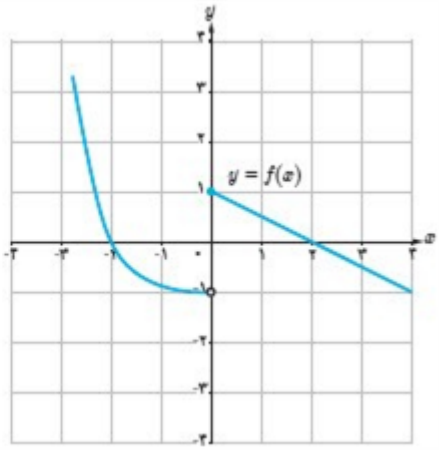
$$\lim_{x\to -۲}(۲g(x)-f(x))$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\lim_{x\to -۳} -۳\sqrt{g(x)}$$

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}$$





مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to -۲} ۲g(x)-f(x)=۲\lim_{x\to -۲} g(x)-\lim_{x\to -۲} f(x)=۲\times ۲-۰=۴$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۰} g(x)}{\lim\limits_{x\to ۰} f(x)}=\text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to -۳} -۳\sqrt{g(x)}=-۳\sqrt{\lim_{x\to -۳} g(x)}=-۳\sqrt{۱}=-۳$$

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}=\sqrt[۳]{۸\lim_{x\to ۲} g(x)}=\sqrt[۳]{۲۴}$$

۶۶

مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+b & x>-۱\end{cases}$$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x^۲-۲}{|x|}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$

$$\lim_{,x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{,x\to(-۱)^+} ۳x+b=-۳+b$$

$$\Rightarrow -۳+b=-۱\Rightarrow b=۲$$

۶۷

اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱ برهان خلف: فرض می‌کنیم تابع $h=f+g$ در a حد دارد یعنی $\lim_{x\to a} h(x)=L$ چون f در a حد دارد یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=M$ آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}(g(x)+f(x)-f(x))=\lim_{x\to a}(g(x)+f(x))-\lim_{x\to a} f(x)=L-M\Rightarrow$$

تابع g در a حد دارد و این خلاف فرض است زیرا طبق فرض g در a حد ندارد پس تابع $f+g$ در a حد ندارد.

۶۸

تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^۲-۱}=۴$.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

$$\frac{\lim_{x\to ۲} g(x)}{\lim_{x\to ۲} x^۲-۱}=۴\Rightarrow\frac{\lim_{x\to ۲} g(x)}{۳}=۴\Rightarrow\lim_{x\to ۲} g(x)=۱۲$$

۶۹

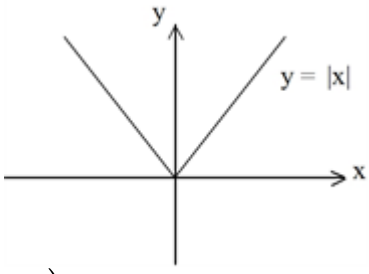
با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim_{x\to ۰}|x|$ را به دست آورید.

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱



الف) $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۰\Rightarrow\lim_{x\to ۰} f(x)=۰$

ب) $f(x)=|x|$

$$\begin{cases} a\geq ۰\Rightarrow |a|=a\\ \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}|x|=a=|a|\end{cases}$$

$$\begin{cases} a<۰\Rightarrow |a|=-a\\ \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}|x|=-a=|a|\end{cases}$$

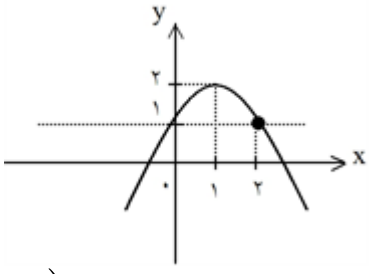
۷۰

با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-۱)^۲ + ۲$، حدود زیر را مشخص کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} [f(x)]$ ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\right]$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱



الف) $\lim\limits_{x\to ۱} [f(x)] = ۱$ در همسایگی ۱، نه در خود یک

$۱ < f(x) < ۲ \Rightarrow [f(x)] = ۱$

ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\right] = [۲] = ۲$

۷۱

با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^۲ - x}$ در نقطه‌ی $x = ۱$ چه می‌توان گفت؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

$x^۲ - x \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \leq x \leq ۱ \Rightarrow$ تابع در همسایگی چپ یک تعریف شده است

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \sqrt{(۱)^۲ - (۱)} = ۰$

۷۲

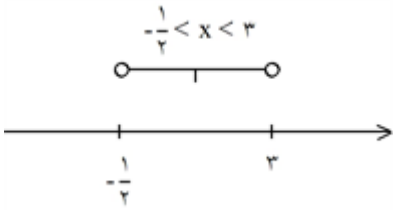
اگر بازه‌ی $(x-۱, ۲x+۳)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

$x - ۱ < ۲ \Rightarrow x < ۳$

$۲x + ۳ > ۲ \Rightarrow ۲x > -۱ \Rightarrow x > \frac{-۱}{۲}$



۷۳

تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ را درنظر بگیرید:

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟

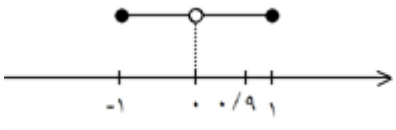
ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=۱$ چطور؟

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱

الف) $۱-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$

$D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$



ب) صفر

پ) بله

ت) بله - خیر

۷۴

تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases}-۱ & x\in Z\\ ۲ & x\notin Z\end{cases}$ را درنظر بگیرید:

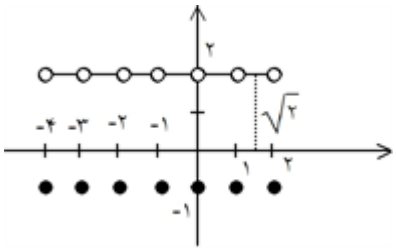
الف) نمودار g را در فاصله $[-۴,۲]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=\ldots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} g(x)=\ldots$

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱ الف)



ب) $\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=۲$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} g(x)=۲$

۷۵

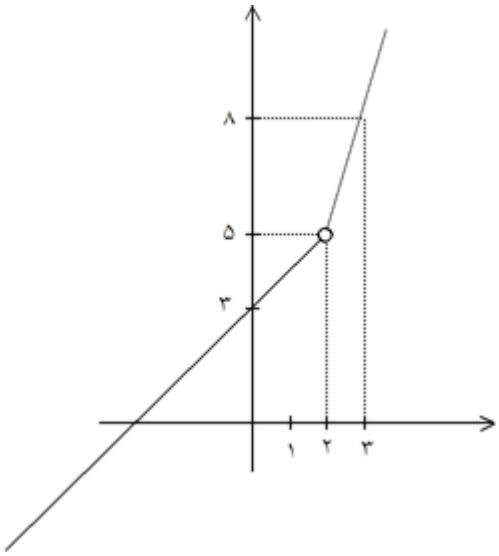
تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x>۲ \\ x+۳ & x<۲ \end{cases}$ را درنظر بگیرید:

الف) آیا تابع f در نقطه $x=۲$، تعریف شده است؟

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را به دست آورید.

مسایل، تمرینات، فعالیتها و خودآزمایی های کتابهای درسی-پایه یازدهم-حسابان(۱)

پاسخ: ۱ الف) خیر



ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۵$

۷۶

تابع غیرصفر $f(x)=a[x+۱]+b[x+[a+۱]]$ در R پیوسته است. مقدار $\frac{a[a]}{f(a)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

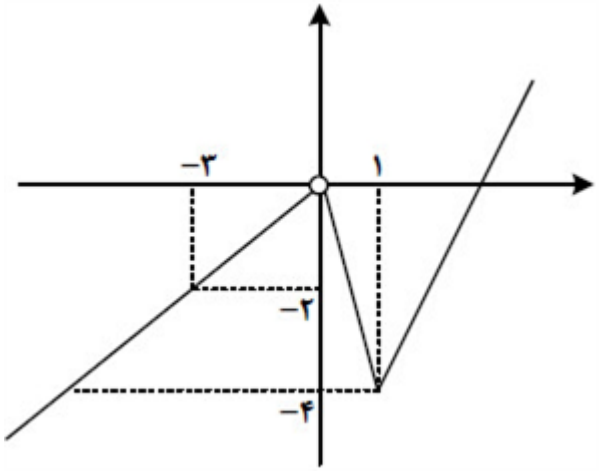
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط وجود پیوستگی در R حذف $[x]$ است $\Longleftarrow a=-b$

$$f(x)=a[x]+a+b[x]+b[a+۱]=f(x)=\cancel{a[x]}+a+\cancel{b[x]}+b[a]+b$$

$$\frac{a[a]}{f(a)}=\frac{a[a]}{a+b[a]+b}=\frac{a[a]}{a-a[a]-a}=-۱$$

۷۷ شکل مقابل، نمودار تابع f است. مقدار $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{|x|}+\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{f(x)}$ کدام است؟

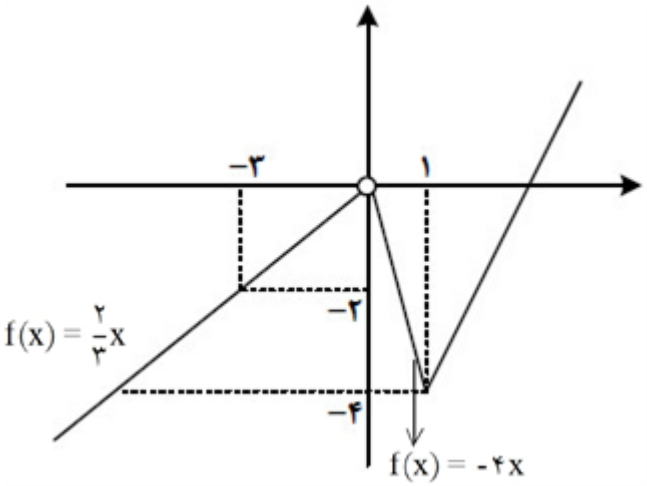


۱) $-۵/۵$ ۲) $-۴/۲۵$ ۳) $-۳/۷۵$ ۴) $-۲/۵$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim \frac{-۴\cancel{x}}{\cancel{x}}+\lim\frac{-\cancel{x}}{\frac{۲}{۳}\cancel{x}}=-۴-۱/۵=-۵/۵$$



