

۱۲۶- فرض کنید  $a = \sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$  و  $b = \sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$ . مقدار  $(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2$ ، کدام است؟  
 (۱)  $4(2 + \sqrt{3})$  (۲)  $4(2 - \sqrt{3})$  (۳)  $16(2 + \sqrt{3})$  (۴)  $16(2 - \sqrt{3})$

۱۲۶ - گزینه ۴

$$(a - b)^4 (a + b)^4 = (a^2 - b^2)^2 = (a^4 + b^4 - 2a^2b^2)^2$$

$$(\sqrt{6} + 2 + \sqrt{6} - 2 - 2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 =$$

$$(2\sqrt{2})^2 (\sqrt{3} - 1)^2 = 8(4 - 2\sqrt{3}) = 16(2 - \sqrt{3})$$

۱۲۷- فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله  $(\sqrt[3]{x^2} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + 1) = 2\sqrt[3]{x}$  باشند. مقدار  $x_1 + x_2$ ، کدام است؟  
 (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲۷ - گزینه ۴

طرفین معادله را در  $\sqrt[3]{x^2}$  ضرب میکنیم پ (حذف مخرج):

$$(\sqrt[3]{x^4} + 1 + \sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x^3} \Rightarrow x^2 - 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$$

۱۲۸- فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x = 5 - x^2$  باشند.  $\frac{1}{(x_1+1)^3}$  و  $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ ، ریشه‌های کدام معادله هستند؟  
 (۱)  $125x^2 + 16x = 1$  (۲)  $125x^2 = 16x + 1$   
 (۳)  $125x^2 = 12x + 1$  (۴)  $125x^2 + 12x = 1$

۱۲۸ - گزینه ۱

چون گزینه ها داری حاصلضرب ریشه های یکسان است فقط جمع ریشه ها را بدست می آوریم و گزینه صحیح را میزنیم و سراغ حاصلضرب ریشه ها نمیرویم.

$$x^2 + x = 5 \Rightarrow x(x + 1) = 5 \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{5}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{x+1}\right)^3 = \left(\frac{x}{5}\right)^3$$

$$\frac{1}{(x+1)^3} = \frac{x^3}{125}$$

$$S = a + b = \frac{1}{(\alpha+1)^3} + \frac{1}{(\beta+1)^3} = \frac{\alpha^3}{125} + \frac{\beta^3}{125} = \frac{S^3 - 3SP}{125}$$

$$S = \frac{(-1)^3 - 3(-1)(-5)}{125} = \frac{-1 - 15}{125} = \frac{-16}{125} \quad \text{گزینه یک}$$

از روی مقدار S به گزینه صحیح رسیدیم و نیازی به محاسبه و بررسی P نیست.

۱۲۹- اگر  $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$  باشد، مقدار  $f(\frac{\pi}{36})$  کدام است؟

$$\frac{6+3\sqrt{3}}{16} \quad (۴) \quad \frac{6+\sqrt{3}}{16} \quad (۳) \quad \frac{6-\sqrt{3}}{16} \quad (۲) \quad \frac{6-3\sqrt{3}}{16} \quad (۱)$$

۱۲۹ - گزینه ۴

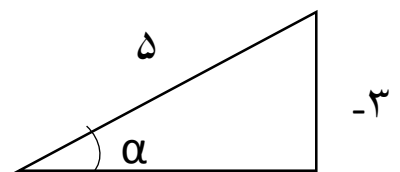
$$16 \cos^2 15 \cos^2 30 \cos^2 60 \cos^2 120 = 16 \frac{2+\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} (6 + 3\sqrt{3})$$

$$\cos^2 15 = \frac{1+\cos 30}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \quad \text{توجه کنید که:}$$

۱۳۰- اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم مثلثاتی و  $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$  کدام است؟

$$-\frac{1056}{175} \quad (۴) \quad \frac{96}{175} \quad (۳) \quad \frac{1056}{175} \quad (۲) \quad -\frac{96}{175} \quad (۱)$$

۱۳۰ - گزینه ۲



-۴

$$\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin 2\alpha \quad \text{و} \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2\alpha (\sin 2\alpha - \cos \alpha) = \frac{24}{7} \left( \frac{24}{25} + \frac{20}{25} \right) = \frac{24}{7} \times \frac{44}{25} = 2 \text{ گزینه } ۲$$

نیازی به ضرب صورت نیست. از گزینه های مثبت براحتی به پاسخ صحیح میرسیم.  
در رابطه  $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2})$  میگوییم منفی پی دوم بعلاوه آلفا همیشه ناحیه چهارم و..... .

