---

۱۲۶)

$$(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2=(a-b)^4(a+b)^4=(a^2-b^2)^4$$

$$(a^2-b^2)^2=\left(\sqrt{\sqrt6-2}-\sqrt{\sqrt6+2}\right)^2=\sqrt6-\cancel{2}+\sqrt6+\cancel{2}-2\underbrace{\sqrt{6-4}}_{\sqrt2}=2(\sqrt6-\sqrt2)$$

$$\Rightarrow (a^2-b^2)^4=\left[2(\sqrt6-\sqrt2)\right]^2=4\left(6+2-2\sqrt{\underset{4\times3}{12}}\right)=4(8-4\sqrt3)=16(2-\sqrt3)$$

گ ۴

---

۱۲۷)

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x^4}+1+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)(\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x}\xrightarrow{\times\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x^2}+1)=2x$$

$$\Rightarrow(\sqrt[3]{x^2})^3+1^3=2x\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b}{a}=2$$

گ ۴

---

۱۲۸)

$$x^2+x-5=0\Rightarrow S=-1\quad,\quad P=-5$$

$$x_1+x_2=-1\Rightarrow x_1+1=-x_2\quad * \qquad x_2+1=-x_1$$

$$S'=\frac{1}{(x_1+1)^3}+\frac{1}{(x_2+1)^3}\overset{*}{\Rightarrow}\frac{-1}{x_2^3}+\frac{-1}{x_1^3}=-\frac{S^3-3SP}{P^3}$$

$$\Rightarrow S'=-\frac{(-1)^3-3(-1)(-5)}{(-5)^3}=-\frac{-1-15}{-125}=-\frac{16}{125}$$

$$\Rightarrow x^2-S'x+P'=0\Rightarrow x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$$

$$P'=\frac{-1}{x_2^3}\times\frac{-1}{x_1^3}=\frac{1}{P^3}=\frac{-1}{125}$$

$$\xRightarrow{\times125}125x^2+16x-1=0$$

$$\underline{125x^2+16x=1}$$

گ ۱

---

۱۲۹)

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=16\underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}\times\cos^2\frac{\pi}{6}\times\cos^2\frac{\pi}{3}\times\underbrace{\cos^2\frac{24\pi}{36}}=16\times\frac12\left(\frac{2+\sqrt3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2\left(\frac12\right)^2\left(-\frac12\right)^2$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac12\left(1+\frac{\sqrt3}{2}\right)$$

$$\cos\frac{24\pi}{36}=\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{-1}{2}$$

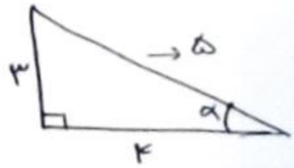
$$\boxed{\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}}$$

$$=\cancel{16}\times\frac12\times\frac14(2+\sqrt3)\left(\frac{3}{\cancel4}\right)\left(\frac14\right)\left(\frac14\right)$$

$$=\frac{3}{16}(2+\sqrt3)=\frac{6+3\sqrt3}{16}$$

گ ۴

۱۳۰)

$\tan\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow$  $\Rightarrow \sin\alpha = \frac{-3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{-4}{5}$

$$\frac{\cos(\overbrace{2\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-2\alpha}) + \cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\overbrace{\sin 2\alpha}^{2\sin\alpha\cos\alpha} - \cos\alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) + \frac{4}{5}}{7/24} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{44}{25}}{\frac{7}{24}}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1 - 2(\frac{9}{25})}{2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5})} = \frac{1 - \frac{18}{25}}{''} = \frac{\frac{7}{25}}{+\frac{24}{25}} = \frac{7}{24} \qquad = \frac{1056}{175}$$

گ ۲

---

۱۳۱)

$\cancel{1} - \sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = \cancel{1} \Rightarrow -\sin^2 x(1 + \cos 3x) = 0$

$\sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi = \boxed{0, \pi, 2\pi}$

$\Rightarrow$ ۵ جواب $\Rightarrow$

$\cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \boxed{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}}$

گ ۴

---

۱۳۲)

دامنه کسر: $x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \underset{\text{هم علامت}}{>} 0 \Rightarrow x < -1 \ , \ x > +2$

خرج: $\sqrt{\ } + 1 \Rightarrow$ همواره مخالف صفر

زیر رادیکال $\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ یا $x \leq -1$

$\cap \Rightarrow x < -1 \cup x > 2$

گ ۱

---

۱۳۳)

$x = 0 \Rightarrow y = 2|0| - 1 = -1 \Rightarrow$ گزینه ۳ رد می‌شود.