۷۸ به ازای برخی مقادیر صحیح نامنفی c، تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲-۴x+۴} & |x-۲|\le c\\ a(x-۲)^۲+b(x-۲) & |x-۲|>c\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. چند مقدار برای $[ac]$ وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیش از ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned}x=c+۲\Rightarrow c=ac^۲+bc\Rightarrow ۱=ac+b\\ x=-c+۲\Rightarrow c=ac^۲-bc\Rightarrow ۱=ac-b\end{aligned}\Rightarrow b=۰,ac=۱\Rightarrow [ac]=۱$$

۷۹

اگر $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{a+\sqrt{bx+c}}{x} = \frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x = ۰$ ریشه مخرج است اما حد جواب دارد پس $x = ۰$ ریشه صورت هم هست

$$a+\sqrt{c} = ۰ \Rightarrow a = -\sqrt{c}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{a+\sqrt{bx+c}}{x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{bx+c}-\sqrt{c}}{x} = \frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cancel{bx}+\cancel{c}-\cancel{c}}{\cancel{x}(\sqrt{bx+c}+\sqrt{c})} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{b}{۲\sqrt{c}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{c}}{۲}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{-\sqrt{c}\times\frac{\sqrt{c}}{۲}}{c} = -\frac{۱}{۲}$$

۸۰

تابع غیرصفر $f(x) = a[x] + b[x+۱]$ در R پیوسته است. مقدار $\frac{f(a)}{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

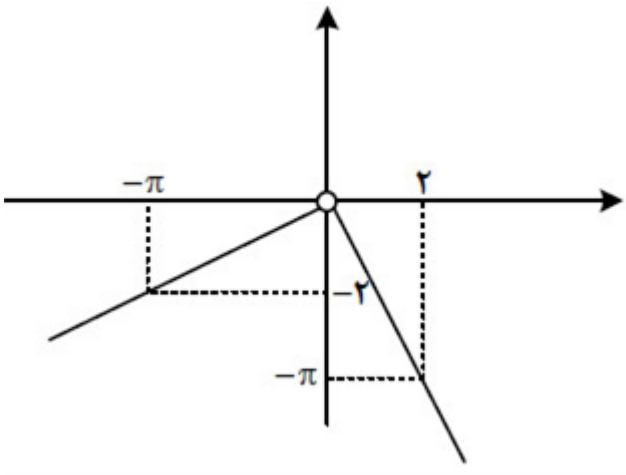
سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = a[x] + b[x] + b \Rightarrow f(x) = (a+b)[x] + b \Rightarrow a+b = ۰ \Rightarrow a = -b$$

$$\Rightarrow f(x) = b \Rightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{b}{a} = \frac{-a}{a} = -۱$$

۸۱ شکل زیر، نمودار تابع f است. مقدار $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^{+}} \frac{|f(x)|}{\operatorname{Sin} x} + \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{-}} \frac{\operatorname{Sin} x}{|f(x)|}$ کدام است؟



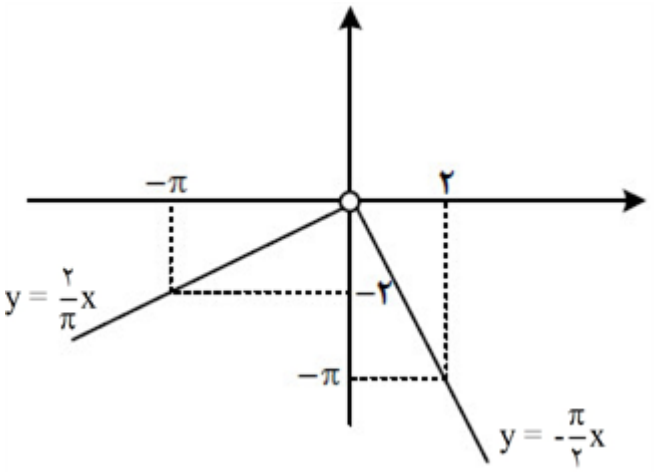
۱) $۱ - \frac{۴}{\pi^{۲}}$ ۲) $\frac{۴}{\pi^{۲}} - ۱$ ۳) $۴\pi - \frac{۱}{\pi^{۲}}$ ۴) $۴\pi + \frac{۱}{\pi^{۲}}$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^{-}} \frac{\operatorname{Sin} x}{|f(x)|} = \frac{۱}{-\frac{\pi}{۲}\times\frac{\pi}{۲}} = +\frac{۴}{\pi^{۲}}$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^{+}} \frac{|f(x)|}{\operatorname{Sin} x} = \frac{\left|\frac{۲}{\pi}\times-\frac{\pi}{۲}\right|}{-۱} = -۱$$



۸۲

به ازای مقادیر طبیعی c، تابعی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^{۲}-۲x+۱} & |x|\le c\\ ax^{۲}+bx+۲ & |x|>c\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. کدام می‌تواند مقدار $\left[\frac{a}{b}\right]$ باشد؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۴-

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}|x-۱| & -c\le x\le c\\ ax^{۲}+bx+۲ & x<-c\,,\ x>c\end{cases}$$

$$x=c\xrightarrow{c\in N}c-۱=ac^{۲}+bc+۲$$

$$x=-c\xrightarrow{c\in N}c+۱=ac^{۲}-bc+۲$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{تفاضل}\Rightarrow -۲bc=۲\Rightarrow b=-\frac{۱}{c}\\ \Rightarrow c-۱=ac^{۲}+۱\Rightarrow a=\frac{c-۲}{c^{۲}}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۲-c}{c}=\frac{۲}{c}-۱$$

$$c=۱\Rightarrow \frac{۲}{c}-۱=۱$$

$$c=۲\Rightarrow \frac{۲}{c}-۱=۰$$

$$c>۲\Rightarrow -۱<\frac{۲}{c}-۱<۰\Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right]=-۱$$

۸۳

اگر $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{a+\sqrt{(bx+۱)(cx+۱)}}{x}=۲$ باشد، مقدار $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۴- ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{حاصل حد}=۲\\ \text{حد مخرج}=۰\end{array}\right\}\text{حد صورت}=۰\Rightarrow a+\sqrt{۱}=۰\Rightarrow a=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{bc\,x^{۲}+(b+c)x+۱}-۱}{x}=۲\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{bc\,x^{۲}+(b+c)x+\cancel{۱}-\cancel{۱}}{x(\sqrt{bc\,x^{۲}+(b+c)x+۱}+۱)}=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{x}(bc\,x+b+c)}{\cancel{x}(\sqrt{bc\,x^{۲}+(b+c)x+۱}+۱)}=۲$$

$$\frac{b+c}{۲}=۲\Rightarrow b+c=۴$$

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}=\frac{۴}{-۱}=-۴$$

۸۴ تابع ناصفر $f(x) = b\left[x^{۲} - ax\right] - ۲a$ در R پیوسته است. مقدار $\frac{a}{f(b)}$ کدام است؟

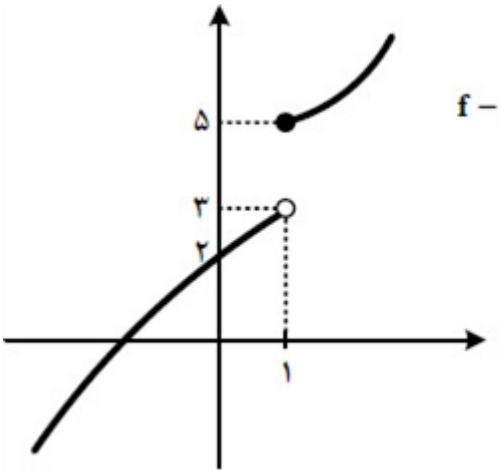
۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) ۱ ۴) صفر

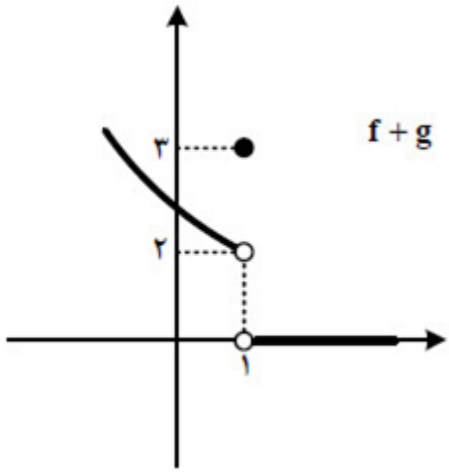
سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = b\left[x(x-a)\right] - ۲a \xrightarrow{\text{در } R \text{ پیوسته}} b = ۰ \Rightarrow \frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(۰)} = \frac{a}{-۲a} = -\frac{۱}{۲}$$

۸۵ شکل‌های زیر، نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ هستند. مقدار $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟





۱) حد ندارد. ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱) $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} (f+g)(x) = ۰$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} (f+g)(x) = ۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} (f-g)(x) = ۵$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} (f-g)(x) = ۳$

$$۱,۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^{+}} (f+g)(x) + \lim_{x\to ۱^{+}} (f-g)(x) = ۲ \lim_{x\to ۱^{+}} f(x) = ۵ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^{+}} f(x) = ۲/۵$$

$$۲,۴ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^{-}} (f+g)(x) + \lim_{x\to ۱^{-}} (f-g)(x) = ۲ \lim_{x\to ۱^{-}} f(x) = ۵ \Rightarrow \lim_{x\to ۱^{-}} f(x) = ۲/۵$$

۸۶

مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x)=\dfrac{x-۲}{x^۲-[x^۲]}$ در نقطه $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) صفر

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۲}{x^۲-[x^۲]}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۲}{x^۲-۳}=۰$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۲-[x^۲]}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۴}$$

پس مجموع حدها برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

۸۷

تابع $f(x)=\begin{cases}(۱-a)[x]+(۳a^۲-۱)[-x] & x\notin Z\\ b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{a}\right) & x\in Z\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\dfrac{a}{b}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع روی R پیوسته است پس در $x=۰$ نیز پیوسته است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۰)=b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{a}\right)\\ \lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=(۱-a)\times(۰)+(۳a^۲-۱)(-۱)=-۳a^۲+۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=(۱-a)\times(-۱)+(۳a^۲-۱)(۰)=a-۱\end{array}\right\}\Rightarrow -۳a^۲+۱=a-۱$$

$$\Rightarrow ۳a^۲+a-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{-۱}\right)=۰\\ \text{حد تابع}=a-۱=-۱-۱=-۲\end{cases}\text{غ ق ق}\\ a=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{\frac{۲}{۳}}\right)=b\,\mathrm{Sin}\frac{۳\pi}{۲}=-b\\ \text{حد تابع}=a-۱=\frac{۲}{۳}-۱=-\frac{۱}{۳}\end{cases}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -b=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=۲$$

