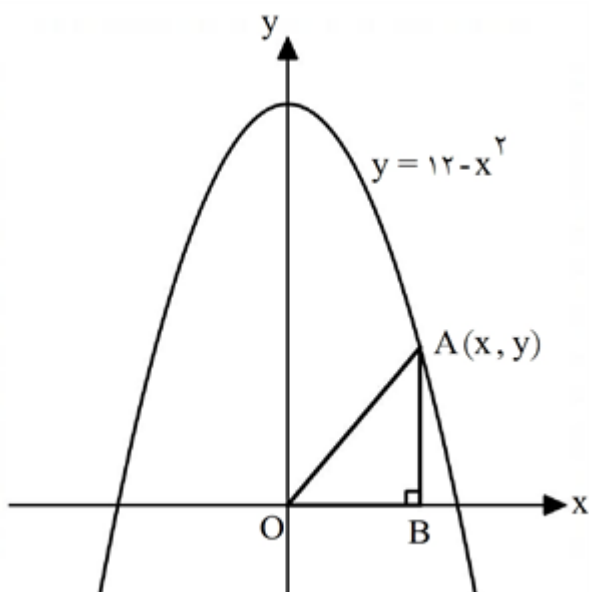


لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید

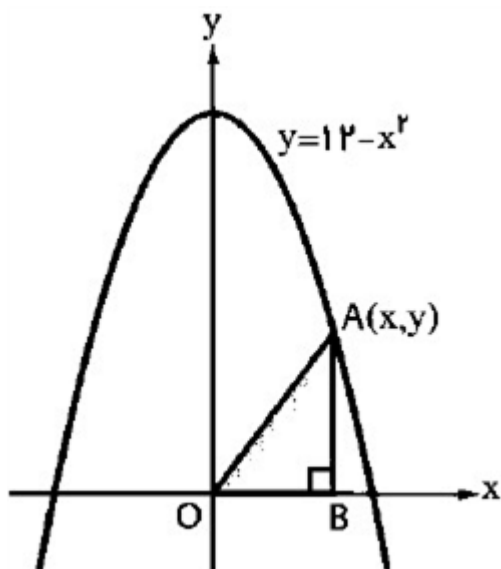
بارم

ردیف

مطابق شکل مقابل، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(12 - x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3$$

$$\Rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2$$

$$6 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

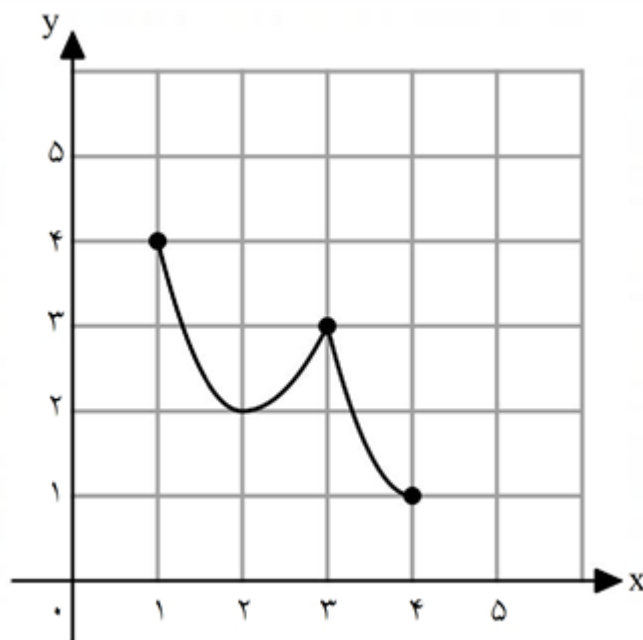
$$\Rightarrow y = 12 - 4 = 8$$

پاسخ: ۱

x	۰	۲	$\sqrt{12}$
$S'(x)$	+	-	
$S(x)$	\nearrow	\searrow	

۸

در نمودار زیر، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۳ = طول ماکزیمم نسبی

۱ = طول ماکزیمم مطلق

۲ = طول مینیمم نسبی

۴ = طول مینیمم مطلق

پاسخ: ۱

جدول رفتار و نمودار تابع $y = (x + 2)(x - 4)^2$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

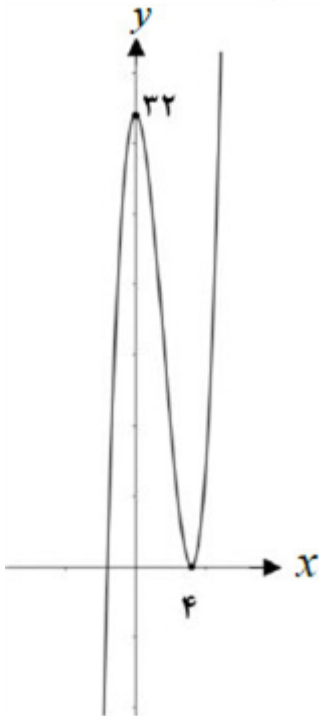
پاسخ: ۱

(اگر دانش‌آموزی مشتق را به صورت $y' = (x - 4)(3x)$ بنویسد، بارم این قسمت تعلق گیرد.)

$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	\cap	\cap	0	\cup	\cup	
y	$-\infty$	32	16	0	$+\infty$	

ماکزیممعطفمینیمم



۳

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

پاسخ: ۱ درست

۴

مقادیر a , b و c را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ طوری به دست آورید که در نقطه $(3, -1)$ اکسترمم نسبی داشته باشد و $x = 1$ طول نقطه عطف آن باشد.

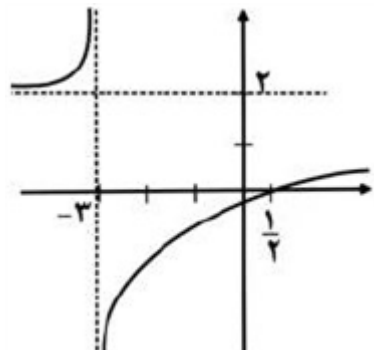
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

$$\left. \begin{aligned} f(3) = -1 &\Rightarrow 27 + 9a + 3b + c = -1 \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b &\Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \\ f''(x) = 6x + 2a &\Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a = -3, b = -9, c = 26$$

پاسخ: ۱

۵

۶	<p>مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 12x$ در بازه $[-1, 3]$ را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \times$ $\left. \begin{aligned} f(-1) &= 11 \\ f(2) &= -16 \\ f(3) &= -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم} = 11$													
۷	<p>می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و دربار بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq 3$)</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $h = \frac{300}{r^2}$ $S = \frac{1800}{r} + 2r^2$ $S' = \frac{-1800}{r^2} + 4r = 0$ $r = \sqrt[3]{300} \Rightarrow h = \sqrt[3]{300}$													
۸	<p>با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 27x + 1$ مشخص کنید تابع در کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ <p>اکیداً صعودی $(-\infty, -3], [3, +\infty)$</p> <table><tr><td>x</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>3</td><td></td></tr><tr><td>f'(x)</td><td></td><td>+</td><td>○</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td></tr></table>	x		-3		3		f'(x)		+	○	-	○	+
x		-3		3										
f'(x)		+	○	-	○	+								
۹	<p>جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$ را رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>اکیدا صعودی $y' = \frac{2(x+3) - 1(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0$</p> <p>مجانِب قائم $x = -3$</p> <p>مجانِب افقی $y = 2$</p>  <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td></td><td>$2 \nearrow +\infty$</td><td></td><td>$-\infty \nearrow 2$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-3	$+\infty$	y'	+		+		$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$	
x	$-\infty$	-3	$+\infty$											
y'	+		+											
	$2 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$											

۱۰	<p>نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$، نقطه $(1, -11)$ می‌باشد. مقدار a و b را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ $f(1) = -11 \Rightarrow 1 + a + b = -11$ $f'(1) = 0 \Rightarrow 3(1) + 2a = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = -9$																				
۱۱	<p>مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را روی بازه $[-2, 3]$ بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>غ ق ق ق $x = 0, x = 4 \notin [-2, 3]$</p> $y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \notin [-2, 3]$ $f(-2) = 32, f(0) = 0, f(3) = -27$ <p>$= 0$ ماکزیمم مطلق $= -32$ مینیمم مطلق</p>																				
۱۲	<p>دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۸ باشد و حاصلضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $x - y = 8 \Rightarrow x = 8 + y$ $s = xy = (8 + y)y = y^2 + 8y$ $s' = 2y + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 4 \end{cases}$																				
۱۳	<p>نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>f</td><td>\searrow</td><td>\nearrow</td><td>\searrow</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>-16 Min</td><td>11 Max</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	f'	-	+	-		f	\searrow	\nearrow	\searrow				-16 Min	11 Max	
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$																	
f'	-	+	-																		
f	\searrow	\nearrow	\searrow																		
		-16 Min	11 Max																		

جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2$ را رسم کنید.

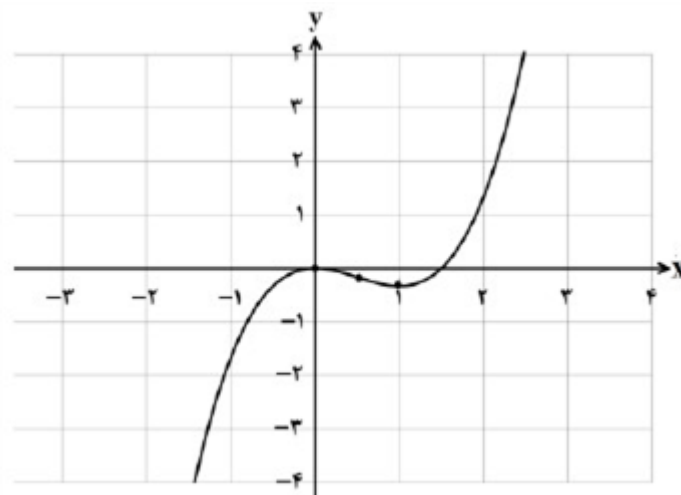
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$D_f = R$$

پاسخ: ۱

$$f'(x) = 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$



x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'	+	-	-	+	+
f''	-	-	+	+	+
f	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow	\nearrow
	\cup	\cap	\cup	\cap	\cup
		max		min	

۱۴

ابتدا جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ را در دامنه آن بررسی نمایید و سپس نقطه عطف آن را در صورت وجود، به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$$

پاسخ: ۱

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-		+
f	\cap		\cup

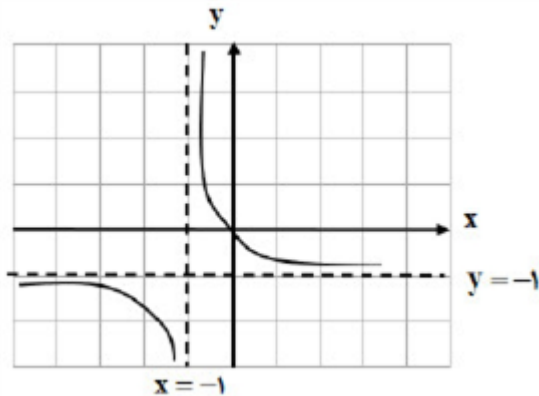
نقطه عطف وجود ندارد.