$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 2|[\frac{1}{2}]| - 1 = -1$

$0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = 2|[\underbrace{-\frac{1}{2}}_{-1}]| - 1 = 1 \Rightarrow$ گ ۲

---

۱۳۴)

روش اول: حدس: $y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6}$, $2(3) = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

$\Rightarrow (\sqrt{6}, 3)$ تقاطع $\rightarrow$ فاصله $= \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{\sqrt{6}^2 + 3^2} = \sqrt{15}$

گ ۴

روش دوم: حل تشریحی: $x^2 = \underbrace{y + \cancel{3} + y - \cancel{3} - 2\sqrt{y^2-9}}_{\text{ضابطه x را به توان ۲ می‌رسانیم}} = \underbrace{2y}_{\text{ضابطه دوم}}$

$\Rightarrow \cancel{2y} - 2\sqrt{y^2-9} = \cancel{2y} \Rightarrow y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y = \pm 3$ $\quad \sqrt{y-3} \rightarrow y \geq 3$

$\Downarrow$ $y = 3$ قابل قبول

$x^2 = 2y$
$\Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

با منفی چون ضابطه اول می‌رسیم که منفی قابل قبول نیست

P2 $\quad$ ۰۹۳۸۹۰۰۳۳۵۴ تهران $\quad$ سمیرا عزت‌پرور

۱۳۵) فاکتور

$$\frac{3^x(1+3+9+3^3+3^4+3^5)}{2^x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+2^2+2^3\right)}=52$$

تصاعد هندسی $\begin{cases} q=3 \\ a=1 \\ n=6 \end{cases}$

$$S_6=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-3^6)}{1-3}=\frac{728}{2}=364$$

هندسی $\begin{cases} q=2 \\ a=\frac{1}{4} \\ n=6 \end{cases}$

$$S_6=\frac{\frac{1}{4}(1-2^6)}{1-2}=\frac{1}{4}(63)=\frac{63}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3^x(364)}{2^x\left(\frac{63}{4}\right)}=52 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{\cancel{63}^{\,9}\times \cancel{52}^{\,1}}{\cancel{364}\times 4}=\frac{9}{4} \Rightarrow x=2$$

گ ۲

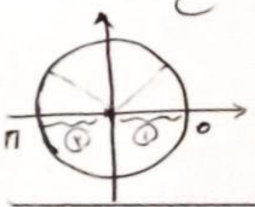
---

۱۳۶)

$$y=2^{|\sin x|} \xrightarrow[y \to y-\frac{3}{2}]{x \to x-\frac{\pi}{2}} y=2^{|\sin(x-\frac{\pi}{2})|}-\frac{3}{2}$$

$$y=2^{|\sin(\frac{\pi}{2}-x)|}-\frac{3}{2}=2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow 2^{|\cos x|}=\frac{3}{2}$$

بنابراین باید توان یعنی $|\cos x|$ عددی بین صفر و یک خواهد بود. در بازه $[0,\pi]$ دو مرتبه این اتفاق رخ خواهد داد.



پس دو جواب دارد ← گ ۳

---

۱۳۷)

$$\log_x y-2\log_y x=1 \xrightarrow[\substack{x,y>1 \\ \Rightarrow t\neq 0}]{t=\log_x y} t-\frac{2}{t}=1 \longrightarrow t^2-t-2=0$$

$$\Rightarrow (t+1)(t-2)=0 \rightarrow t=-1 \quad , \quad t=2 \Rightarrow \log_x y=2$$

$$\log_x y=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}$$

در فرضیه‌ها نیست

$$\Rightarrow y=x^2$$

گ ۱

---

۱۳۸)

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x(x+1)}}-\sqrt{\frac{1}{x^2(x^2+1)}}\right) \underset{\text{هم‌ارزی}}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)$$

$$=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$$

گ ۴

---

۱۳۹)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=\left[2\sin\frac{\pi}{6}^- -1\right]=\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^- -1\right]=[1^- -1]$$

$$=[0^-]=-1$$

گ ۱

$$y = 2+\sqrt{x-1} \xrightarrow[\text{نسبت داریم}]{\text{قرینه به } y=x} y-2=\sqrt{x-1} \Rightarrow x = 1+(y-2)^2$$ (۱۴۰

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1+(x-2)^2 \xrightarrow[x-2]{y-3} y = 1+(x-2-2)^2-3 = (x-4)^2-2$$

$$\Rightarrow g(x) = (x-4)^2-2 \rightarrow g(4) = -2$$ گزینه ۳

(۱۴۱

$$g\circ f = \begin{cases} 1 & 1-x^2>0 \rightarrow -1<x<1 \\ 0 & 1-x^2=0 \rightarrow x=\pm 1 \\ -1 & 1-x^2<0 \rightarrow x<-1,\ x>1 \end{cases}$$

$x=-1\ ,\ x=1$ نقاط مرز

مقادیر تابع در حدود و مقدار تابع در دو نقطه متفاوت است (یعنی ۱ و ۰ و دیگری ۰ و ۱-) پس در هر دو نقطه ناپیوسته است ⇐ گزینه ۳

(۱۴۲ داخل قدر مطلق دو ریشه ساده می‌دهد : $x^2-4=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2}$ ← مشتق ناپذیری

حالا سراغ نقاطی که مشتق آن‌ها صفر است می‌رویم :

داخل قدر مطلق مثبت ← $f(x) = \dfrac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} = \dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(4x^3-8x)}^{(4x^2-8)}(x^2-1) - \overbrace{2x}^{\text{فاکتور}}(x^4-4x^2)}{\qquad} = 0 \Rightarrow \text{از } x \text{ فاکتور} \Rightarrow \boxed{x=0}$$