۱۳۱- تعداد جوابهای معادله مثلثاتی  $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$ ، در فاصله  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟  
۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۵)      ۶ (۶)

۱۳۱ - گزینه ۳

$$1 - \cos^2 x + \sin^2 x \cos 3x = 0 \Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 x \cos 3x = 0$$

$$\sin^2 x (1 + \cos 3x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos 3x = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

چون در یکجواب  $\pi$  مشترک هستند پس در مجموع ۵ جواب دارد.

برای  $\cos 3x = -1$  میشد گفت: روی دایره مثلثاتی چون  $0 \leq x \leq 2\pi$  پس  $0 \leq 3x \leq 6\pi$  و مقدار  $\cos 3x$  در نقاط  $5\pi, 3\pi, \pi$  برابر با  $-1$  میباشد، سپس جوابها را بر ۳ تقسیم کنیم و به جواب اصلی برسیم.

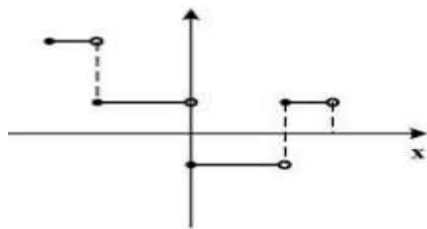
۱۳۲- دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\log_f(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ ، کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$       (۲)  $(-1, 2)$   
(۳)  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$       (۴)  $(-2, 1)$

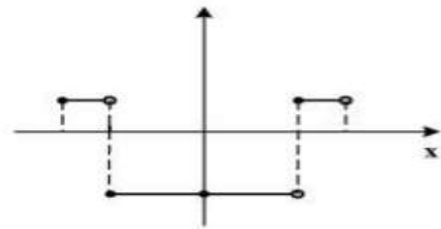
۱۳۲ - گزینه ۱

با جاگذاری عدد مناسب در لگاریتم به گزینه صحیح میرسیم  
اگر  $x = 0$  گزینه های ۲ و ۴ خط میخورند زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نشده اند و  
اگر  $x = 2$  گزینه ۳ خط میخورد.

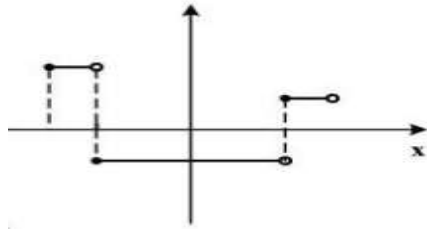
۱۳۳- نمودار تابع  $y = 2||3x|| - 1$  به ازای  $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ ، کدام است؟



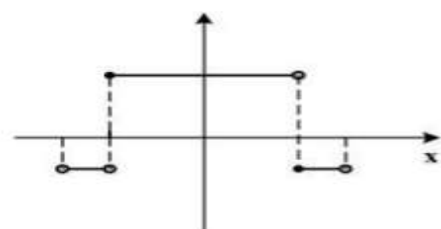
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

### ۱۳۳ - گزینه ۲

تابع جزء صحیح مطرحی در اعداد صحیح ناپیوسته است.  
رد گزینه های ۱ و ۳ و ۴. چون در شکل در نقطه  $x = 0$  پیوسته شده است.  
تنها عدد صحیح محدوده داده شده  $x = 0$  است که گزینه صحیح را مشخص میکند.

$$\text{حد راست در نقطه صفر: } 2|0| - 1 = -1$$

$$\text{حد چپ در نقطه صفر: } 2|-1| - 1 = 2 - 1 = 1$$

حل تشریحی :

$$\text{با توجه به بازه داده شده: } 3x = k \Rightarrow x = \frac{k}{3} \Rightarrow k = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right] \Rightarrow y = 3$$

$$\left[-\frac{1}{3}, 0\right] \Rightarrow y = 1$$

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \Rightarrow y = -1$$

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow y = 1$$

در بازه داده شده، ۳ محدوده بالای محور  $y$  ها قرار دارند. گزینه ۲

در بازه داده شده، محدوده دوم و چهارم بر خط  $y = 1$  قرار دارند. گزینه ۲

در بازه داده شده، کلاً ۳ انفصال داریم. گزینه ۲

نقاطی که بازه  $y$  باز هستند را میتوان در تابع گذاشت فقط در شکل توخالی میشوند.  
با جا گذاری اعداد در هر بازه (بر طبق شکل) میتوان به درست بودن شکل رسید.