۱۵

۱۶	<p>اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^5 - 5x$ را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases}$ <p>غیرقابل قبول</p> <p>مینیمم مطلق $f(1) = -4$</p> <p>$f(0) = 0$</p> <p>ماکزیمم مطلق $f(2) = 22$</p>																	
۱۷	<p>پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن داریم به طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $2h + 2r + \pi r = 6 \Rightarrow h = \frac{6 - 2r - \pi r}{2}$ $S(r) = 6r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 6 - 4r - \pi r \Rightarrow 6 - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4 + \pi}$ <table><tr><td>r</td><td colspan="3">$\frac{6}{4 + \pi}$</td></tr><tr><td>S'</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td></tr><tr><td>S</td><td colspan="3"></td></tr></table> $h = \frac{6 - (2 + \pi)\frac{6}{4 + \pi}}{2} = \frac{6}{4 + \pi}$	r	$\frac{6}{4 + \pi}$			S'	+	○	-	S								
r	$\frac{6}{4 + \pi}$																	
S'	+	○	-															
S																		
۱۸	<p>بزرگترین بازه از R که تابع $f(x) = -2x^3 + 6x + 11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ <table><tr><td>x</td><td colspan="3">-1</td><td>1</td></tr><tr><td>f'</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td></tr><tr><td>f</td><td colspan="5"></td></tr></table> <p>پس تابع در بازه $[-1, 1]$ صعودی اکید است.</p>	x	-1			1	f'	-	○	+	○	-	f					
x	-1			1														
f'	-	○	+	○	-													
f																		
۱۹	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن تابع است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>																	

جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{-x}{x+1}$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲



مجاانب قائم $x = -1$

مجاانب افقی $y = -1$

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

پاسخ: ۱

۲۰

x	$-\infty$	-1	$-\infty$
y'	-	-	-
y	$-1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -1$	

(ص ۱۴۴)

با رسم جدول تغییرات نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$f'(x) = x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = 0$$

پاسخ: ۱

۲۱

اکیدا صعودی $[0, +\infty)$, اکیدا نزولی $(-\infty, 0]$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f'	-	+	+
f	\searrow	\nearrow	

(ص ۱۲۶)

مقادیر a و b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند. $f(0) = 1$ و $f(2) = -3$ و $x = 1$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

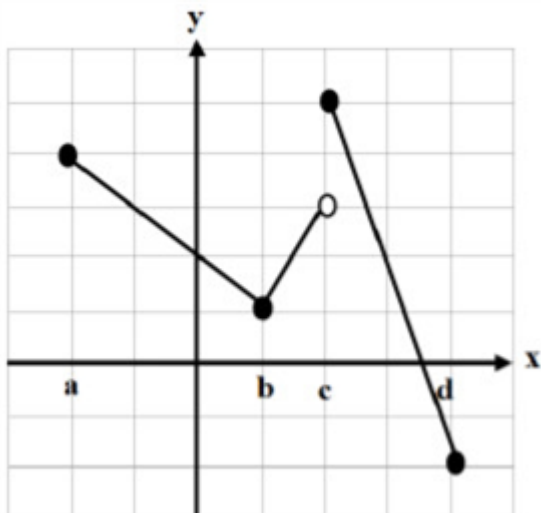
$$f(2) = -3 \Rightarrow 8a + 4b + 1 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -4 \Rightarrow a = 1, b = -3$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad (\text{ص } ۱۳۶)$$

پاسخ: ۱

۲۲

در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است. طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و مطلق را مشخص کنید.



۲۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ d مینیمم مطلق

c ماکزیمم مطلق

c ماکزیمم نسبی

b مینیمم نسبی

درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر $f'(c) = 0$ باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترمم نسبی است.

۲۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

پاسخ: ۱ نادرست

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۲۵

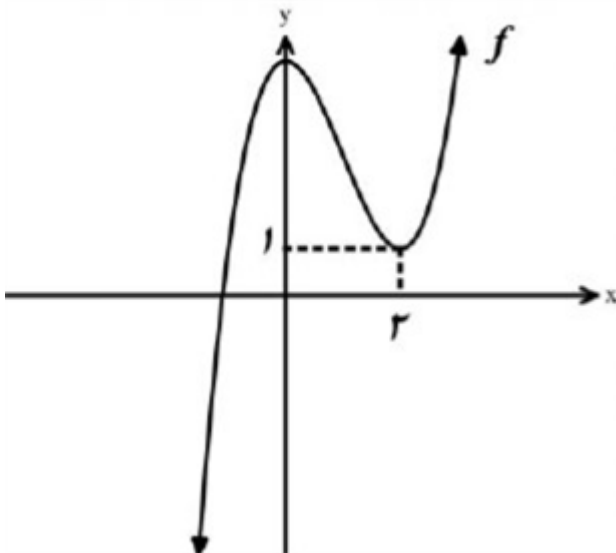
پاسخ: ۱

$$x - y = 10$$

$$p = xy = x(x - 10) = x^2 - 10x$$

$$p'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5, y = -5$$

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.



۲۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \Rightarrow d = 5$$

پاسخ: ۱

فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، محل تقاطع مجانب‌های آن، نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$cx + d = 0 \Rightarrow d = -2c$$

$$(-1, 0) \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{cx} = 1 \Rightarrow a = c$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

پاسخ: ۱

۲۷

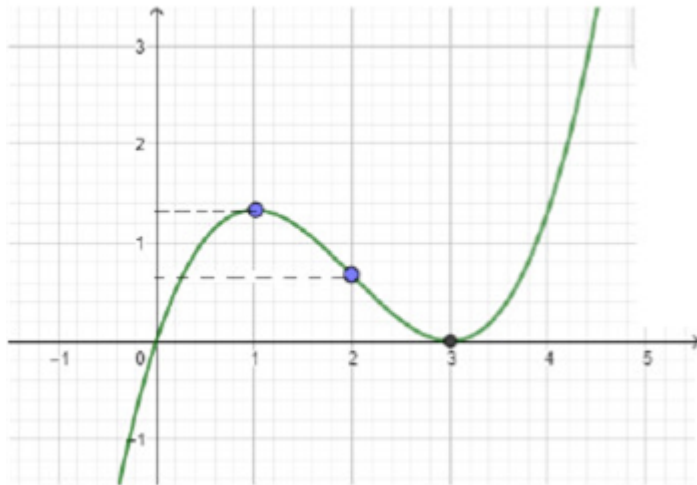
جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ را رسم کنید.



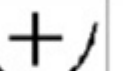
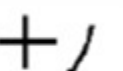
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f''(x) = 2x - 4$$

پاسخ: ۱

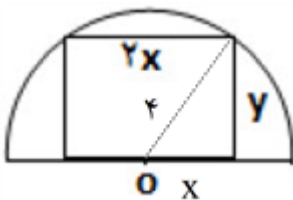


x	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
$f''(x)$			○			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{4}{3}$	$\searrow \frac{2}{3}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	
		Max نسبی	نقطه عطف	Min نسبی		

۲۸

یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱



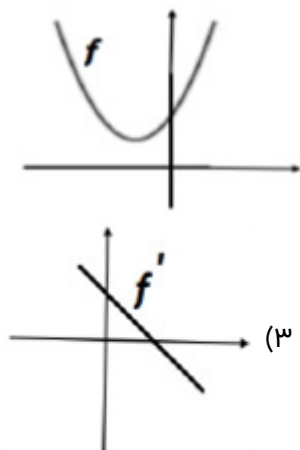
$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$$

$$S'(x) = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{8}, y = \sqrt{8}$$

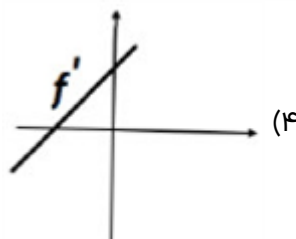
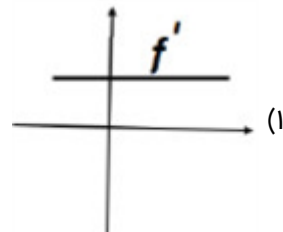
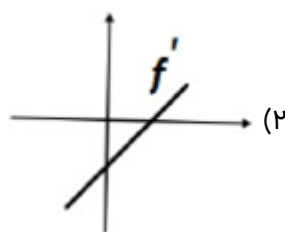
پاسخ: ۱

طول $2\sqrt{8}$ و عرض $\sqrt{8}$ است.

۲۹



با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



۳۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند.

x	$x_S < 0$	
f	نزولی	صعودی
f'	-	+

نشان دهید در بین مستطیل‌هایی با محیط ۱۶ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$y = 8 - x \Rightarrow S(x) = -x^2 + 8x \Rightarrow S'(x) = -2x + 8 = 0$$

$$x = 4, y = 4$$

پاسخ: ۱

۳۱

با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^2 - 12x + 4$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = 2x - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x = 6, x = -6$$

اکیداً صعودی $(6, +\infty), (-\infty, -6)$

پاسخ: ۱

۳۲

x	-6	6
f'	+	-
f	↗	↘

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه بحرانی است.

۳۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

پاسخ: ۱ درست

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$ رسم کنید.