۸۸

اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۶x^۲+(m+۳)x+\frac{m}{۲}}}{|۲x^۳+(m-۳)x^۲+a^۲|} & x\neq a\\ \dfrac{۲\tan b}{\sqrt{-x}} & x=a\end{cases}$ در R پیوسته باشد، کدام مورد می‌تواند مقدار b باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x=a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

$$\Delta=۰\Rightarrow(m+۳)^۲-۱۲m=۰\Rightarrow m^۲-۶m+۹=۰\Rightarrow m=۳$$

$$a=-\frac{(m+۳)}{۲(۶)}=-\frac{۶}{۲\times۶}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۶x^۲+۶x+\frac{۳}{۲}}}{\left|۲x^۳+\frac{۱}{۴}\right|} & x\neq-\frac{۱}{۲}\\ ۲\sqrt{۲}\,\mathrm{tg}\,b & x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۶}\cancel{\left|x+\frac{۱}{۲}\right|}}{۲\cancel{\left|x+\frac{۱}{۲}\right|}\left(x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}\right)} & x\neq-\frac{۱}{۲}\\ ۲\sqrt{۲}\,\mathrm{tg}\,b & x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\frac{۱}{۲}}f(x)=\dfrac{\sqrt{۶}}{۲\left(\frac{۳}{۴}\right)}=\dfrac{۲\sqrt{۶}}{۳}\\ f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۲\sqrt{۲}\,\mathrm{tg}\,b\end{array}\right\}\Rightarrow ۲\sqrt{۲}\,\mathrm{tg}\,b=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$\mathrm{tg}\,b=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow b=\frac{\pi}{۶}$$

۸۹

مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{b\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-b}{\mathrm{ax}+b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون حد صورت صفر است پس حد مخرج نیز باید صفر باشد.

$$a+b=۰\Rightarrow a=-b\Rightarrow\lim_{x\to۱}\frac{b(\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-۱)}{-\mathrm{bx}+b}=\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-۱}{۱-x}\xrightarrow{\sqrt[۳]{x}=t}$$

$$\lim_{t\to۱}\frac{\sqrt{۲-t}-۱}{۱-t^۳}=\lim_{t\to۱}\frac{\cancel{۱-t}}{\cancel{(۱-t)}(۱+t+)(\sqrt{۲-t}+۱)}=\frac{۱}{۳\times۲}=\frac{۱}{۶}$$

۹۰

برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases} |[-x]-x| & [x] \text{ فرد} \\ k-x+[x] & [x] \text{ زوج} \end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$

۱) برای هیچ مقداری از n، پیوسته نیست.

۲) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.

۳) n فرد

۴) n زوج

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases} |[-x]-x| & [x] \text{ فرد} \\ k-x+[x] & [x] \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۱)]{n=۲}\begin{cases} ۲^{+}\to k-۲+۲=k \\ ۲^{-}\to |-۲-۲|=۴ \\ ۲\to k \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۲)]{n=-۲}\begin{cases} -۲^{+}\to k+۲-۲=k \\ -۲^{-}\to |۲+۲|=۴ \\ ۲\to k \end{cases}$$

$$\xrightarrow{۱,۲} k=۴$$

$$n=۱\Rightarrow\begin{cases} ۱^{+}\to |-۲-۱|=+۳ \\ ۱^{-}\to k-۱ \\ ۱\to -۲ \end{cases}$$ برای زوج فقط برقرار است

۹۱

مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{b\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲b}{ax-b}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۱۲}$

۲) $\dfrac{۱}{۶}$

۳) $\dfrac{۱}{۴۸}$

۴) $\dfrac{۱}{۲۴}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$۸a-b=۰\Rightarrow b=۸a\Rightarrow a=\frac{b}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲}{\frac{x}{۸}-۱}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}{۲+۲}=\lim_{x\to ۸}\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{\frac{x}{۲}-۴}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۲^{۲}}{۴+۴+۴}=\lim_{x\to ۸}\frac{x-۸}{۶x-۴۸}=\frac{۱}{۶}$$

تذکر: سؤال با قاعده هوپیتال نیز قابل حل است.

۹۲ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۳x^۲+(m-۱)x+(m-۴)}}{\left|x^۳+((m-۷)x+a)^۲\right|} & x\neq a\\ \dfrac{۲\,\mathrm{Sin}\,b}{۳\sqrt{x+۲}} & x=a\end{cases}$ در R پیوسته باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x=a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

$$\Delta=۰\Rightarrow(m-۱)^۲-۱۲(m-۴)=۰\Rightarrow(m-۷)^۲=۰\Rightarrow m=۷$$

ریشه صورت و مخرج $x=a\Rightarrow a=-۱$

$$\text{صورت}:\ \frac{\sqrt{۳(x+۱)^۲}}{\left|x^۳+۱\right|}=\frac{\sqrt{۳}\,|x+۱|}{|x+۱|\,(x^۲-x+۱)}\Rightarrow\lim_{x\to a}\text{صورت}=\lim_{x\to(-۱)}\text{صورت}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{مخرج}:\ x=a=-۱:\ \frac{۲\,\mathrm{Sin}\,b}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\mathrm{Sin}\,b=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۹۳ به‌ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|x^۲-x-۲\right|}{x-۲} & x<۲\\ a\,[-x]+۳+۳a & x\geq ۲\end{cases}$، روی بازه‌ی $(-\infty,۲]$ پیوسته است؟

۱) -۳ ۲) -۶ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حد چپ و راست در ۲ برابر نیستند، پس در ۲ پیوسته نیست و در نتیجه در R پیوسته نیست.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{|(x+۱)(x-۲)|}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{-(x+۱)(x-۲)}{x-۲}=-۳\\ f(۲)=-۲a+۳+۳a=a+۳\end{array}\right\}a+۳=-۳\Rightarrow a=-۶$$

۹۴

برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases} |x-[-x]| & [x] \text{ زوج} \\ x-[x]+k & [x] \text{ فرد} \end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$

۱) n زوج

۲) n فرد

۳) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.

۴) برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌توانیم برای $n=۱$ و $n=۲$ مسئله را بررسی کنیم، پس پیوستگی را در $x=\pm۱$ و $x=\pm۲$ بررسی می‌کنیم:

$$x=۱: \lim_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)=۱-۱+k=k$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}|x-[-x]|=۲$$

$$x=-۱: \lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=f(-۱)=k$$

$$\lim_{x\to (-۱)^-} =\lim_{x\to (-۱)^-}|x-[-x]|=۲$$

پس اگر $k=۲$ باشد به ازای $x=\pm۱$ پیوستگی داریم، این یعنی مقادیر فرد n قابل قبول‌اند.

$$x=۲: \lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}|x-[-x]|=۵$$

$$f(۲)=۲-(-۲)=۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x-[x]+k)=۱+k$$

پس به ازای هیچ مقدار زوج n پیوستگی نداریم.

۹۵

اگر $f^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۲۷}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -۳^-}\dfrac{۲x+\sqrt{f(x)}}{|x^۲+x-۶|}$ کدام است؟

۱) $-۰/۳$

۲) $-۰/۶$

۳) $۰/۳$

۴) $۰/۶$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y=-\sqrt{x-۲۷}\Rightarrow y^۲=x-۲۷\Rightarrow x=y^۲+۲۷\Rightarrow f(x)=x^۲+۲۷$$

$$\lim_{x\to -۳^-}\frac{۲x+\sqrt{f(x)}}{|x^۲+x-۶|}=\lim_{x\to -۳^-}\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۲۷}}{|(x+۳)(x-۲)|}\times\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۲۷}}{۲x-\sqrt{x^۲+۲۷}}$$

$$=\lim_{x\to -۳^-}\frac{۳(x^۲-۹)}{(x+۳)(x-۲)}\times\frac{۱}{-۶-۶}=-۰/۳$$

۹۶ تابع $f(x)=\begin{cases} [x]+[-x] & x^{۲}<|x| \\ \text{Cos}\,\pi x & x^{۲}=|x| \\ |x|\,([x]+۱) & |x|<x^{۲}<۲ \end{cases}$، در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲

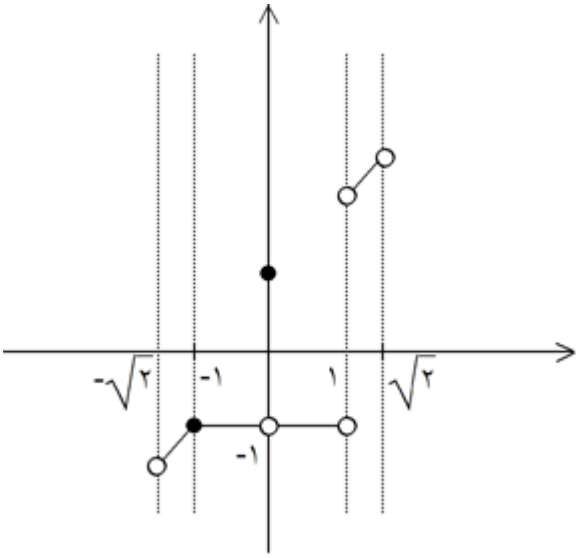
۳) ۳ ۴) در همه نقاط پیوسته است.

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & -۱<x<۱-\{۰\} \\ \text{Cos}\,(\pi x) & x=۰\,,۱\,,-۱ \\ |x|\,([x]+۱) & ۱<x<\sqrt{۲} \text{ یا } -\sqrt{۲}<x<-۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -۱ & -۱<x<۱-\{۰\} \\ -۱ & x=\pm ۱ \\ ۱ & x=۰ \\ ۲x & ۱<x<\sqrt{۲} \\ x & -\sqrt{۲}<x<-۱ \end{cases}$$

پس این تابع در $x=۰$ و $x=۱$ ناپیوسته است.



اگر در ریشه‌ای از معادله $۵x^{۲}-ax+b=۰$، حد تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+ax+b}{x-۱}$ موجود بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $\left[\dfrac{b-۲a}{۳}\right]$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) صفر

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۹۷ **پاسخ:** ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{ریشه}=۱ \Rightarrow ۵-a+b=۰ \Rightarrow a-b=۵$$

$$f\ \text{ریشه صورت}=۱ \Rightarrow ۱+a+b=۰ \Rightarrow a+b=-۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=-۳ \end{cases}$$

$$\left[\frac{b-۲a}{۳}\right]=\left[\frac{-۳-۴}{۳}\right]=-۳$$

تذکر: تنها نقطه‌ای که تابع f در آن ناپیوسته است، $x=۱$ است و چون f در آن حد دارد، پس صورت کسر باید به ازای $x=۱$ صفر شود، در غیر این‌صورت حد، بی‌نهایت می‌شود.