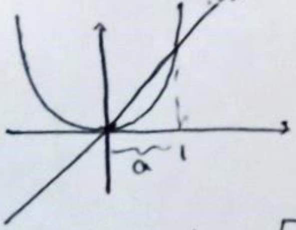
$$4x^4-4x^2-\cancel{8x^2}+8-2x^4+\cancel{8x^2}=0 \Rightarrow 4x^4-6x^2+8=0$$

$$\Rightarrow 2x^4-3x^2+4=0 \xrightarrow{t=x^2} \Delta<0 \Rightarrow$$ ریشه ندارد ⇐ ۳ نقطه ⇐ گزینه ۲

(۱۴۳ با دقت در جمله‌ی نامفهوم سوال !

$A(a, a^2) \xrightarrow[\text{قرینه}]{y=x} A'(a^2, a)$

متوجه می‌شویم که a نقطه‌ای بین دو محل تقاطع است یعنی بین ۰ و ۱



$0<a<1 \Rightarrow a^2<a \Rightarrow a^2-a<0$ ← داخل قدر مطلق منفی

$$AA' = \sqrt{(a^2-a)^2+(a-a^2)^2} = \sqrt{2(a^2-a)^2} = \sqrt{2}\,|a^2-a| = -\sqrt{2}(a^2-a)$$

$$\Rightarrow AA' = -\sqrt{2}a^2+\sqrt{2}a \xrightarrow{\max} x = -\frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow AA' = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$ گزینه ۳

۰۹۳۸۹۰۰۵۴۵۴
ایران
سمیرا عزتی‌روش

$$(f\circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) \Rightarrow (f\circ g)'\left(\tfrac{3}{\sqrt8}\right) = g'\left(\tfrac{3}{\sqrt8}\right) \times f'\Big(\underbrace{g\left(\tfrac{3}{\sqrt8}\right)}_{2}\Big) \quad (144$$

$$g'(x) = \left[(x^2-1)^{-1/3}\right]' = -\frac{1}{3}(2x)(x^2-1)^{-4/3} \Rightarrow g'\left(\tfrac{3}{\sqrt8}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\sqrt8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^{-4/3} =$$

$$-\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = -\frac{\sqrt2}{2} \times 16 = -8\sqrt2$$

$$f(x) = \left(x\left[2^2+\tfrac{1}{2}\right]\right)^2 + 1 = 16x^2+1$$

به ازای $x=2$ تعریف براکت را اعمال می‌کنیم:

$$f'(x) = 32x \rightarrow f'(2) = 64 \qquad (f\circ g)' = -8\times 64\sqrt2 \qquad \frac{-8\times64\sqrt2}{-128\sqrt2} = 4$$

گ ۴

$$f = \begin{cases} ax^2+bx+c & x \geq k \\ 2ax+b & x<k \end{cases} \rightarrow f' = \begin{cases} 2ax+b & x>k \\ 2a & x<k \end{cases} \quad (145$$

پیوستگی $\Rightarrow ak^2+bk+c = \underset{2a\,*}{\underline{2ak+b}}$ مشتق‌پذیری: $2ak+b = \underset{*}{2a} \Rightarrow b = 2a(1-k) = 2a-2ak \;{*_1}$

درصورت سوال: $b+c = a \Rightarrow c = a-b = a-2a+2ak = -a+2ak \;{*_2}$

جایگذاری در پیوستگی $\rightarrow ak^2 + \underbrace{(2a-2ak)}_{*_1}k \underbrace{-a+2ak}_{*_2} -2a = 0 \Rightarrow ak^2+2ak-2ak^2-3a+2ak=0$

$$\Rightarrow -ak^2+4ak-3a=0 \xrightarrow[\div(a)]{a\neq0} k^2-4k+3=0 \Rightarrow (k-1)(k-3)=0$$

$$\rightarrow k=1,3 \xrightarrow{max} k=3$$

راه دوم: شرط پیوستگی $f \Rightarrow g = g' \Rightarrow g, g'$ مماس هم هستند $\Rightarrow (g-g')$ ریشه مضاعف دارد

$$\Rightarrow g(x)-g'(x) = ax^2+bx+\overset{a-b}{c} - 2ax-b = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$ax^2+(b-2a)x+a-2b=0$$

$$\Delta = (b-2a)^2-4a(a-2b) = 0 \Rightarrow b^2-4ab+\cancel{4a^2}-\cancel{4a^2}+8ab=0$$

$$\Rightarrow b^2+4ab=0 \Rightarrow b(b+4a)=0 \rightarrow b=0,\; b=-4a$$

ریشه مضاعف: $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{b-2a}{2a} = -\frac{-4a-2a}{2a} = \frac{6a}{2a} = 3$

$$-\frac{0-2a}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1 \qquad \rightarrow max = 3$$

سعید عزت روش ۰۹۳۸۹۰۰۳۳۵۴
تهران