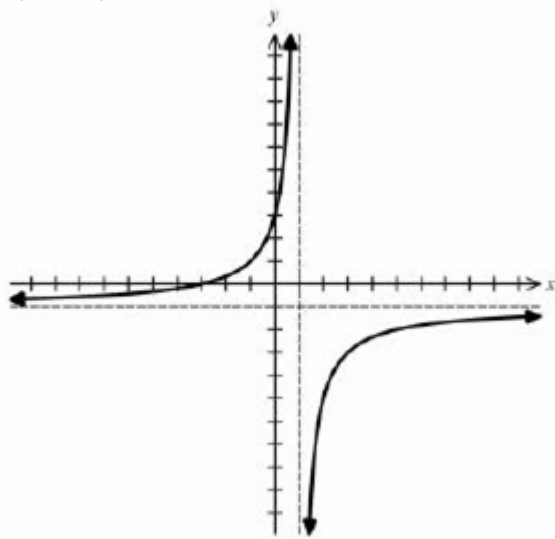
پاسخ: ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

مجاانب قائم $x = 1$ و مجانب افقی $y = -1$

$$f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2}$$

نقطه بحرانی ندارد



x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	+		+
f	-1 ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↘ -1

۳۴

ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^2 + ax - b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(1, 2)$ اکسترمم نسبی تابع باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

$$f(1) = 2 \Rightarrow a - b = 1$$

$$\begin{cases} f'(x) = 2x + a \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + a = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = -3$$

پاسخ: ۱

۳۵

جهت تقعر و مختصات نقطه عطف تابع $f(x) = x(x^2 - 3) + 1$ را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

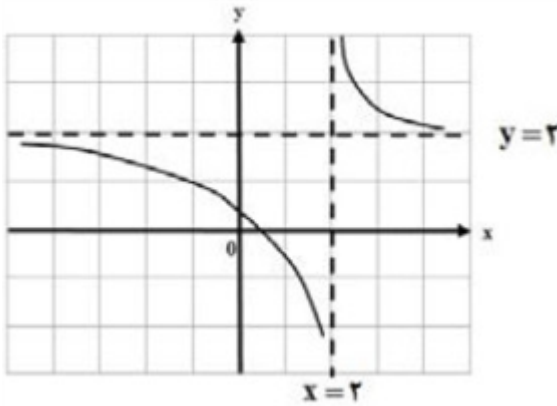
$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

پاسخ: ۱

نقطه $(0, 1)$ نقطه عطف تابع است.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		+
f	↘	1	↗

۳۶

۳۷	<p>جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>- اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ در این صورت $f(c)$ را یک تابع f می‌نامیم.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ ماکزیمم نسبی</p>												
۳۸	<p>اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه‌ای $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصلضرب این دو عدد مینیمم گردد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> $p = xy = 5x^2 - 10x \Rightarrow p'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0 \Rightarrow x = 1$ $y = -5$												
۳۹	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- اگر برای تابع f داشته باشید $f''(c) = 0$ آن‌گاه همواره نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>												
۴۰	<p>جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ را رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p>پاسخ: ۱</p> <p>مجانِب قائم $x = 2$ مجانِب افقی $y = 2$ $y' = \frac{-2}{(x - 2)^2} < 0$</p>  <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$-$</td><td></td><td>$-$</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>$+\infty$</td><td>2</td></tr></table>	x	$-\infty$	2	$+\infty$	y'	$-$		$-$	y	2	$+\infty$	2
x	$-\infty$	2	$+\infty$										
y'	$-$		$-$										
y	2	$+\infty$	2										

اکستریمم نسبی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ را در صورت وجود به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

پاسخ: ۱

x	-1		3	
f'	+		-	+
f	↗		↘	
	max		min	
	$\frac{7}{3}$		$-\frac{25}{3}$	

۴۱

اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.

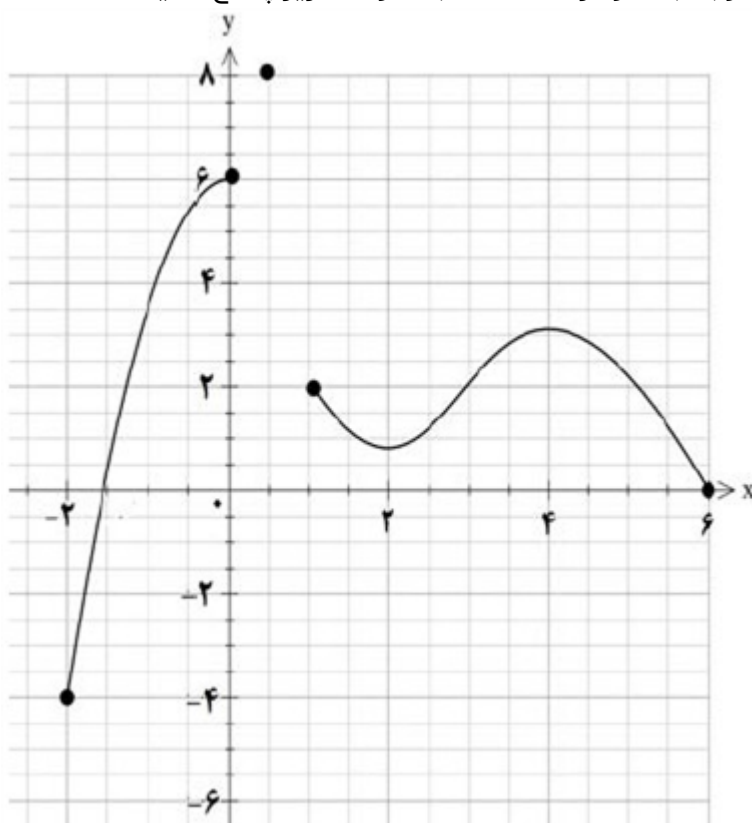
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 = 1 \Rightarrow -a + b = -1 \\ f''(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-1}{2}, b = \frac{-3}{2}$$

پاسخ: ۱

۴۲

با توجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



۴۳

الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.

ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.

پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.

ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

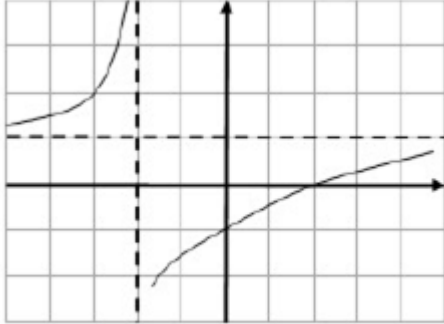
ت) ۲

پ) ۴

ب) -۴

الف) ۸

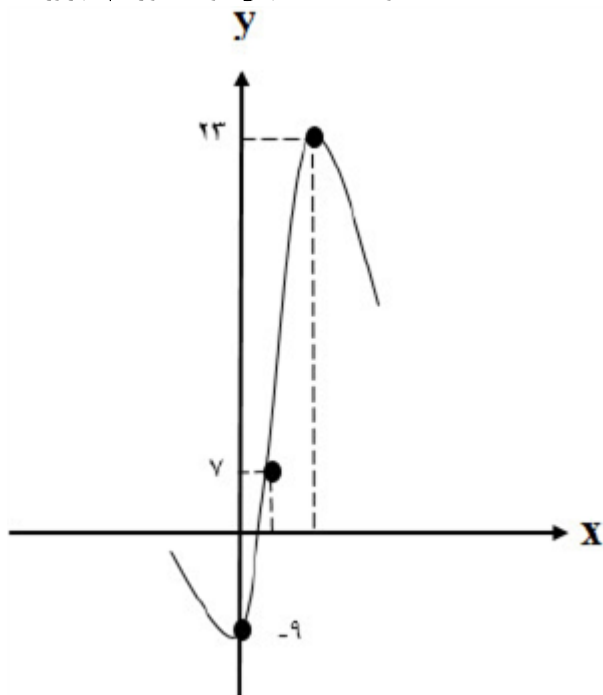
پاسخ: ۱

	<p>جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.</p> <p>- اگر برای هر x در بازه ۱؛ $f''(x) > ۰$، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به دارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p style="text-align: right;">پاسخ: ۱ بالا</p>	۴۴												
	<p>جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-۲}{x+۲}$ را رسم کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>مجانِب قائم $x = -۲$</p> <p>مجانِب افقی $y = ۱$</p> <p>$y' = \frac{۴}{(x+۲)^۲} > ۰$</p> </div> </div> <table style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px;">X</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-۲</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">f'</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">f</td> <td style="padding: 5px;">$۱ \nearrow +\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty \nearrow ۱$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	X	$-\infty$	-۲	$+\infty$	f'	+		+	f	$۱ \nearrow +\infty$	$+\infty \nearrow ۱$		۴۵
X	$-\infty$	-۲	$+\infty$											
f'	+		+											
f	$۱ \nearrow +\infty$	$+\infty \nearrow ۱$												
	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.</p> <p>- هر نقطه بحرانی تابع $f(x)$، یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p> <p style="text-align: right;">پاسخ: ۱ نادرست</p>	۴۶												
	<p>اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = ۲x^۲ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازه‌ی $[-۱, ۳]$ مشخص کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p style="text-align: right;">پاسخ: ۱</p> <p> $f'(x) = ۴x^۲ + ۶x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \notin [-۱, ۳] \end{cases}$ $f(-۱) = ۱۳$ $f(۱) = -۷ \Rightarrow \min(۱, -۷)$ $f(۳) = ۴۵ \Rightarrow \max(۳, ۴۵)$ </p>	۴۷												

	<p>مقادیر a و b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.</p> <p>$f(0) = 1$ و $f(1) = 2$ و $x = \frac{1}{3}$ طول نقطه عطف نمودار تابع f باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow a = -2$ $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0 \Rightarrow b = 3$	۴۸									
	<p>مقادیر اکسترمم مطلق تابع $g(x) = x^3 + 2x - 5$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود تعیین کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$ $g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \min, g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \max$	۴۹									
	<p>جهت تقعر تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در دامنه‌اش بررسی کرده و نقطه عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $D_f = R$ $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$ <table border="1" data-bbox="151 1097 486 1310"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>f''</td><td>+</td><td>-</td></tr> <tr> <td></td><td>∪</td><td>∩</td></tr> </table> <p>$f'(1) = +\infty$ پس تابع در $x = 1$ مماس قائم دارد و $x = 1$ نقطه عطف است.</p>	x	$-\infty$	$+\infty$	f''	+	-		∪	∩	۵۰
x	$-\infty$	$+\infty$									
f''	+	-									
	∪	∩									

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰



$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9, D_f = R$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

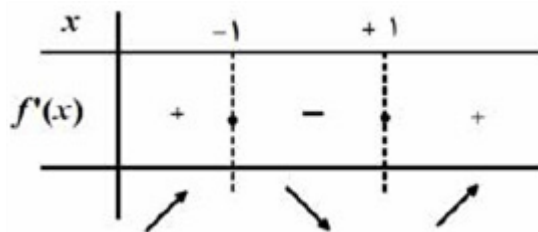
پاسخ: ۱

۵۱

X	$-\infty$	۰	۲	۴	$+\infty$
f'	-	+	+	-	
f''	+	+	-	-	
f	$+\infty$	\searrow	\nearrow	\searrow	$-\infty$
	U	-9	U	7	U
		min		max	

تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰



پاسخ: ۱

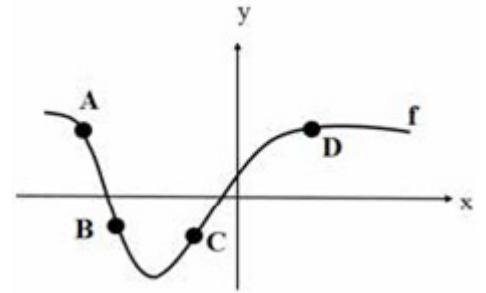
۵۲

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

اکیداً صعودی $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

اکیداً نزولی $(-1, 1)$

جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.
- در نقطه از نمودار مقابل، مقادیر f' و f'' هر دو مثبت است.