۹۸

تابع $f(x)=\begin{cases}\tan\frac{(۲x+۱)\pi}{۴} & x\le ۱\\ \frac{|x^۲+x-۲|}{a(۱-x)} & ۱<x<۵\\ b(x-[-x]) & x\ge ۵\end{cases}$ روی بازه $[۱,۵]$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟

۱) $-۰/۷$ ۲) $-۰/۵$ ۳) $۰/۷$ ۴) $۰/۵$

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

پیوستگی راست در $x=۱$:
$$\left.\begin{cases} f(۱)=\tan\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)=-۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۲)}{-a\cancel{(x-۱)}}=\frac{۳}{-a}\end{cases}\right\}\frac{۳}{-a}=-۱\Rightarrow a=۳$$

پیوستگی چپ در $x=۵$:
$$\left.\begin{cases} f(۵)=b(۵-[-۵])=۱۰b\\ \lim\limits_{x\to ۵^-} f(x)=\frac{|۲۵+۵-۲|}{۳(۱-۵)}=\frac{۲۸}{۳\times -۴}=\frac{-۷}{۳}\end{cases}\right\}۱۰b=\frac{-۷}{۳}\Rightarrow b=\frac{-۷}{۳۰}$$

$\Rightarrow \text{ab}=-۰/۷$

۹۹

اگر تابع $f(x)=\begin{cases}|x-[x]| & [x]\ \text{زوج}\\ |x-[x-a]| & [x]\ \text{فرد}\end{cases}$ در R پیوسته باشد، مجموعه مقادیر $[a]$ شامل چند عضو است؟ $(a<-۱)$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع در R پیوسته است پس در $x=۰$ هم پیوسته است. حال برای دو حالت $a\notin Z$ و $a\in Z$ داریم:

$$a\notin Z\left\{\begin{array}{c} f(۰)=۰\\ f(۰^+)=۰\\ f(۰^-)=|۰-[-a]|=[-a]\end{array}\right\}[-a]=۰\Rightarrow ۰\le -a<۱\Rightarrow -۱<a\le ۰\ \text{غ ق ق}$$

با شرط $a<-۱$ اشتراک ندارد.

$$a\in Z\left\{\begin{array}{c} f(۰)=۰\\ f(۰^+)=۰\\ f(۰^-)=\left|۰+a-\left[۰^-\right]\right|=|a+۱|\end{array}\right.$$

$|a+۱|=۰\Rightarrow a=-۱$

با شرط $a<-۱$ اشتراک ندارد.

پس به ازای هیچ مقدار $a<-۱$ پیوسته نمی‌شود.

تذکر: تابع فقط به ازای $a=-۱$ روی R پیوسته می‌شود.

۱۰۰ تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{2bx^2} & x>0\\ |b-x| & x=0\\ [x]-2a & x<0\end{cases}$، در $x=0$ پیوسته است. مقدار حقیقی $b-a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{25}{16}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حدود چپ و راست و مقدار تابع در $x=0$ را می‌یابیم.

حد چپ : $L^-=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}([x]-2a)=-1-2a$

مقدار تابع : $f(0)=|b|$

حد راست : $L^+=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{2bx^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2bx^2}=\frac{\frac{x^2}{2}}{2bx^2}=\frac{1}{4b}$

برای پیوستگی باید $-1-2a=|b|=\frac{1}{4b}$ برقرار باشد.

$$\Rightarrow |b|=\frac{1}{4b}\Rightarrow\begin{cases}4b^2=1\Rightarrow b=\frac{1}{2}\ ;\ b>0\\ \text{یا}\\ -4b^2=1\Rightarrow \text{جواب ندارد}\end{cases}\Rightarrow -1-2a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow b-a=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

۱۰۱ حاصل $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x\to -1^+\Rightarrow x+1>0\Rightarrow |x+1|=x+1\Rightarrow [x]=-1\Rightarrow -x\to 1^-\Rightarrow [-x]=0$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]}=\frac{x+1-1}{x}=\frac{x}{x}=1$$

۱۰۲ حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+4+2x)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

۱۰۳

حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

راه اول:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}} \times \frac{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}} \times \frac{\sqrt{2+2\cos x}}{\sqrt{2+2\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2x\cancel{\sqrt{2+2\cos x}}}{\sqrt{4-4\cos^2 x}\,\cancel{\left(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x}\right)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x}{4\sqrt{2}\,|\sin x|} = \lim \frac{4\cancel{x}}{4\sqrt{2}(-\cancel{\sin x})}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

راه دوم: هوپیتال

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}} \xrightarrow{\text{HOP}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}+\frac{5}{2\sqrt{2-5x}}}{-\cos\frac{x}{2}} = \frac{-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۰۴

تابع $f(x)=\begin{cases} |x|+[-x] & |x^3|<x^2 \\ 1+\cos \pi x & |x^3|=x^2 \\ [x^2]-[x] & |x^3|>x^2 \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) بیشمار ۴) در همه نقاط پیوسته است.

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه سوم در بیشمار نقطه ناپیوسته است پس نیازی به بررسی بقیه ضابطه‌ها و نقاط مرزی نیست.

$$f(x)=\begin{cases} |x|+[-x] & -1<x<1,\ x\neq 0 \\ 1+\cos \pi x & x=0,1,-1 \\ [x^2]-[x] & x>1 \text{ یا } x<-1 \end{cases}$$

۱

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x+۱})}$

$=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x-۲a)=۱-۲a$

مقدار $f(۱)=b-۱$

چون تابع f در $x=۱$ پیوسته است $\Rightarrow\begin{cases} b-۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\frac{۳}{۲}\\ ۱-۲a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}\end{cases}$

۲

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} ۵=۵$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{x^۲[x]-۲۷}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۳x^۲-۲۷}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۳(x^۲-۹)}{x-۳}=۳\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=۱۸$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}\times\frac{۱+\operatorname{Sin}x}{۱+\operatorname{Sin}x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\operatorname{Sin}^۲x}{\operatorname{Cos}x}\times\frac{۱}{۱+\operatorname{Sin}x}$

$=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\operatorname{Cos}^۲x}{\operatorname{Cos}x(۱+\operatorname{Sin}x)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\operatorname{Cos}x}{۱+\operatorname{Sin}x}=\frac{۰}{۲}=۰$

۳

$\lim\limits_{x\to ۲^-}[f(x)]=۰,\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۳,\ f(۲)=۲\Rightarrow A=۰+۲+۳=۵$

۴

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(\operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x)=۱\ ,\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(x^۲+۱)=۱$

$f(۰)=\sqrt{۲}\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۰} f(x)\neq f(۰)\Rightarrow$ f در صفر پیوسته نیست.

۵

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{(۲-x)(۴+۲x+x^۲)}{(x-۲)(x+۵)}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۴+۲x+x^۲}{-(x+۵)}=-\frac{۱۲}{۷}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{|۲-x|}{[x]+۱}=\frac{۱}{۳}$

۶ الف) وجود ندارد ب) ۱ پ) خیر

۷

حد چپ $\lim\limits_{x\to(-۱)^-}(۲[x]+۱)=۲(-۲)+۱=-۳$

حد راست $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}(x^۲+۴x)=۱-۴=-۳$

$f(-۱)=-۳$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -۱} f(x)=f(-۱)$ تابع پیوسته است

۸ الف) ۳

ب) $\lim\limits_{x\to -۲} x+\lim\limits_{x\to -۲} f(x)=۲+۴=۶$

۹ چپ

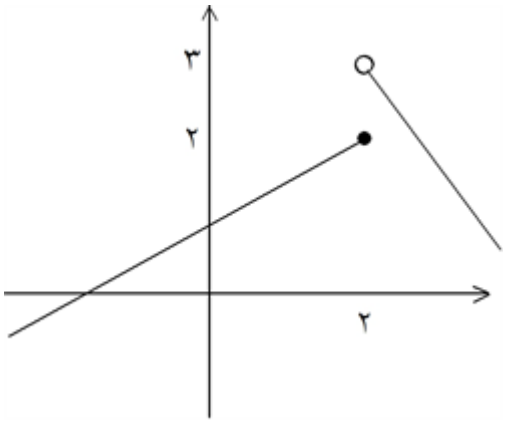
۱۰ $\lim\limits_{x\to -۲^+}(۳-۲x^۲)=-۵\ ,\ \lim\limits_{x\to -۲^-}([x])-۲=-۳-۲=-۵\ ,\ f(-۲)=-۵$

تابع در $x=-۲$ پیوسته است.

۱۱ الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۱)}{(x+۲)}=\dfrac{۱}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^-}\dfrac{[x]+۱}{\mathrm{Cos}\,(-\pi x)}=\lim\limits_{x\to -۱^-}\dfrac{-۲+۱}{-۱}=۱$

۱۲



۱۳ الف) ۳-　　ب) وجود ندارد　　ج) ۱

۱۴ نادرست

۱۵ الف) ۱

ب) ۱) ۳　　۲) ۱　　۳) وجود ندارد

۱۶ چون حد تابع و مقدار تابع برابر است، پس تابع در $x=۲$ پیوسته می‌باشد.

$۲-۵=-۳=۲^۲-۷\Rightarrow -۳=-۳=-۳$

۱۷

x	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	$\to ۲$
f(x)	۰	۰	۰	۰

۱۸ نادرست.

۱۹ $-۲(۰)+a=(۰)^۲+۲=b+۱$

$a=۲, b=۱$

۲۰

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲ - ۹}{x^۲ - ۳x} = \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{(x-۳)(x+۳)}{x(x-۳)} = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{x+۳}{[x]} = \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{۲+۳}{[۲^-]} = \dfrac{۵}{۱} = ۵$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\tan x + \cot x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۱ + ۱ = ۲$

۲۱

$f(۱) = ۲$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} (x^۲ + b) = ۱ + b = ۲ \Rightarrow b = ۱$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} (ax + ۳) = a + ۳ = ۲ \Rightarrow a = -۱$

۲۲

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^۲ - ۱}{x^۲ - x} = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x(x-۱)} = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x^۲ + ۱}{[x]} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۲^۲ + ۱}{[۲^+]} = \dfrac{۵}{۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x) = \operatorname{Sin}\left(\dfrac{\pi}{۴}\right) - \operatorname{Cos}\left(\dfrac{\pi}{۴}\right) = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} - \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰$

۲۳ نادرست.