۵۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

پاسخ: ۱ C

ورق فلزی مستطیل شکلی، به طول ۱۶ سانتی‌متر و عرض ۶ سانتی‌متر در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه سر باز ساخته شود. مقدار x چه قدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

$$\text{عرض جعبه} = 6 - 2x, x \in [0, 3] \quad \text{طول جعبه} = 16 - 2x, x \in [0, 8]$$

پاسخ: ۱

۵۴

$$\Rightarrow v(x) = x(16 - 2x)(6 - 2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x, 0 \leq x \leq 3$$

$$v'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0, 3] \\ x = \frac{4}{3} \in [0, 3] \end{cases}$$

چون $v(0) = v(3) = 0$ ، پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیش‌ترین مقدار حجم حاصل می‌شود.

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$x = -1 \text{ مجانب قائم}$$

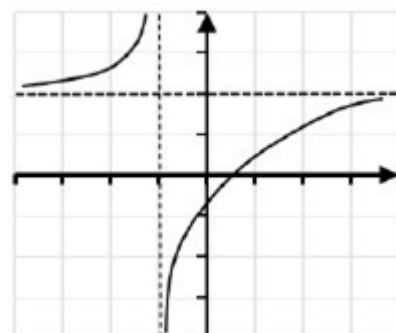
$$y = 2 \text{ مجانب افقی}$$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

پاسخ: ۱

۵۵

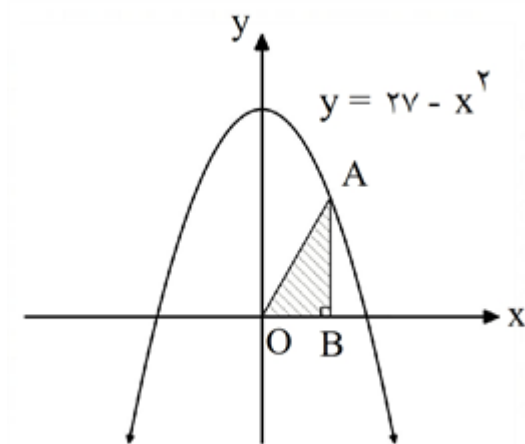
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	۲	$+\infty$	۲



۵۶	<p>اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف منحنی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ $f(-1) = 1 \Rightarrow a - b = 3, f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3, b = 0$</p>
۵۷	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. - در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>
۵۸	<p>اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ تعیین کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \text{ max} \\ f(-1) = -3 \text{ min} \end{cases}$</p>
۵۹	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. - تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ نادرست</p>
۶۰	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. - اگر علامت f' بر بازه‌ای منفی باشد، آن‌گاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>
۶۱	<p>در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را بیابید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ $2(x+y) = 14 \Rightarrow x+y = 7 \Rightarrow y = 7-x$ $y = 7-x \Rightarrow s = (y)(x) = 7x - x^2 \Rightarrow s'(x) = 7 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3/2, y = 2/2$</p>
۶۲	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. - اگر تابع f در هر نقطه اکسترم نسبی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می‌شود.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>
۶۳	<p>در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. - بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است برابر است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ $[-1, 1]$</p>

۶۴	<p>اگر نقطه $(۱, ۲)$، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱</p> $f'(۲) = ۰ \Rightarrow ۱۲ + ۴b = ۰ \Rightarrow b = -۳$ $f(۲) = ۱ \Rightarrow ۴b + d = -۷$ $-۱۲ + d = -۷ \Rightarrow d = ۵$
۶۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.</p> <p>- هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰</p> <p>پاسخ: ۱ درست</p>
۶۶	<p>مقادیر a، b و c را در تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ طوری به دست آورید که نقطه $(۱, -۱)$ اکسترمم نسبی و $x = ۰$ طول نقطه عطف تابع باشد.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ $y' = ۳x^۲ + ۲ax + b$ $y'' = ۶x + ۲a \xrightarrow{x=۰} ۰ + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$ $\xrightarrow{x=۱} y' = ۰ \Rightarrow ۳ + b = ۰ \Rightarrow b = -۳$ $\xrightarrow[\substack{x=۱ \\ y=-۱}]{} -۱ = ۱ - ۳ + c \Rightarrow c = ۱$
۶۷	<p>مقادیر a، b و c را در تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ طوری به دست آورید که نقطه $(۲, -۱)$ اکسترمم نسبی و $x = ۱$ طول نقطه عطف تابع باشد.</p> <p>سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم</p> <p>پاسخ: ۱</p> $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ $y' = ۳x^۲ + ۲ax + b$ $y'' = ۶x + ۲a \xrightarrow{x=۱} ۶ + ۲a = ۰ \Rightarrow ۲a = -۶ \Rightarrow a = -۳$ $\xrightarrow{x=۲} y' = ۰ \Rightarrow ۱۲ - ۱۲ + b = ۰ \Rightarrow b = ۰$ $\xrightarrow[\substack{x=۲ \\ y=-۱}]{} -۱ = ۸ - ۱۲ + c \Rightarrow -۴ + c = -۱ \Rightarrow c = ۳$

مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 27 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



۶۸

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(27 - x^2)}{2} = \frac{27}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

پاسخ: ۱

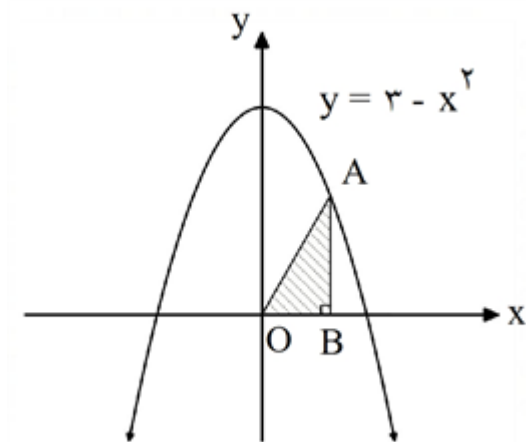
$$S'(x) = \frac{27}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{x>0} x = 3 \Rightarrow y = 27 - 9 = 18$$

$$S(3) = \frac{3(27 - 9)}{2} = \frac{3 \times 18}{2} = 27$$

x	۰	۳	$\sqrt{27}$
$S'(x)$	-	۰	+
$S(x)$	\nearrow	۲۷	\searrow

A(۳, ۱۸)

مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 3 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



۶۹

سوالات و مطالب تالیفی - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(3 - x^2)}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

پاسخ: ۱

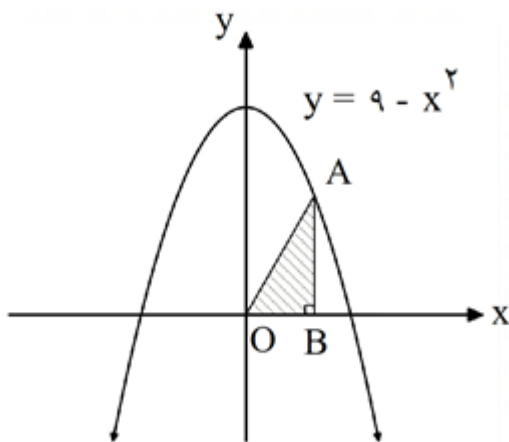
$$S'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x > 0} x = 1 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$$

$$S(1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

x	۰	۱	$\sqrt{3}$
$S'(x)$	-	۰	+
$S(x)$	\nearrow	۱	\searrow

A(1, 2)

مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 9 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



۷۰

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(9 - x^2)}{2} = \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

پاسخ: ۱

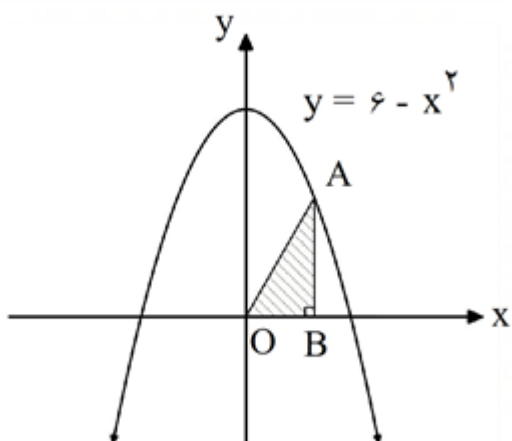
$$S'(x) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 9 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$$

$$S(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}(9 - 3)}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 6}{2} = 3\sqrt{3}$$

x	۰	$\sqrt{3}$	۳
S'(x)	-	۰	+
S(x)		$3\sqrt{3}$	

$A(\sqrt{3}, 6)$

مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 6 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



۷۱

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(6 - x^2)}{2} = 3x - \frac{1}{2}x^3$$