۲۴ صفر

۲۵

$\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x^۲ - ۳x - ۴}{x^۲ + x} = \lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x-۴}{x} = \dfrac{-۵}{-۱} = ۵$

$\lim\limits_{x\to -۲^-} \dfrac{۲x + ۳}{[x] + ۲} = \dfrac{۲(-۲) + ۳}{-۳ + ۲} = \dfrac{-۱}{-۱} = ۱$

۲۶

$f(۰) = ۱ \,,\, \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = a \,,\, \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = -a$

$a = ۰ \Rightarrow f(۰) \neq \lim\limits_{x\to ۰} f(x) \,,\, a \neq ۰ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) \neq f(x)$

تابع در $x = ۰$ پیوسته نیست.

۲۷

الف) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) = ۰$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) = ۲$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = -۱$

۲۸ خیر. با توجه به دامنه تابع، همسایگی راست یک، وجود ندارد.

$x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow D = [۰, ۱]$

۲۹

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۳-\sqrt{x+۸}}{x^۲-۱} = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۹-(x+۸)}{(x-۱)(x+۱)(۳+\sqrt{x+۸})}$

$= \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱}{(x+۱)(۳+\sqrt{x+۸})} = \dfrac{-۱}{۱۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{[x]}{x} = \lim\limits_{x\to ۰} ۰ = ۰$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲-۲\operatorname{Cos} ۲x}{x \operatorname{Sin} x} = \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲(۱-\operatorname{Cos} ۲x)}{x \operatorname{Sin} x} = \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲(۲\operatorname{Sin}^۲ x)}{x \operatorname{Sin} x}$

$= \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۴\operatorname{Sin} x \times \operatorname{Sin} x}{x \operatorname{Sin} x} = ۴$

۳۰

$f(۰) = \dfrac{-a}{۴}$, $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{۱+x-۱}{x(\sqrt{۱+x}+۱)} = \dfrac{۱}{۲}$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = b - \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۲ \ , b = ۱$

۳۱

$x - ۱ < ۴ \Rightarrow x < ۵$

۳۲

$۲x + ۱ > ۵ \Rightarrow ۲x > ۴ \Rightarrow x > ۲$

۳۳

الف) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x) = ۰$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x) = -۲ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to (-۱)} f(x) =$ حد ندارد

پ) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x) = -۲ \\ f(-۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow$ در $x = -۱$. پیوستگی راست ندارد

تابع f در $x = -۱$ پیوستگی راست ندارد، بنابراین تابع در بازهٔ $[-۱, ۲]$ پیوسته نیست.

۳۴

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = ۲ \\ f(۳) = ۱ \end{cases} \Rightarrow$ تابع f در $x = ۳$. پیوستگی چپ ندارد

تابع f در $x = ۳$ پیوستگی چپ ندارد. بنابراین در بازهٔ $[-۱, ۳]$ پیوسته نیست.

۳۵

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۳-۸}{x^۲-۵x+۶} = \lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{(x-۲)(x-۳)} = \dfrac{۴+۴+۴}{۲-۳} = -۱۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{|۳-x|}{[x]+۱} = \dfrac{|۳-۵|}{[۵^-]+۱} = \dfrac{۲}{۴+۱} = \dfrac{۲}{۵}$

۳۶ شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{۴}\right)$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^+} \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{۴}\right) + \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۴}\right)^-} [-x] + \sqrt{۲} + ۱ = -۱ + \sqrt{۲} + ۱ = \sqrt{۲}$$

بنابراین تابع در $x = \frac{\pi}{۴}$ پیوسته است.

۳۷ $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} [f(x)] + f(۰) + \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \left[۲^-\right] + ۳ + ۳ = ۱ + ۳ + ۳ = ۷$

۳۸ الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱ - x^۳}{x^۲ - ۷x + ۶} = \lim\limits_{x\to ۱} \frac{-(x-۱)(x^۲ + x + ۱)}{(x-۱)(x-۶)} = \frac{-۳}{-۵} = \frac{۳}{۵}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{|x-۵|}{[-x]+۳} = \frac{۴}{-۲+۳} = ۴$

۳۹ نیست.

۴۰ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^+} ax^۲ + x - ۱ = ۹a + ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^-} ax + ۴ = ۳a + ۴ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) - \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = ۹a + ۲ - (۳a + ۴) = ۱۶$

$\Rightarrow ۹a + ۲ - ۳a - ۴ = ۱۶ \Rightarrow ۶a - ۲ = ۱۶ \Rightarrow ۶a = ۱۸ \Rightarrow a = ۳$

۴۱ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} ax^۲ + ۱ = ۴a + ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} ax - ۷ = ۲a - ۷ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) - \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۴a + ۱ - (۲a - ۷) = ۱۰$

$\Rightarrow ۴a + ۱ - ۲a + ۷ = ۱۰ \Rightarrow ۲a + ۸ = ۱۰ \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱$

۴۲ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x^۲ + ۲x + ۴)}{x - ۲} = ۴ + ۴ + ۴ = ۱۲ \Rightarrow a = ۱۲$

$\lim\limits_{x\to ۵} g(x) = \lim\limits_{x\to ۵} x^۲ - ۲x - ۶ = ۲۵ - ۱۰ - ۶ = ۹ \Rightarrow b = ۹$

$\xrightarrow{a=۱۲ \text{ و } b=۹} h(۱۲ - ۹) = h(۳) = \operatorname{Sin}\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = \operatorname{Sin}\left(\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴۳

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲} = ۲+۲=۴ \Rightarrow a=۴$$

$$\lim_{x\to ۳} g(x) = \lim_{x\to ۳} x^۲+۱ = ۹+۱=۱۰ \Rightarrow b=۱۰$$

$$h(x)=۳x-۱ \Rightarrow y=۳x-۱ \Rightarrow y+۱=۳x \Rightarrow x=\frac{y+۱}{۳} \Rightarrow h^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{a=۴ \text{ و } b=۱۰} h^{-۱}(۴+۱۰)=h^{-۱}(۱۴)=\frac{۱۴+۱}{۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵$$

۴۴

الف) $\lim_{x\to ۲} [f(x)] = \left[۳^-\right] = ۲$

ب) $\left[\lim_{x\to ۲} f(x)\right] = [۳] = ۳$

۴۵

الف) $\lim_{x\to ۰} [f(x)] = \left[-۱^-\right] = -۲$

ب) $\left[\lim_{x\to ۰} f(x)\right] = [-۱] = -۱$

۴۶

$$\lim_{x\to(-۱)} f(x) = \lim_{x\to(-۱)} x^۲+kx = (-۱)^۲+k(-۱) = ۱-k=۴ \Rightarrow -k=۳ \Rightarrow k=-۳$$

$$\xrightarrow{k=-۳} f(-۱)+f(-۳)=۵(-۳)-۱+(-۳)^۲-۳(-۳)=-۱۶+۹+۹=۲$$

۴۷

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{kx-۳k}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{k(x-۳)}=\frac{۶}{k}=۱۲$$

$$\Rightarrow ۱۲k=۶ \Rightarrow k=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

۴۸

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۹ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} ۲mx+۷=۴m+۷=۹ \Rightarrow ۴m=۲ \Rightarrow m=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۴۹

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)+[x]}{۳+[-x]}=\frac{\lim_{x\to ۲^-} f(x)+\lim_{x\to ۲^-}[x]}{\lim_{x\to ۲^-}(۳)+\lim_{x\to ۲^-}[-x]}=\frac{۱+۱}{۳-۲}=۲$$

۵۰

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)+[x]}{x+۱}=\frac{\lim_{x\to ۱^-} f(x)+\lim_{x\to ۱^-}[x]}{\lim_{x\to ۱^-}(x)+\lim_{x\to ۱^-}۱}=\frac{۰-۰}{۱+۱}=۰$$

۵۱

$$\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{f(x)+[x]}{x-۱}=\frac{\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)+\lim_{x\to(-۱)^-}[x]}{\lim_{x\to(-۱)^-}(x)-\lim_{x\to(-۱)^-}۱}=\frac{۳-۲}{-۱-۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۵۲

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-۲}{f(x)+۳}=\frac{\lim_{x\to ۰^-} f(x)-\lim_{x\to ۰^-}۲}{\lim_{x\to ۰^-} f(x)+\lim_{x\to ۰^-}۳}=\frac{۲-۲}{۲+۳}=\frac{۰}{۵}=۰$$

۵۳

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = -۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۳$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) =$ حد ندارد

د) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۰$

۵۴

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ۳ax - ۱ = ۳a - ۱ = ۵ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow a = ۲$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ۲bx + ۱۰ = ۲b + ۱۰ = ۵ \Rightarrow ۲b = -۵ \Rightarrow b = -\frac{۵}{۲}$

۵۵

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)+۲}{f(x)-۳} = \frac{\lim\limits_{x\to ۰} f(x) + \lim\limits_{x\to ۰} ۲}{\lim\limits_{x\to ۰} f(x) - \lim\limits_{x\to ۰} ۳} = \frac{۱+۲}{۱-۳} = -\frac{۳}{۲}$$

۵۶

الف) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} \sqrt{۲ - f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to (-۱)^-} (۲) - \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)} = \sqrt{۲-(-۲)} = \sqrt{۴} = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} (f(x))^۲ = (\lim\limits_{x\to ۰} f(x))^۲ = (۲)^۲ = ۴$

۵۷

الف) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x) = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = ۲$

ج) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۰$

د) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۱$

۵۸

شرط پیوستگی : $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰)$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱-\cos x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin^۲\left(\frac{x}{۲}\right)}{x^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin^۲\left(\frac{x}{۲}\right)}{۴\left(\frac{x}{۲}\right)^۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} (x - ۲a) = -۲a$

$f(۰) = b - ۱$

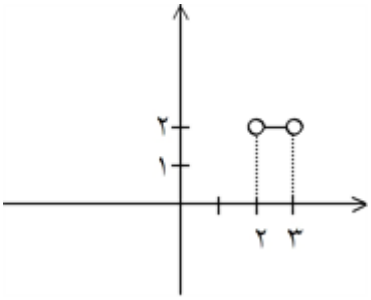
$-۲a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$ و $b - ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$

۵۹ ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم. هر بازه بسته‌ای که زیرمجموعه‌ی دامنه تابع باشد می‌تواند جواب مسئله باشد.

$۳ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۳ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۳]$

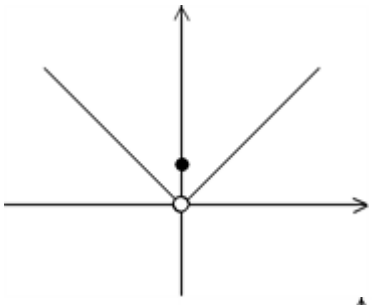
بازه‌هایی مانند $[۰, ۳]$ و $[۱, ۲]$ را می‌توان به عنوان پاسخ در نظر گرفت.

۶۰ حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

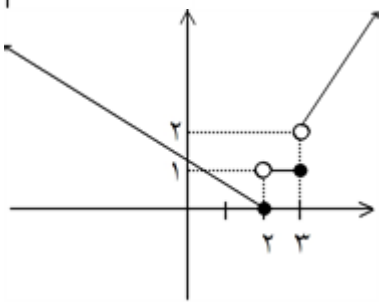


۶۱

الف) $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$



ب)



پ) $f(x) = \dfrac{x+۱}{x^۲ - ۴}$ این تابع در دو نقطه $x = ۲$ و $x = -۲$ ناپیوسته است. زیرا تابع در این دو نقطه تعریف نشده است. در سایر نقاط یعنی $R - \{\pm ۲\}$ تابع پیوسته است.

۶۲

الف) $\lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = ۲(۰) + ۱ = ۱$

$\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = ۰$

$f(۰) = a$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ) یعنی صفر و یک برابر شوند و چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a درنظر گرفته شود باز این تابع پیوسته نیست.

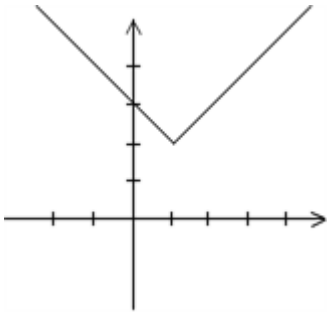
ب) $\lim\limits_{x \to ۰^+} g(x) = \lim\limits_{x \to ۰^+} \dfrac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x \to ۰^+} \dfrac{ax}{x} = a$

$\lim\limits_{x \to ۰^-} g(x) = \lim\limits_{x \to ۰^-} \dfrac{ax}{|a|} = \lim\limits_{x \to ۰^-} \dfrac{ax}{-x} = -a$

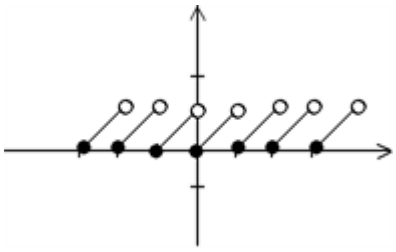
$g(۰) = ۱$

برای پیوسته بودن باید حد راست و چپ و مقدار تابع در نقطه‌ی صفر برابر شوند. چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a درنظر گرفته شود باز این تابع پیوسته نیست.

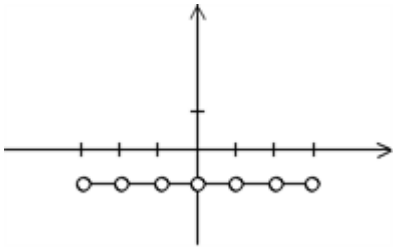
۶۳ الف)



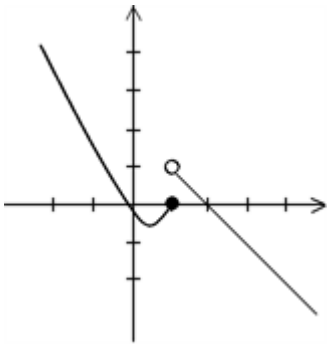
ب)



پ)



ت)



۶۴

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)g(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \left(\frac{x+1}{2x^2-x-1}\times\frac{2x+1}{x}\right) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)(2x+1)}{(2x+1)(x-1)x}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

۶۵

$$\lim_{x\to -2} 2g(x) - f(x) = 2\lim_{x\to -2} g(x) - \lim_{x\to -2} f(x) = 2\times 2 - 0 = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} g(x)}{\lim_{x\to 0} f(x)} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to -3} -3\sqrt{g(x)} = -3\sqrt{\lim_{x\to -3} g(x)} = -3\sqrt{1} = -3$$

$$\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{8g(x)} = \sqrt[3]{8\lim_{x\to 2} g(x)} = \sqrt[3]{24}$$

۶۶

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to (-1)^-} f(x) = \lim_{x\to (-1)^-} \frac{x^2-2}{|x|} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \lim_{,x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{,x\to (-1)^+} 3x+b = -3+b \end{array}\right. \Rightarrow -3+b=-1 \Rightarrow b=2$$

۶۷ برهان خلف: فرض می‌کنیم تابع $h=f+g$ در a حد دارد یعنی $\lim_{x\to a} h(x) = L$ چون f در a حد دارد یعنی $\lim_{x\to a} f(x) = M$ آن‌گاه داریم:

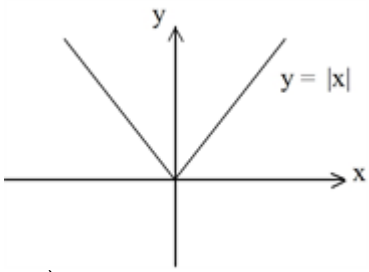
$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} (g(x)+f(x)-f(x)) = \lim_{x\to a} (g(x)+f(x)) - \lim_{x\to a} f(x) = L-M \Rightarrow$$

تابع g در a حد دارد و این خلاف فرض است زیرا طبق فرض g در a حد ندارد پس تابع $f+g$ در a حد ندارد.

۶۸

$$\frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2} x^2-1} = 4 \Rightarrow \frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{3} = 4 \Rightarrow \lim_{x\to 2} g(x) = 12$$

۶۹



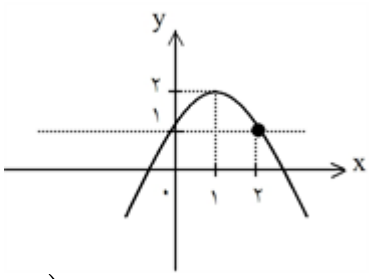
الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ۰ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۰$

ب) $f(x) = |x|$

$$\begin{cases} a \geq ۰ \Rightarrow |a| = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} |x| = a = |a| \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < ۰ \Rightarrow |a| = -a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} |x| = -a = |a| \end{cases}$$

۷۰



الف) $\lim\limits_{x\to ۱} [f(x)] = ۱$ در همسایگی ۱، نه در خود یک

$۱ < f(x) < ۲ \Rightarrow [f(x)] = ۱$

ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\right] = [۲] = ۲$

۷۱

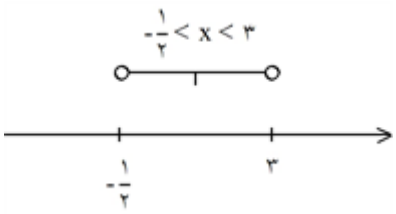
$x^۲ - x \geq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ \leq x \leq ۱ \Rightarrow$ تابع در همسایگی چپ یک تعریف شده است

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \sqrt{(۱)^۲ - (۱)} = ۰$

۷۲

$x - ۱ < ۲ \Rightarrow x < ۳$

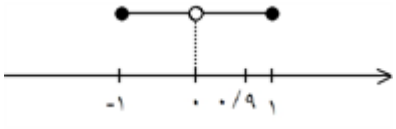
$۲x + ۳ > ۲ \Rightarrow ۲x > -۱ \Rightarrow x > \frac{-۱}{۲}$



۷۳

الف) $۱ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱$

$D_f = [-۱, ۱] - \{۰\}$

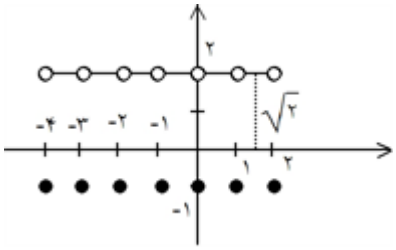


ب) صفر

پ) بله

ت) بله - خیر

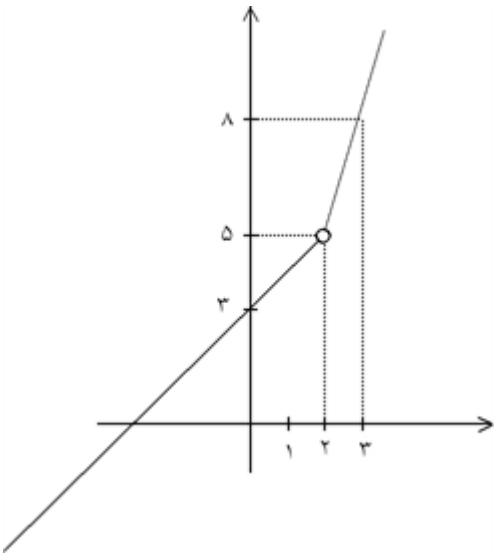
۷۴ الف)



ب) $\lim\limits_{x \to ۱} g(x) = ۲$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to \sqrt{۲}} g(x) = ۲$

۷۵ الف) خیر

ب) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۵$

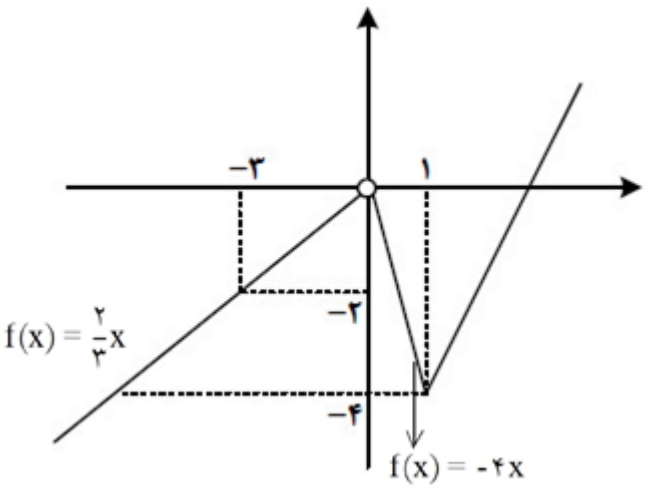


۷۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط وجود پیوستگی در R حذف $[x]$ است $\Longleftarrow a = -b$

$f(x) = a[x] + a + b[x] + b[a+۱] = f(x) = \cancel{a[x]} + a + \cancel{b[x]} + b[a] + b$

$$\frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{a + b[a] + b} = \frac{a[a]}{a - a[a] - a} = -۱$$

۷۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\lim \frac{-۴\cancel{x}}{\cancel{x}} + \lim \frac{-\cancel{x}}{\frac{۲}{۳}\cancel{x}} = -۴ - ۱/۵ = -۵/۵$$

۷۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x = c + ۲ &\Rightarrow c = ac^۲ + bc \Rightarrow ۱ = ac + b \\ x = -c + ۲ &\Rightarrow c = ac^۲ - bc \Rightarrow ۱ = ac - b \end{aligned} \Rightarrow b = ۰, ac = ۱ \Rightarrow [ac] = ۱$$