پاسخ: ۱

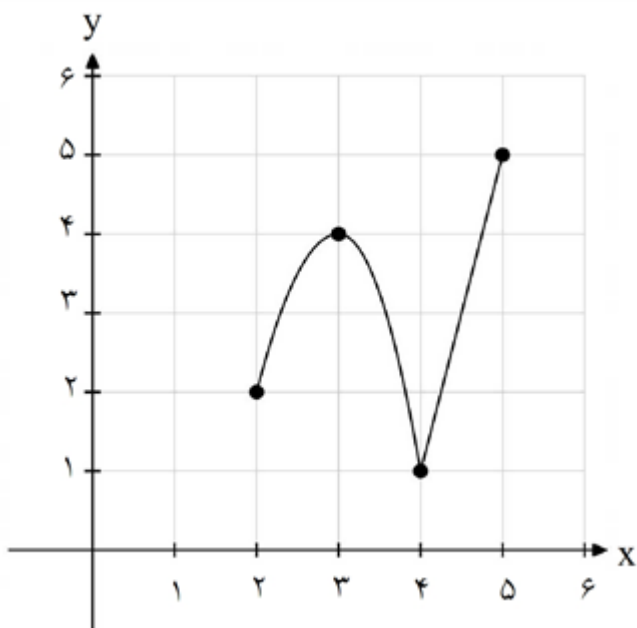
$$S'(x) = 3 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 6 - 2 = 4$$

$$S(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(6 - 2)}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

x	۰	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
S'(x)	-	۰	+
S(x)		$2\sqrt{2}$	

$$A(\sqrt{2}, 4)$$

در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



۷۲

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ - دوازدهم

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۴

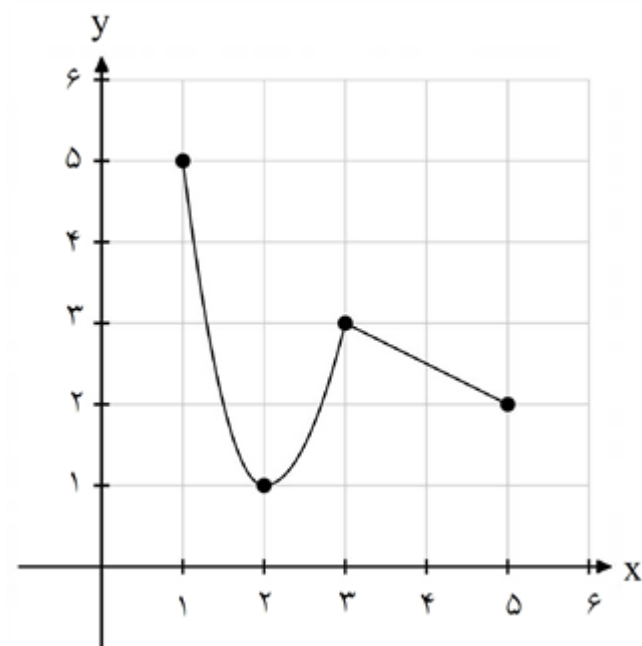
طول ماکزیمم نسبی: ۳

پاسخ: ۱

طول مینیمم مطلق: ۴

۵

در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



۷۳

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

طول ماکزیمم مطلق:

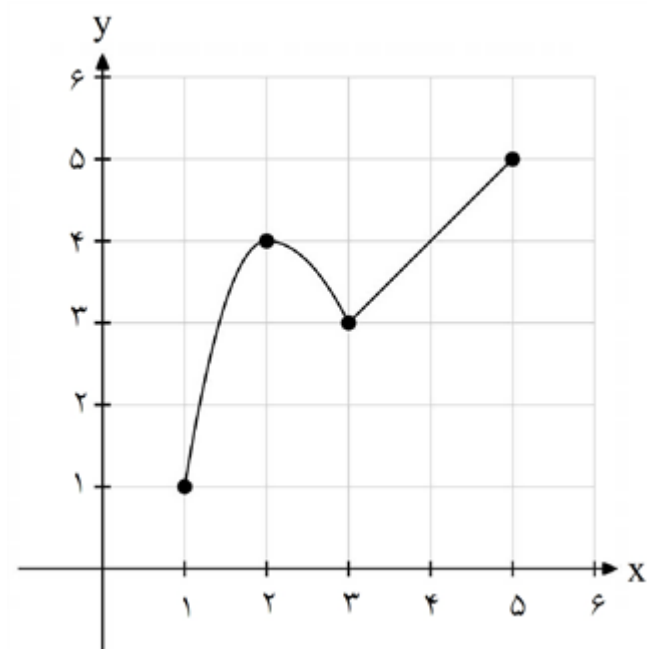
طول مینیمم نسبی: ۲

پاسخ: ۱ طول ماکزیمم نسبی: ۳

طول مینیمم مطلق: ۲

۱

در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



۷۴

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۳

پاسخ: ۱ طول ماکزیمم نسبی: ۲

طول مینیمم مطلق: ۱

۵

حجم یک قوطی استوانه‌ای شکل، ۱۲۸π واحد مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن کمترین شود؟

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

پاسخ: ۱

$$\pi R^2 h = 128\pi \Rightarrow h = \frac{128}{R^2}$$

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R h \Rightarrow S = 2\pi R^2 + 2\pi R \times \frac{128}{R^2} \Rightarrow S = 2\pi R^2 + \frac{256\pi}{R}$$

$$\Rightarrow S' = 4\pi R - \frac{256\pi}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 256\pi}{R^2} = 0 \Rightarrow 4\pi R^3 - 256\pi = 0$$

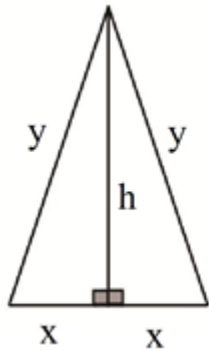
$$\Rightarrow R^3 = 64 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow h = \frac{128}{16} = 8$$

۷۵

در یک مثلث متساوی‌الساقین اگر مجموع طول ساق‌ها برابر ۱۲ باشد، طول قاعده مثلث را چنان بیابید که مساحت مثلث کمترین شود.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

پاسخ: ۱



$$2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$h^2 + x^2 = y^2 \xrightarrow{y=6} h^2 + x^2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36 - x^2}$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{2x \times h}{2} = x\sqrt{36 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{36 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}} \times x = \frac{36 - x^2 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Rightarrow 36 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 18$$

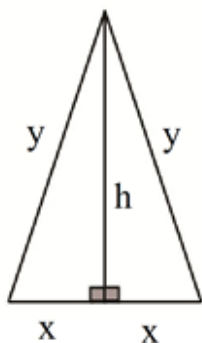
$$\Rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{طول قاعده مثلث} = 2x = 2(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$

۷۶

در یک مثلث متساوی الساقین اگر مجموع طول ساق‌ها برابر ۲۰ باشد، طول قاعده مثلث را چنان بیابید که مساحت مثلث کمترین شود.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم



$$2y = 20 \Rightarrow y = 10$$

$$h^2 + x^2 = y^2 \xrightarrow{y=10} h^2 + x^2 = 100 \Rightarrow h = \sqrt{100 - x^2} \quad \text{پاسخ: ۱}$$

۷۷

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{2x \times h}{2} = x\sqrt{100 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{100 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} \times x = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 50$$

$$\Rightarrow x = 5\sqrt{2}$$

$$\text{طول قاعده مثلث} = 2x = 2(5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$$

غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t) = \frac{12t}{4t^2 + 1}$ به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

$$C'(t) = \frac{12(4t^2 + 1) - 12t(8t)}{(4t^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 48t^2 + 12 - 96t^2 = 0 \Rightarrow 48t^2 = 12 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \quad \text{پاسخ: ۱}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

۷۸

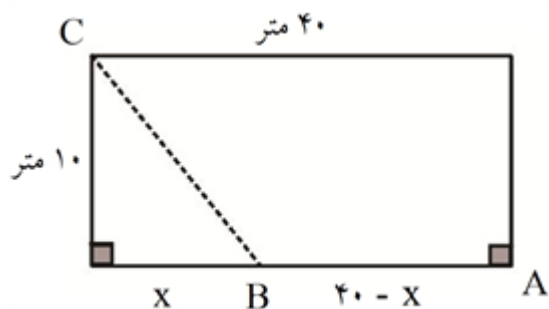
غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t) = \frac{t}{t^2 + 432}$ به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

$$C'(t) = \frac{t^2 + 432 - 2t^2}{(t^2 + 432)^2} = 0 \Rightarrow t^2 + 432 - 2t^2 = 0 \Rightarrow 432 = t^2 \Rightarrow t = 216 \Rightarrow t = 6 \quad \text{پاسخ: ۱}$$

۷۹

متحرکی در نقطه A قرار دارد و قرار است به نقطه C برود. اگر از نقطه A تا B با سرعت ثابت ۶ متر بر ثانیه و از نقطه B به C با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه حرکت کند، مقدار x را چنان بیابید که این متحرک در کمترین زمان ممکن به نقطه C برسد.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

پاسخ: ۱

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

$$t_1 = \frac{40 - x}{6}$$

$$BC^2 = x^2 + 10^2 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 100}$$

$$t_2 = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{2}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{40 - x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{2}$$

$$t = \frac{40}{6} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 100} \Rightarrow t' = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 100}} \right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 100} + 3x}{6\sqrt{x^2 + 100}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 100} + 3x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 100} = 3x$$

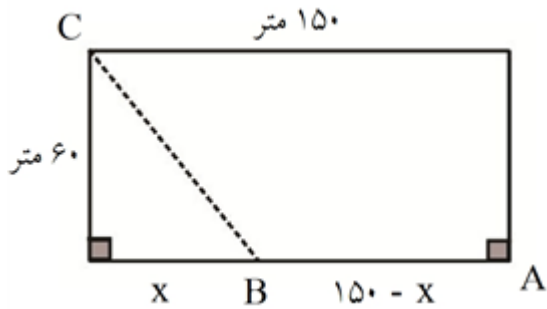
به توان می‌رسانیم ۲

$$\rightarrow x^2 + 100 = 9x^2 \Rightarrow 8x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

۸۰

متحرکی در نقطه A قرار دارد و قرار است به نقطه C برود. اگر از نقطه A تا B با سرعت ثابت ۸ متر بر ثانیه و از نقطه B به C با سرعت ثابت ۴ متر بر ثانیه حرکت کند، مقدار x را چنان بیابید که این متحرک در کمترین زمان ممکن به نقطه C برسد.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

پاسخ: ۱

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

$$t_1 = \frac{150 - x}{8}$$

$$BC^2 = x^2 + 60^2 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 3600}$$

$$t_2 = \frac{BC}{4} = \frac{\sqrt{x^2 + 3600}}{4}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{150 - x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 + 3600}}{4}$$

$$t = \frac{150}{8} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 3600} \Rightarrow t' = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3600}}\right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 3600} + 2x}{8\sqrt{x^2 + 3600}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 3600} + 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3600} = 2x$$

به توان می‌رسانیم

$$\rightarrow x^2 + 3600 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 3600 \Rightarrow x^2 = 1200 \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$$

۸۱

فاصله نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^3 - 3x + 5$ را به دست آورید.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲-دوازدهم

$$f(x) = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 3 + 5 = 3 \Rightarrow A(1, 3)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -1 + 3 + 5 = 7 \Rightarrow B(-1, 7)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$AB = 2\sqrt{5}$$

۸۲

ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه $(1, -2)$ اکسترمم نسبی داشته باشد.

سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

پاسخ: ۱ ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و باید $f'(1) = 0$ باشد:

$$f(x) = x^4 + ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2ax \Rightarrow f'(1) = 4 + 2a = 0$$

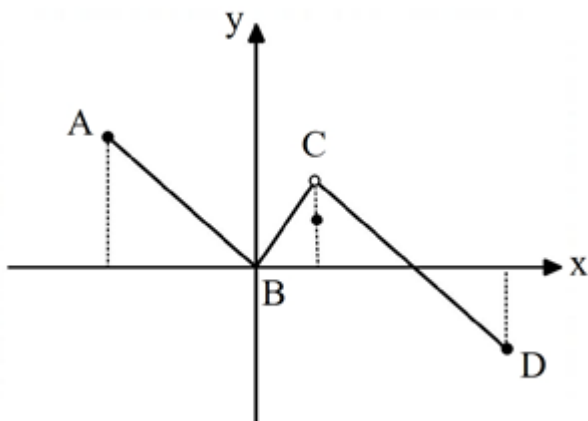
$$\Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

همچنین باید $f(1) = -2$ باشد:

$$f(1) = -2 \Rightarrow 1 + a + b = -2 \xrightarrow{a=-2} 1 - 2 + b = -2 \Rightarrow b = -1$$

۸۳

نقاط بحرانی، اکسترمم نسبی و مطلق را در نقاط مشخص شده شکل زیر تعیین کنید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲ -دوازدهم

پاسخ: ۱ نقطه A: نقطه بحرانی (ابتدای بازه) و ماکزیمم مطلق

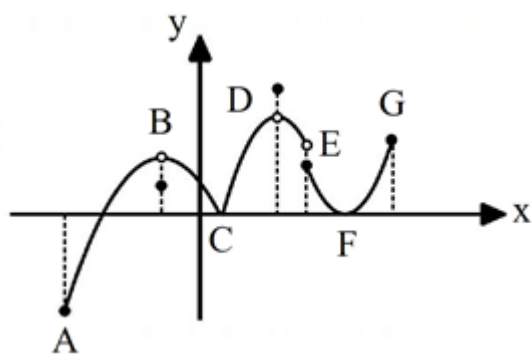
نقطه B: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

نقطه C: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

نقطه D: نقطه بحرانی (انتهای بازه) و مینیمم مطلق

۸۴

نقاط بحرانی، اکسترمم نسبی و مطلق را در نقاط مشخص شده شکل زیر را تعیین کنید.



سوالات و مطالب تالیفی-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳-دوازدهم

پاسخ: ۱ نقطه A: نقطه بحرانی (ابتدای بازه) و مینیمم مطلق

نقطه B: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

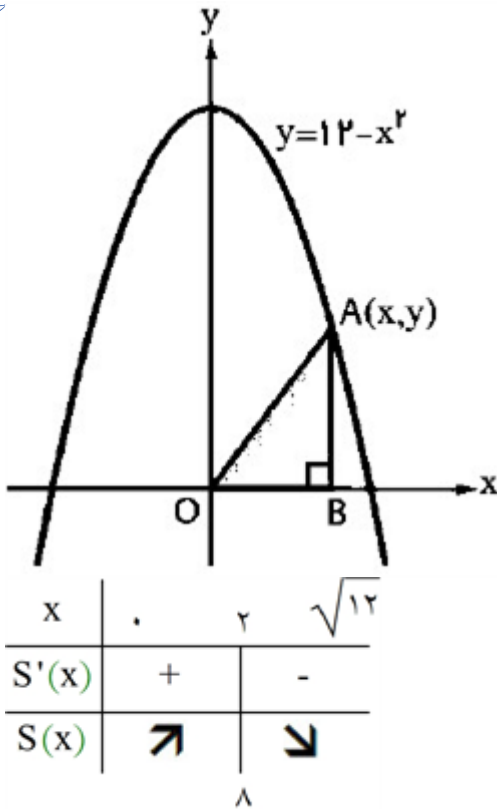
نقطه C: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

نقطه D: نقطه بحرانی و ماکزیمم مطلق و نسبی

نقطه E: نقطه بحرانی

نقطه F: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

نقطه G: نقطه بحرانی (انتهای بازه)



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(12 - x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3$$

$$\Rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2$$

$$6 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \xrightarrow{x>0} x = 2$$

$$\Rightarrow y = 12 - 4 = 8$$

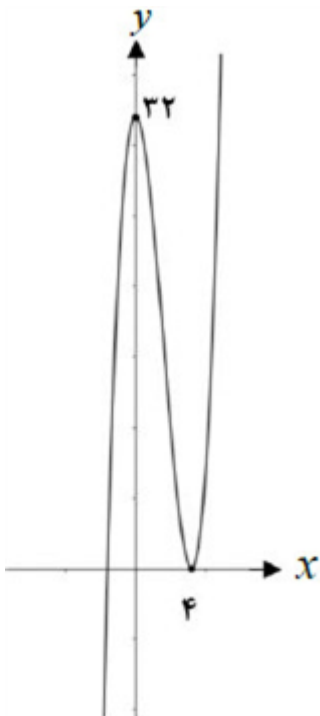
۳ = طول ماکزیمم نسبی
۱ = طول ماکزیمم مطلق

۲ = طول مینیمم نسبی
۴ = طول مینیمم مطلق

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

اگر دانش‌آموزی مشتق را به صورت $y' = (x - 4)(3x)$ بنویسد، بارم این قسمت تعلق گیرد.

$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$



x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
y'	+	0	-	-	0
y''			0		
y	$-\infty$	32	16	0	$+\infty$

↘ ↗

ماکزیمم

↘ ↗

عطف

↘ ↗

مینیمم

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= -1 \Rightarrow 27 + 9a + 3b + c = -1 \\ f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \\ f''(x) &= 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -3, b = -9, c = 26$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \times$$

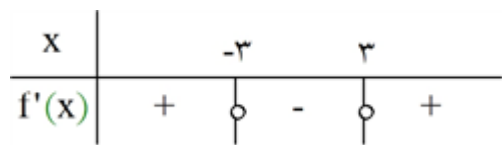
$$\left. \begin{aligned} f(-1) &= 11 \\ f(2) &= -16 \\ f(3) &= -9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم} = 11$$

$$h = \frac{300}{r^2}$$

$$S = \frac{1800}{r} + 3r^2$$

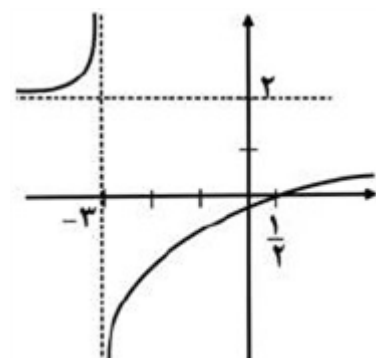
$$S' = \frac{-1800}{r^2} + 6r = 0$$

$$r = \sqrt[3]{300} \Rightarrow h = \sqrt[3]{300}$$



$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

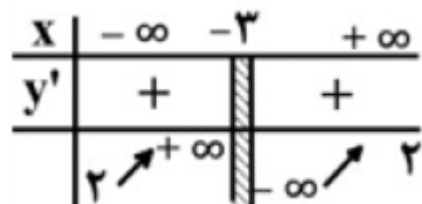
اکیداً صعودی $(-\infty, -3], [3, +\infty)$



$$y' = \frac{2(x+3) - 1(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2} > 0 \text{ اکیدا صعودی}$$

مجانِب قائم $x = -3$

مجانِب افقی $y = 2$



$$f(x) = x^2 + ax^2 + bx$$

$$f(1) = -11 \Rightarrow 1 + a + b = -11$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6(1) + 2a = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = -9$$

غ ق ق $y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \notin [-2, 3]$

$$f(-2) = 32, f(0) = 0, f(3) = -27$$

$$\text{مينيمم مطلق} = -32$$

$$\text{ماكزيمم مطلق} = 0$$

$$x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y$$

$$s = xy = (1 + y)y = y^2 + 1y$$

$$s' = 2y + 1 = 0 \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

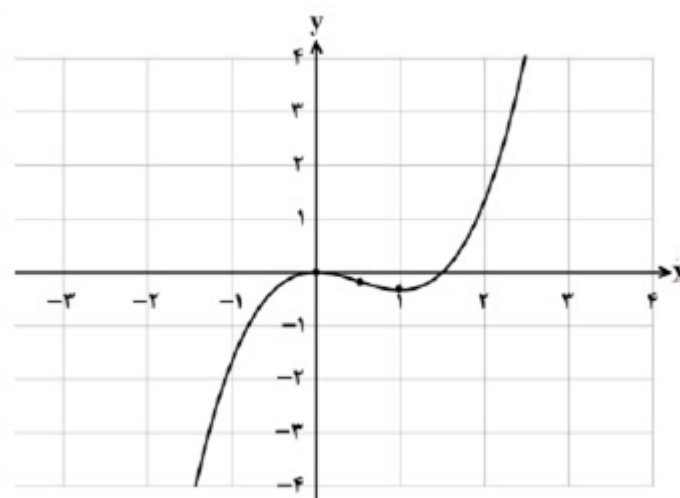
$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'	-	+	-	
f		\searrow	\nearrow	\searrow
		-16 Min	11 Max	

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$



$$f''(x) = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$



x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
f'	+	-	-	+	
f''	-	-	+	-	+
f		\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow
		max	$-\frac{1}{27}$	min	

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{(x-1)^5}$$

۱۵

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f			

نقطه عطف وجود ندارد.

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۱۶

$$f(1) = -4 \text{ مینیمم مطلق}$$

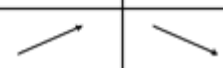
$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 22 \text{ ماکزیمم مطلق}$$

$$2h + 2r + \pi r = r \Rightarrow h = \frac{r - 2r - \pi r}{2}$$

۱۷




$$S(r) = r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 1 - 4r - \pi r \Rightarrow 1 - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{4 + \pi}$$

r	$\frac{1}{4 + \pi}$
S'	$+$ 0 $-$
S	

$$h = \frac{r - (2 + \pi)\frac{r}{4 + \pi}}{2} = \frac{r}{4 + \pi}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

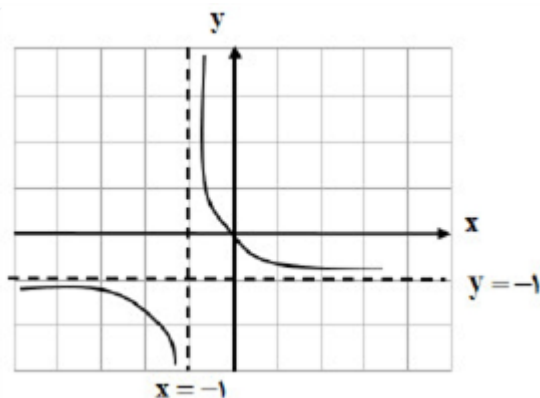
۱۸

x	-1		1		
f'	-	○	+	○	-
f					

پس تابع در بازه $[-1, 1]$ صعودی اکید است.

درست

۱۹



مجانِب قائم $x = -1$

مجانِب افقی $y = -1$

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

x	$-\infty$	-1	$-\infty$
y'	-	-	
y	$-1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -1$	

(ص ۱۴۴)

$f'(x) = 2x^2 + 2x = 0 \Rightarrow 2x(x+1) = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ غیرقابل قبول $x = 0$

اکیدا صعودی $(0, +\infty)$ ، اکیدا نزولی $(-\infty, 0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	+	
f	\searrow	\nearrow	

(ص ۱۲۶)

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$f(2) = -3 \Rightarrow 8a + 4b + 1 = -3 \Rightarrow 8a + 4b = -4 \Rightarrow a = 1, b = -3$$

$$f''(x) = 4ax + 2b \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \quad (\text{ص } ۱۳۶)$$

۲۳ d مینیمم مطلق

c ماکزیمم مطلق

c ماکزیمم نسبی

b مینیمم نسبی

۲۴ نادرست

$$x - y = 10$$

$$p = xy = x(x - 10) = x^2 - 10x$$

$$p'(x) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5, y = -5$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \Rightarrow d = 5$$

۲۵

۲۶

$$cx + d = 0 \Rightarrow d = -cx$$

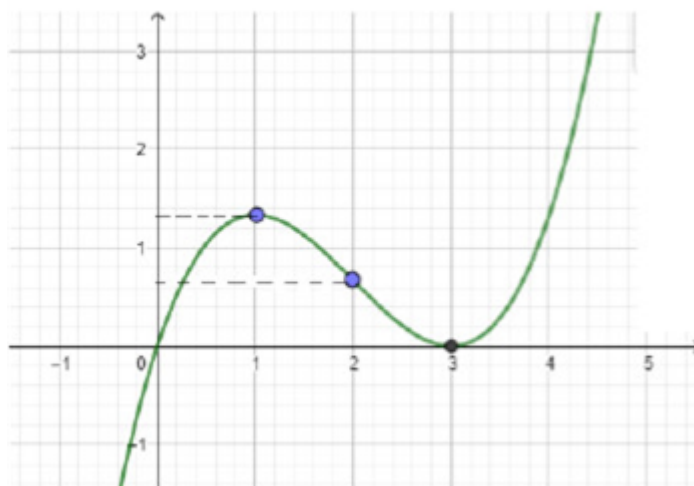
$$(-1, 0) \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{cx} = 1 \Rightarrow a = c$$

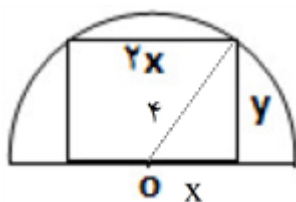
$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$f''(x) = 2x - 2$$



x	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	-	+
$f''(x)$	⌒	⌒	⌒	⌒	⌒
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	○	$+\infty$
		Max نسبی	نقطه عطف	Min نسبی	



$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$$

$$S'(x) = \frac{32 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{8}, y = \sqrt{8}$$

طول $\sqrt{8}$ و عرض $\sqrt{8}$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیه $x < ۰$ قطع می‌کند.

x	$x_S < ۰$	
f	نزولی	صعودی
f'	-	+

$$y = ۸ - x \Rightarrow S(x) = -x^2 + ۸x \Rightarrow S'(x) = -2x + ۸ = ۰$$

$$x = ۴, y = ۴$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \xrightarrow{f'(x)=0} x = ۲, x = -۲$$

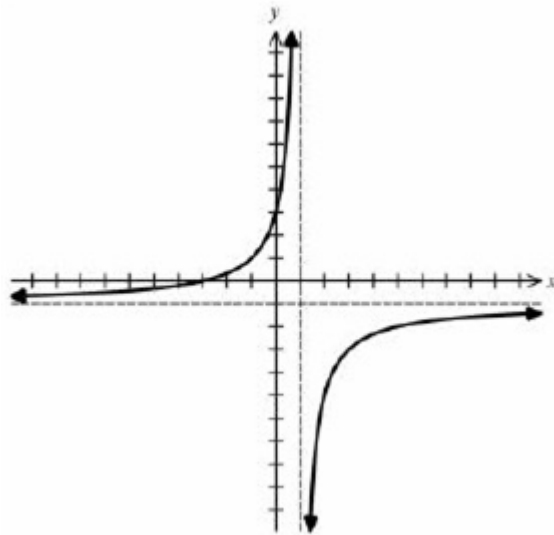
اکیداً صعودی $(۲, +\infty), (-\infty, -۲)$

x	-۲	۲
f'	+	-
f	↗	↘

۳۳ درست

مجانِب قائم $x = ۱$ و مجانب افقی $y = -۱$

$$f'(x) = \frac{۴}{(۱-x)^2} \text{ نقطه بحرانی ندارد}$$



x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f'	+		+
f	↗	$+\infty$	↘

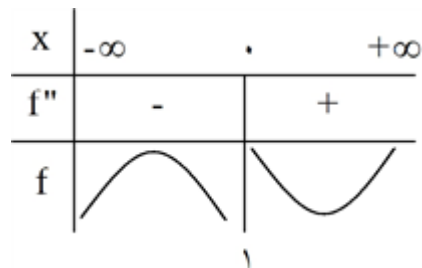
$$f(۱) = ۲ \Rightarrow a - b = ۱$$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳, b = -۴ \\ f'(۱) = ۰ \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

۳۶

نقطه $(0, 1)$ نقطه عطف تابع است.



ماکزیمم نسبی

۳۷

$$p = xy = 5x^2 - 10x \Rightarrow p'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y = -5$$

۳۸

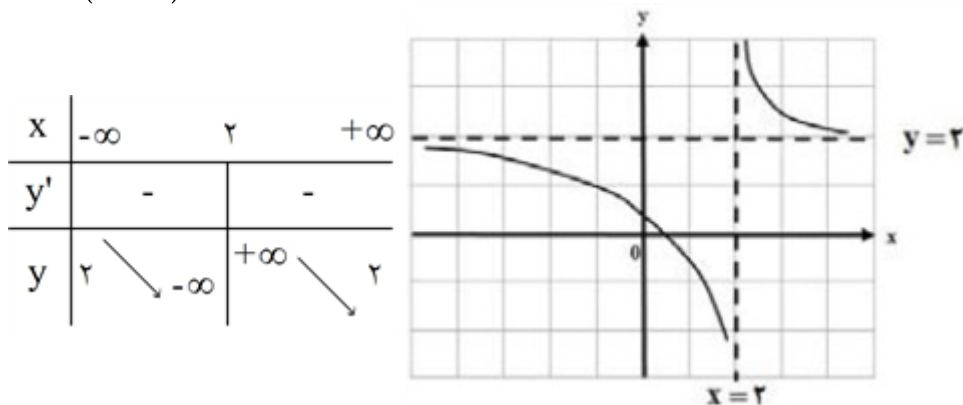
نادرست

۳۹

مجانِب قائم $x = 2$

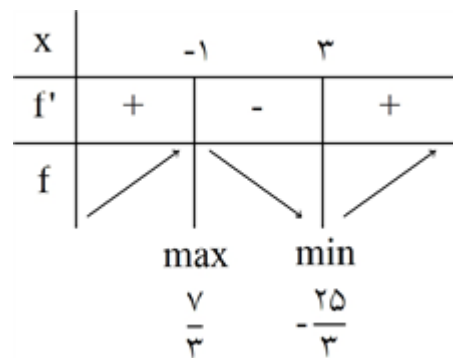
مجانِب افقی $y = 2$

$$y' = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$



$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$$

۴۱



$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 = 1 \Rightarrow -a + b = -1 \\ f''(-1) = 0 \Rightarrow -2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-1}{2}, b = \frac{-3}{2}$$

۴۲

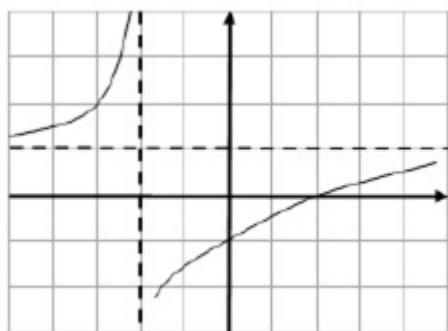
۲ (ت)

۴ (پ)

۴ (ب)

۸ (الف)

۴۳



مجانِب قائم $x = -2$

مجانِب افقی $y = 1$

$$y' = \frac{4}{(x+2)^3} > 0$$

۴۵

X	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	+		+
f	1	$+\infty$	1

۴۶ نادرست

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \notin [-1, 3] \end{cases}$$

$$f(-1) = 13$$

$$f(1) = -7 \Rightarrow \min(1, -7)$$

$$f(3) = 45 \Rightarrow \max(3, 45)$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow a = -2$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0 \Rightarrow b = 3$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$$

$$g(-2) = -8 - 4 - 5 = -17 \min, g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \max$$

$$D_f = R$$

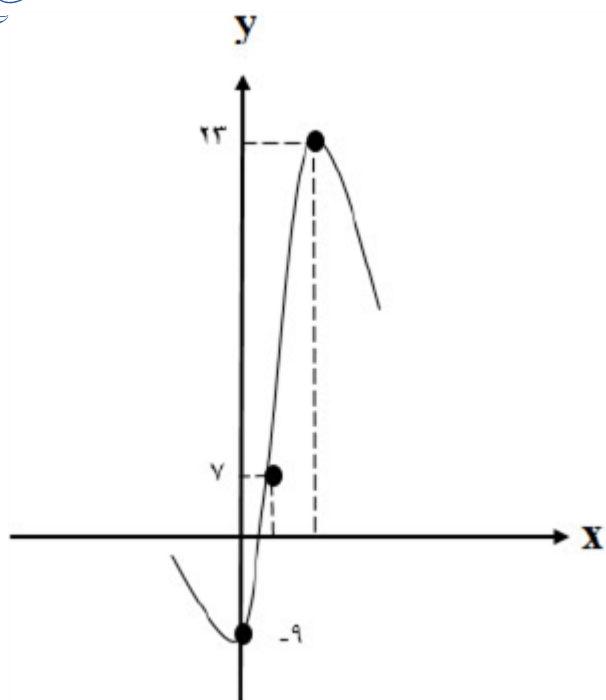
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^6}}$$

X	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	+		-
	U		∩

$f'(1) = +\infty$ پس تابع در $x = 1$ مماس قائم دارد و $x = 1$ نقطه عطف است.