۷۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x = ۰$ ریشه مخرج است اما حد جواب دارد پس $x = ۰$ ریشه صورت هم هست

$$a + \sqrt{c} = ۰ \Rightarrow a = -\sqrt{c}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{a + \sqrt{bx + c}}{x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{bx + c} - \sqrt{c}}{x} = \frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cancel{bx} + \cancel{c} - \cancel{c}}{\cancel{x}(\sqrt{bx + c} + \sqrt{c})} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{b}{۲\sqrt{c}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{c}}{۲}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{-\sqrt{c} \times \frac{\sqrt{c}}{۲}}{c} = -\frac{۱}{۲}$$

۸۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

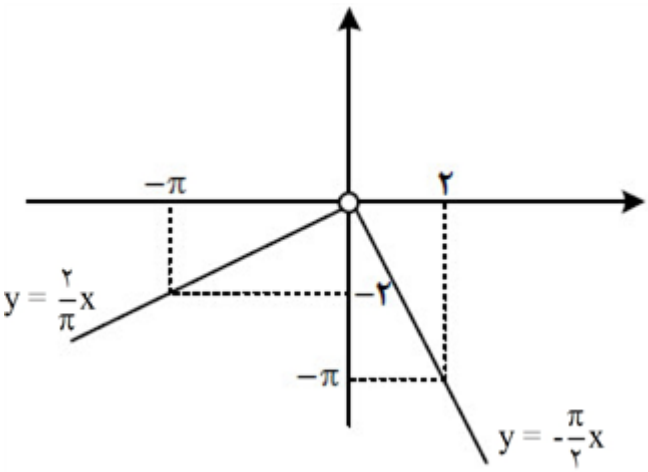
$$f(x) = a[x] + b[x] + b \Rightarrow f(x) = (a + b)[x] + b \Rightarrow a + b = ۰ \Rightarrow a = -b$$

$$\Rightarrow f(x) = b \Rightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{b}{a} = \frac{-a}{a} = -۱$$

۸۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{\operatorname{Sin} x}{|f(x)|} = \frac{۱}{-\frac{\pi}{۲} \times \frac{\pi}{۲}} = +\frac{۴}{\pi^۲}$$

$$\lim_{x\to \left(-\frac{\pi}{۲}\right)^+} \frac{|f(x)|}{\operatorname{Sin} x} = \frac{\left|\frac{۲}{\pi} \times -\frac{\pi}{۲}\right|}{-۱} = -۱$$



۸۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}|x-۱| & -c\le x\le c\\ ax^۲+bx+۲ & x<-c\,,\ x>c\end{cases}$$

$$x=c\xrightarrow{c\in N}c-۱=ac^۲+bc+۲$$

$$x=-c\xrightarrow{c\in N}c+۱=ac^۲-bc+۲$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{تفاضل}\Rightarrow -۲bc=۲\Rightarrow b=-\frac{۱}{c}\\ \Rightarrow c-۱=ac^۲+۱\Rightarrow a=\frac{c-۲}{c^۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۲-c}{c}=\frac{۲}{c}-۱$$

$$c=۱\Rightarrow\frac{۲}{c}-۱=۱$$

$$c=۲\Rightarrow\frac{۲}{c}-۱=۰$$

$$c>۲\Rightarrow -۱<\frac{۲}{c}-۱<۰\Rightarrow\left[\frac{a}{b}\right]=-۱$$

۸۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{حاصل حد}=۲\\ \text{حد مخرج}=۰\end{array}\right\}\text{حد صورت}=۰\Rightarrow a+\sqrt{۱}=۰\Rightarrow a=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{bc\,x^۲+(b+c)x+۱}-۱}{x}=۲\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{bc\,x^۲+(b+c)x+\cancel{۱}-\cancel{۱}}{x(\sqrt{bc\,x^۲+(b+c)x+۱}+۱)}=۲$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{x}(bc\,x+b+c)}{\cancel{x}(\sqrt{bc\,x^۲+(b+c)x+۱}+۱)}=۲$$

$$\frac{b+c}{۲}=۲\Rightarrow b+c=۴$$

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}=\frac{۴}{-۱}=-۴$$

۸۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=b\,[x(x-a)]-۲a\xrightarrow{\text{در } R \text{ پیوسته}}b=۰\Rightarrow\frac{a}{f(b)}=\frac{a}{f(۰)}=\frac{a}{-۲a}=-\frac{۱}{۲}$$

۸۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$۱)\ \lim_{x\to ۱^+}(f+g)(x)=۰$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱^-}(f+g)(x)=۲$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱^+}(f-g)(x)=۵$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۱^-}(f-g)(x)=۳$$

$$۱,۳\Rightarrow\lim_{x\to ۱^+}(f+g)(x)+\lim_{x\to ۱^+}(f-g)(x)=۲\lim_{x\to ۱^+}f(x)=۵\Rightarrow\lim_{x\to ۱^+}f(x)=۲/۵$$

$$۲,۴\Rightarrow\lim_{x\to ۱^-}(f+g)(x)+\lim_{x\to ۱^-}(f-g)(x)=۲\lim_{x\to ۱^-}f(x)=۵\Rightarrow\lim_{x\to ۱^-}f(x)=۲/۵$$

۸۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۲}{x^۲-[x^۲]}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۲}{x^۲-۳}=۰$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۲-[x^۲]}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۴}$$

پس مجموع حدها برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

۸۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع روی R پیوسته است پس در $x=۰$ نیز پیوسته است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۰)=b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{a}\right)\\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=(۱-a)\times(۰)+(۳a^۲-۱)(-۱)=-۳a^۲+۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=(۱-a)\times(-۱)+(۳a^۲-۱)(۰)=a-۱\end{array}\right\}\Rightarrow -۳a^۲+۱=a-۱$$

$$\Rightarrow ۳a^۲+a-۲=۰\Rightarrow\begin{cases} a=-۱\Rightarrow\begin{cases} f(۰)=b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{-۱}\right)=۰\\ \text{حد تابع}=a-۱=-۱-۱=-۲\end{cases}\text{غ ق ق}\\ a=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\begin{cases} f(۰)=b\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{\frac{۲}{۳}}\right)=b\,\mathrm{Sin}\frac{۳\pi}{۲}=-b\\ \text{حد تابع}=a-۱=\frac{۲}{۳}-۱=-\frac{۱}{۳}\end{cases}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -b=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}}=۲$$

۸۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x=a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

$$\Delta=۰\Rightarrow(m+۳)^۲-۱۲m=۰\Rightarrow m^۲-۶m+۹=۰\Rightarrow m=۳$$

$$a=-\frac{(m+۳)}{۲(۶)}=-\frac{۶}{۲\times ۶}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۶x^۲+۶x+\frac{۳}{۲}}}{\left|۲x^۳+\frac{۱}{۲}\right|} & x\neq-\frac{۱}{۲}\\ ۲\sqrt{۲}\,\mathrm{tg}\,b & x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۶}\left|\cancel{x+\frac{۱}{۲}}\right|}{۲\left|\cancel{x+\frac{۱}{۲}}\right|\left(x^۲-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}\right)} & x\neq-\frac{۱}{۲}\\ ۲\sqrt{۲}\,\mathrm{tg}\,b & x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\frac{۱}{۲}} f(x)=\frac{\sqrt{۶}}{۲\left(\frac{۳}{۴}\right)}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}\\ f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۲\sqrt{۲}\,\mathrm{tg}\,b\end{array}\right\}\Rightarrow ۲\sqrt{۲}\,\mathrm{tg}\,b=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$\mathrm{tg}\,b=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow b=\frac{\pi}{۶}$$

۸۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون حد صورت صفر است پس حد مخرج نیز باید صفر باشد.

$$a+b=۰ \Rightarrow a=-b \Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{b(\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-۱)}{-bx+b} = \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-۱}{۱-x} \xrightarrow{\sqrt[۳]{x}=t}$$

$$\lim_{t\to ۱} \frac{\sqrt{۲-t}-۱}{۱-t^۳} = \lim_{t\to ۱} \frac{\cancel{۱-t}}{\cancel{(۱-t)}\,(۱+t+)(\sqrt{۲-t}+۱)} = \frac{۱}{۳\times ۲} = \frac{۱}{۶}$$

۹۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases} |[-x]-x| & \text{فرد } [x] \\ k-x+[x] & \text{زوج } [x] \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۱)]{n=۲} \begin{cases} ۲^+ \to k-۲+۲=k \\ ۲^- \to |-۲-۲|=۴ \\ ۲ \to k \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۲)]{n=-۲} \begin{cases} -۲^+ \to k+۲-۲=k \\ -۲^- \to |۲+۲|=۴ \\ ۲ \to k \end{cases}$$

$$\xrightarrow{۱,۲} k=۴$$

$$n=۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱^+ \to |-۲-۱|=+۳ \\ ۱^- \to k-۱ \\ ۱ \to -۲ \end{cases}$$ برای زوج فقط برقرار است

۹۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$۸a-b=۰ \Rightarrow b=۸a \Rightarrow a=\frac{b}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۸} \frac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲}{\frac{x}{۸}-۱} \times \frac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}{۲+۲} = \lim_{x\to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{\frac{x}{۲}-۴} \times \frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۲^۲}{۴+۴+۴} = \lim_{x\to ۸} \frac{x-۸}{۶x-۴۸} = \frac{۱}{۶}$$

تذکر: سؤال با قاعده هوپیتال نیز قابل حل است.

۹۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x=a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

$$\Delta=۰ \Rightarrow (m-۱)^۲-۱۲(m-۴)=۰ \Rightarrow (m-۷)^۲=۰ \Rightarrow m=۷$$

ریشه صورت و مخرج $x=a \Rightarrow a=-۱$

$$\text{صورت}: \frac{\sqrt{۳(x+۱)^۲}}{|x^۳+۱|} = \frac{\sqrt{۳}\,|x+۱|}{|x+۱|\,(x^۲-x+۱)} \Rightarrow \lim_{x\to a} \text{صورت} = \lim_{x\to(-۱)} \text{صورت} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{مخرج}: x=a=-۱: \frac{۲\,\mathrm{Sin}\,b}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \mathrm{Sin}\,b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۹۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حد چپ و راست در ۲ برابر نیستند، پس در ۲ پیوسته نیست و در نتیجه در R پیوسته نیست.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۲^-} \frac{|(x+۱)(x-۲)|}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x+۱)(x-۲)}{x-۲} = -۳ \\ f(۲)=-۲a+۳+۳a=a+۳ \end{array}\right\} a+۳=-۳ \Rightarrow a=-۶$$

۹۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌توانیم برای $n=۱$ و $n=۲$ مسئله را بررسی کنیم، پس پیوستگی را در $x=\pm ۱$ و $x=\pm ۲$ بررسی می‌کنیم:

$$x=۱: \lim_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)=۱-۱+k=k$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} |x-[-x]|=۲$$

$$x=-۱: \lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=f(-۱)=k$$

$$\lim_{x\to (-۱)^-} = \lim_{x\to (-۱)^-} |x-[-x]|=۲$$

پس اگر $k=۲$ باشد به ازای $x=\pm ۱$ پیوستگی داریم، این یعنی مقادیر فرد n قابل قبول‌اند.

$$x=۲: \lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} |x-[-x]|=۵$$

$$f(۲)=۲-(-۲)=۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} (x-[x]+k)=۱+k$$

پس به ازای هیچ مقدار زوج n پیوستگی نداریم.