۴۹

۵۰



$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x, D_f = R$$

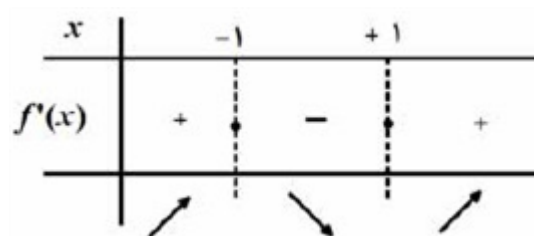
$$f'(x) = -3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f''(x) = -6x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

۵۱

X	$-\infty$	۰	۲	۴	$+\infty$
f'	-	+	+	-	
f''	+	+	-	-	
f	$+\infty$	\searrow	\nearrow	\searrow	$-\infty$
	\cup	-۹	\cup	۱۲	\cap
		min		max	

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



۵۲

اکیداً صعودی $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

اکیداً نزولی $(-1, +1)$

C ۵۳

$$\text{طول جعبه} = 16 - 2x, x \in [0, 8] \quad \text{عرض جعبه} = 6 - 2x, x \in [0, 3]$$

$$\Rightarrow v(x) = x(16 - 2x)(6 - 2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x, 0 \leq x \leq 3$$

$$v'(x) = 12x^2 - 88x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \notin [0, 3] \\ x = \frac{4}{3} \in [0, 3] \end{cases}$$

چون $v(0) = v(3) = 0$ ، پس به ازای $x = \frac{4}{3}$ بیشترین مقدار حجم حاصل می‌شود.

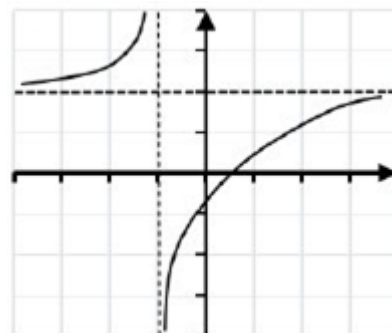
۵۴

مجانِب قائم $x = -۱$

مجانِب افقی $y = ۲$

$$y' = \frac{۳}{(x+۱)^۲} > ۰$$

x	$-\infty$	-۱	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	۲	$+\infty$	۲



$$f(-۱) = ۱ \Rightarrow a - b = ۳, f''(-۱) = ۰ \Rightarrow -۶ + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۳, b = ۰$$

۵۶

درست

۵۷

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \notin [-۱, ۱] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۱) = -۱ \\ f(۰) = ۱ \text{ max} \\ f(-۱) = -۳ \text{ min} \end{cases}$$

۵۸

نادرست

۵۹

درست

۶۰

$$۲(x+y) = ۱۴ \Rightarrow x+y = ۷ \Rightarrow y = ۷-x$$

$$y = ۷-x \Rightarrow s = (y)(x) = ۷x - x^۲ \Rightarrow s'(x) = ۷ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۳/۵, y = ۳/۵$$

۶۱

درست

۶۲

 $[-۱, ۱]$

۶۳

$$f'(۲) = ۰ \Rightarrow ۱۲ + ۴b = ۰ \Rightarrow b = -۳$$

$$f(۲) = ۱ \Rightarrow ۴b + d = -۷$$

$$-۱۲ + d = -۷ \Rightarrow d = ۵$$

۶۴

درست

۶۵

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$y'' = 6x + 2a \xrightarrow{x=0} 0 + 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\xrightarrow{x=1} y' = 0 \Rightarrow 3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$\xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=-1}} -1 = 1 - 3 + c \Rightarrow c = 1$$

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$y'' = 6x + 2a \xrightarrow{x=1} 6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$

$$\xrightarrow{x=2} y' = 0 \Rightarrow 12 - 12 + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\xrightarrow{\substack{x=2 \\ y=1}} 1 = 8 - 12 + c \Rightarrow -4 + c = -1 \Rightarrow c = 3$$

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(2^4 - x^2)}{2} = \frac{2^4}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

$$S'(x) = \frac{2^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x>0} x = 2 \Rightarrow y = 2^4 - 4 = 12$$

$$S(2) = \frac{2(2^4 - 4)}{2} = \frac{2 \times 12}{2} = 12$$

x	0	2	$\sqrt{2^4}$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$		12	

$A(2, 12)$

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(3 - x^2)}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

$$S'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x>0} x = 1 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$$

$$S(1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

x	0	1	$\sqrt{3}$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$		1	

$A(1, 2)$

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(9 - x^2)}{2} = \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^3$$

$$S'(x) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 9 - (\sqrt{3})^3 = 9 - 3 = 6$$

$$S(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}(9 - 3)}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 6}{2} = 3\sqrt{3}$$

x	0	$\sqrt{3}$	3
S'(x)	-	0	+
S(x)		$3\sqrt{3}$	

$A(\sqrt{3}, 6)$

$$S(x) = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{x(6 - x^2)}{2} = 3x - \frac{1}{2}x^3$$

$$S'(x) = 3 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 6 - 2 = 4$$

$$S(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(6 - 2)}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

x	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
S'(x)	-	0	+
S(x)		$2\sqrt{2}$	

$A(\sqrt{2}, 4)$

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۴

طول ماکزیمم نسبی: ۳

طول مینیمم مطلق: ۴

۵

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۲

طول ماکزیمم نسبی: ۳

طول مینیمم مطلق: ۲

۱

طول ماکزیمم مطلق:

طول مینیمم نسبی: ۳

طول ماکزیمم نسبی: ۲

طول مینیمم مطلق: ۱

۵

$$\pi R^2 h = 128\pi \Rightarrow h = \frac{128}{R^2}$$

$$S = \pi R^2 + \pi R h \Rightarrow S = \pi R^2 + \pi R \times \frac{128}{R^2} \Rightarrow S = \pi R^2 + \frac{256\pi}{R}$$

$$\Rightarrow S' = 2\pi R - \frac{256\pi}{R^2} = \frac{2\pi R^3 - 256\pi}{R^2} = 0 \Rightarrow 2\pi R^3 - 256\pi = 0$$

$$\Rightarrow R^3 = 128 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow h = \frac{128}{16} = 8$$

۷۰

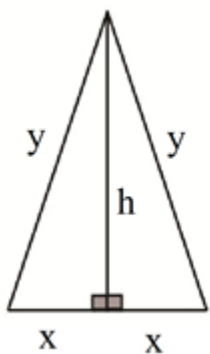
۷۱

۷۲

۷۳

۷۴

۷۵



$$2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

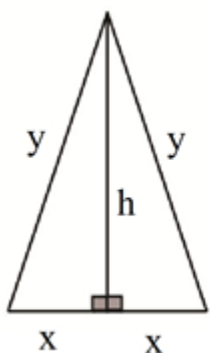
$$h^2 + x^2 = y^2 \xrightarrow{y=6} h^2 + x^2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36 - x^2}$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ}}{2} = \frac{2x \times h}{2} = x\sqrt{36 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{36 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}} \times x = \frac{36 - x^2 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}} = 0 \Rightarrow 36 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 18$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{طول قاعدہ مثلث} = 2x = 2(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$



$$2y = 20 \Rightarrow y = 10$$

$$h^2 + x^2 = y^2 \xrightarrow{y=10} h^2 + x^2 = 100 \Rightarrow h = \sqrt{100 - x^2}$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعدہ}}{2} = \frac{2x \times h}{2} = x\sqrt{100 - x^2}$$

$$S' = \sqrt{100 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} \times x = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Rightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 50$$

$$\Rightarrow x = 5\sqrt{2}$$

$$\text{طول قاعدہ مثلث} = 2x = 2(5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$$

$$C'(t) = \frac{12(4t^2 + 1) - 12t(12t)}{(4t^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow 48t^2 + 12 - 144t^2 = 0 \Rightarrow 96t^2 = 12 \Rightarrow t^2 = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$C'(t) = \frac{t^2 + 432 - 3t^2(t)}{(t^2 + 432)^2} = 0 \Rightarrow t^2 + 432 - 3t^3 = 0 \Rightarrow 2t^2 = 432 \Rightarrow t^2 = 216 \Rightarrow t = 6$$

۷۶

۷۷

۷۸

۷۹

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

$$t_1 = \frac{40 - x}{6}$$

$$BC^2 = x^2 + 100 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 100}$$

$$t_2 = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{2}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{40 - x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{2}$$

$$t = \frac{40}{6} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 100} \Rightarrow t' = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 100}} \right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 100} + 2x}{6\sqrt{x^2 + 100}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 100} + 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 100} = 2x$$

به توان می‌رسانیم ۲

$$\rightarrow x^2 + 100 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

t_1 : زمان رسیدن از A به B

t_2 : زمان رسیدن از B به C

$$t_1 = \frac{150 - x}{8}$$

$$BC^2 = x^2 + 60^2 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2 + 3600}$$

$$t_2 = \frac{BC}{4} = \frac{\sqrt{x^2 + 3600}}{4}$$

$$t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{150 - x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 + 3600}}{4}$$

$$t = \frac{150}{8} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 3600} \Rightarrow t' = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3600}} \right)$$

$$t' = \frac{-\sqrt{x^2 + 3600} + 2x}{8\sqrt{x^2 + 3600}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x^2 + 3600} + 2x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3600} = 2x$$

به توان می‌رسانیم ۲

$$\rightarrow x^2 + 3600 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 3600 \Rightarrow x^2 = 1200 \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 3 + 5 = 3 \Rightarrow A(1, 3)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -1 + 3 + 5 = 7 \Rightarrow B(-1, 7)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$AB = 2\sqrt{5}$$

ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و باید $f'(1) = 0$ باشد: ۸۳

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax \Rightarrow f'(1) = 3 + 2a = 0$$

$$\Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

همچنین باید $f(1) = -2$ باشد:

$$f(1) = -2 \Rightarrow 1 + a + b = -2 \xrightarrow{a=-\frac{3}{2}} 1 - \frac{3}{2} + b = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

نقطه A: نقطه بحرانی (ابتدای بازه) و ماکزیمم مطلق ۸۴

نقطه B: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

نقطه C: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

نقطه D: نقطه بحرانی (انتهای بازه) و مینیمم مطلق

نقطه A: نقطه بحرانی (ابتدای بازه) و مینیمم مطلق ۸۵

نقطه B: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

نقطه C: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

نقطه D: نقطه بحرانی و ماکزیمم مطلق و نسبی

نقطه E: نقطه بحرانی

نقطه F: نقطه بحرانی و مینیمم نسبی

نقطه G: نقطه بحرانی (انتهای بازه)