۹۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y=-\sqrt{x-۲۷} \Rightarrow y^۲=x-۲۷ \Rightarrow x=y^۲+۲۷ \Rightarrow f(x)=x^۲+۲۷$$

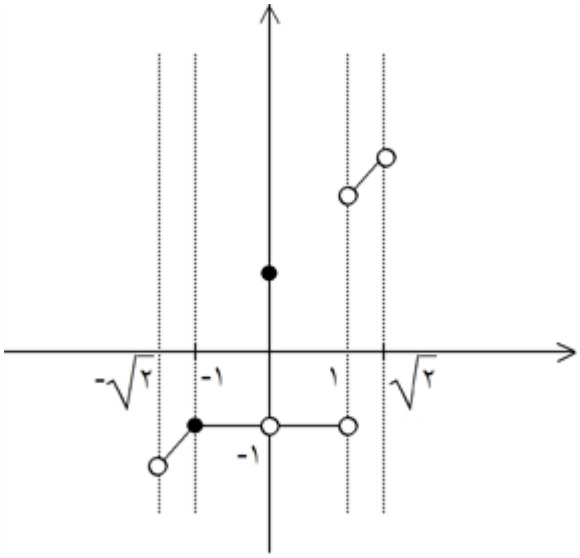
$$\lim_{x\to -۳^-} \frac{۲x+\sqrt{f(x)}}{|x^۲+x-۶|}=\lim_{x\to -۳^-} \frac{۲x+\sqrt{x^۲+۲۷}}{|(x+۳)(x-۲)|}\times\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۲۷}}{۲x-\sqrt{x^۲+۲۷}}$$

$$=\lim_{x\to -۳^-} \frac{۳(x^۲-۹)}{(x+۳)(x-۲)}\times\frac{۱}{-۶-۶}=-۰/۳$$

۹۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & -۱<x<۱-\{۰\} \\ \text{Cos}(\pi x) & x=۰,۱,-۱ \\ |x|([x]+۱) & ۱<x<\sqrt{۲} \text{ یا } -\sqrt{۲}<x<-۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -۱ & -۱<x<۱-\{۰\} \\ -۱ & x=\pm ۱ \\ ۱ & x=۰ \\ ۲x & ۱<x<\sqrt{۲} \\ x & -\sqrt{۲}<x<-۱ \end{cases}$$

پس این تابع در $x=۰$ و $x=۱$ ناپیوسته است.



۹۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{ریشه} = ۱ \Rightarrow ۵ - a + b = ۰ \Rightarrow a - b = ۵$$
$$f \text{ ریشه صورت} = ۱ \Rightarrow ۱ + a + b = ۰ \Rightarrow a + b = -۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۳ \end{cases}$$
$$\left[\frac{b - ۲a}{۳}\right] = \left[\frac{-۳ - ۴}{۳}\right] = -۳$$

تذکر: تنها نقطه‌ای که تابع f در آن ناپیوسته است، $x = ۱$ است و چون f در آن حد دارد، پس صورت کسر باید به ازای $x = ۱$ صفر شود، در غیر این‌صورت حد، بی‌نهایت می‌شود.

۹۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = ۱ \text{ پیوستگی راست در}: \left\{\begin{array}{c} f(۱) = \tan\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) = -۱ \\ \lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۱^+} \frac{\cancel{(x-۱)}(x+۲)}{-a\cancel{(x-۱)}} = \frac{۳}{-a} \end{array}\right\} \frac{۳}{-a} = -۱ \Rightarrow a = ۳$$

$$x = ۵ \text{ پیوستگی چپ در}: \left\{\begin{array}{c} f(۵) = b(۵ - [-۵]) = ۱۰b \\ \lim\limits_{x \to ۵^-} f(x) = \frac{|۲۵+۵-۲|}{۳(۱-۵)} = \frac{۲۸}{۳ \times -۴} = \frac{-۷}{۳} \end{array}\right\} ۱۰b = \frac{-۷}{۳} \Rightarrow b = \frac{-۷}{۳۰}$$

$$\Rightarrow \text{ab} = -۰/۷$$

۹۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع در R پیوسته است پس در $x = ۰$ هم پیوسته است. حال برای دو حالت $a \notin Z$ و $a \in \text{Z}$ داریم:

$$a \notin Z \left\{\begin{array}{c} f(۰) = ۰ \\ f(۰^+) = ۰ \\ f(۰^-) = |۰ - [-a]| = [-a] \end{array}\right\} [-a] = ۰ \Rightarrow ۰ \leq -a < ۱ \Rightarrow -۱ < a \leq ۰ \quad \text{غ ق ق}$$

با شرط $a < -۱$ اشتراک ندارد.

$$a \in \text{Z} \left\{\begin{array}{c} f(۰) = ۰ \\ f(۰^+) = ۰ \\ f(۰^-) = \left|۰ + a - \left[۰^-\right]\right| = |a + ۱| \end{array}\right.$$
$$|a + ۱| = ۰ \Rightarrow a = -۱$$

با شرط $a < -۱$ اشتراک ندارد.

پس به ازای هیچ مقدار $a < -۱$ پیوسته نمی‌شود.

تذکر: تابع فقط به ازای $a = -۱$ روی R پیوسته می‌شود.

۱۰۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حدود چپ و راست و مقدار تابع در $x = ۰$ را می‌یابیم.

$$\text{حد چپ}: L^- = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} ([x] - ۲a) = -۱ - ۲a$$

$$\text{مقدار تابع}: f(۰) = |b|$$

$$\text{حد راست}: L^+ = \lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱ - \cos x}{۲bx^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin^۲ \frac{x}{۲}}{۲bx^۲} = \frac{\frac{x^۲}{۲}}{۲bx^۲} = \frac{۱}{۴b}$$

برای پیوستگی باید $-۱ - ۲a = |b| = \frac{۱}{۴b}$ برقرار باشد.

$$\Rightarrow |b| = \frac{۱}{۴b} \Rightarrow \begin{cases} ۴b^۲ = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \;;\; b > ۰ \\ \text{یا} \\ -۴b^۲ = ۱ \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases} \Rightarrow -۱ - ۲a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow b - a = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

۱۰۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \to -۱^+ \Rightarrow x + ۱ > ۰ \Rightarrow |x+۱| = x + ۱ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow -x \to ۱^- \Rightarrow [-x] = ۰$$

$$\lim_{x\to -۱^+} \frac{|x+۱| + [x]}{x - [-x]} = \frac{x + ۱ - ۱}{x} = \frac{x}{x} = ۱$$

۱۰۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - ۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(x^۲ + ۴ + ۲x)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۱۰۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

راه اول:

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲ - ۳x} - \sqrt{۲ - ۵x}}{\sqrt{۲ - ۲\cos x}} \times \frac{\sqrt{۲ - ۳x} + \sqrt{۲ - ۵x}}{\sqrt{۲ - ۳x} + \sqrt{۲ - ۵x}} \times \frac{\sqrt{۲ + ۲\cos x}}{\sqrt{۲ + ۲\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲x\cancel{\sqrt{۲ + ۲\cos x}}}{\sqrt{۴ - ۴\cos^۲ x}\,\cancel{\left(\sqrt{۲ - ۳x} + \sqrt{۲ - ۵x}\right)}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۴x}{۴\sqrt{۲}\,|\sin x|} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۴\cancel{x}}{۴\sqrt{۲}(-\cancel{\sin x})}$$

$$= -\frac{۱}{\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

راه دوم: هوپیتال

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲ - ۳x} - \sqrt{۲ - ۵x}}{\sqrt{۴\sin^۲ \frac{x}{۲}}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲ - ۳x} - \sqrt{۲ - ۵x}}{-۲\sin \frac{x}{۲}} \xrightarrow{\text{HOP}}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{\frac{-۳}{۲\sqrt{۲-۳x}} + \frac{۵}{۲\sqrt{۲-۵x}}}{-\cos \frac{x}{۲}} = \frac{-\frac{۳}{۲\sqrt{۲}} + \frac{۵}{۲\sqrt{۲}}}{-۱} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۰۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه سوم در بیشمار نقطه ناپیوسته است پس نیازی به بررسی بقیه ضابطه‌ها و نقاط مرزی نیست.

$$f(x)=\begin{cases} |x|+[-x] & -۱<x<۱\ ,\ x\neq ۰ \\ ۱+\mathrm{Cos}\,\pi\mathrm{x} & x=۰\ ,\ ۱\ ,-۱ \\ \left[x^{۲}\right]-[x] & x>۱ \text{ یا } x<-۱ \end{cases}$$

پاسخنامه کلیدی

۷۶	۱	**۲**	۳	۴
۷۷	**۱**	۲	۳	۴
۷۸	**۱**	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	**۴**
۸۰	۱	**۲**	۳	۴
۸۱	۱	**۲**	۳	۴
۸۲	**۱**	۲	۳	۴
۸۳	۱	**۲**	۳	۴
۸۴	**۱**	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	**۳**	۴
۸۶	**۱**	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	**۳**	۴
۸۸	**۱**	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	**۴**
۹۰	۱	۲	۳	**۴**
۹۱	۱	**۲**	۳	۴
۹۲	**۱**	۲	۳	۴
۹۳	۱	**۲**	۳	۴
۹۴	۱	**۲**	۳	۴
۹۵	**۱**	۲	۳	۴
۹۶	۱	**۲**	۳	۴
۹۷	**۱**	۲	۳	۴
۹۸	**۱**	۲	۳	۴
۹۹	**۱**	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	**۳**	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	**۴**
۱۰۲	۱	**۲**	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۰۴	۱	۲	**۳**	۴