۱۳۴- فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های  $2y = x^2$  و  $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$  با مبدأ مختصات، کدام است؟

(۴)  $\sqrt{15}$

(۳)  $2\sqrt{3}$

(۲)  $\sqrt{6}$

(۱)  $\sqrt{3}$

۱۳۴ - گزینه ۴

دو منحنی را با هم قطع می‌دهیم:

$$2y = (\sqrt{y+3} - \sqrt{y-3})^2 \Rightarrow 2y = y + 3 + y - 3 - 2\sqrt{y^2 - 9}$$

$$2\sqrt{y^2 - 9} = 0 \Rightarrow y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y = \pm 3$$

مقدار  $y = -3$  زیر رادیکال را منفی میکند و قابل قبول نیست.

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \end{bmatrix} \text{ و } O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow OA = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

۱۳۵- اگر  $\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = 52$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۳۵ - گزینه ۲

از کمترین توان صورت و کمترین توان مخرج برای سرعت بیشتر فاکتور می‌گیریم

$$\frac{3^x(1+3+9+27+81+243)}{2^{x-2}(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)} = \frac{3^x \times \frac{3^6-1}{3-1}}{2^{x-2} \times \frac{2^6-1}{2-1}} = 52$$

پس از ساده کردن اعداد به رابطه  $3^x = 2^{x-2} \times 9$  میرسیم که:

$$3^x = 9 \Rightarrow x = 2$$

چون گزینه هیچکدام نداریم بررسی زیر نیازی نیست و فقط جهت تکمیل نکته است.

$$2^{x-2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

چون مقدار هر دو جواب یکسان بدست آمده است، قابل قبول است.

۱۳۶- نمودار تابع  $y = 2^{|\sin x|}$  را ابتدا به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در امتداد محور  $x$  ها در جهت مثبت و سپس  $\frac{\pi}{4}$  در امتداد محور  $y$  ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور  $x$  ها در فاصله  $[0, \pi]$ ، کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

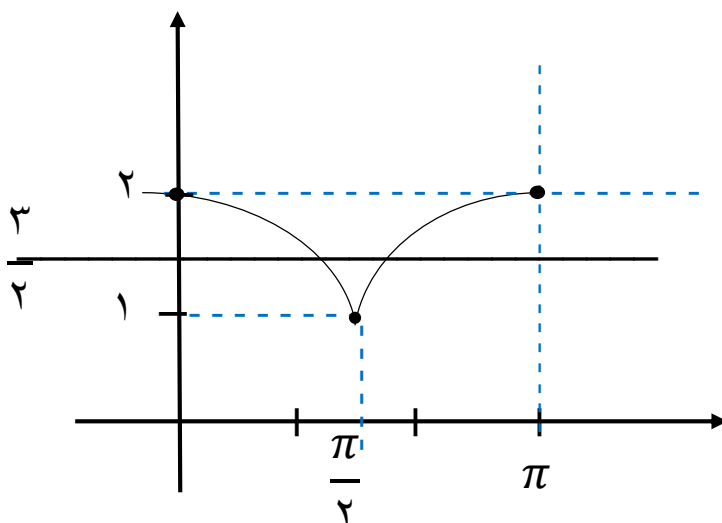
(۲) ۱

(۱) صفر

$$y = 2^{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} - \frac{3}{2} \Rightarrow y = 2^{\cos x} - \frac{3}{2}$$

تعداد تلاقی نمودارهای  $y = 2^{\cos x}$  و  $y = \frac{3}{2}$  در بازه داده شده، جواب است.

چون  $y = 2^{\cos x}$  دارای ماکزیمم ۲ و مینیمم ۱ می باشد پس در بازه داده شده از صفر تا پی دوم یکبار و از پی دوم تا پی هم یکبار را قطع میکنند. جمعاً = دو بار



۱۳۷- اگر تساوی  $\log_x y - 2 \log_y x = 1$  به ازای  $x, y > 1$  برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

$xy = 2$  (۴)     
  $y = \sqrt{x}$  (۳)     
  $y = x^2$  (۲)     
  $y = x^2$  (۱)

فقط گزینه یک در معادله صدق میکند. طراح سوال باید  $xy = 1$  را هم در گزینه ها میداد که با توجه به شرط داده شده قابل قبول نبود.

هر جا  $y$  دیدیم مقدار  $x^2$  را قرار میدهیم و بر طبق قواعد لگاریتم ساده میکنیم.

$$\log_x x^2 - 2 \log_{x^2} x = 1 \Rightarrow 2 \log_x x - \log_x x = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

حل کلی:  $\log_x y = t \Rightarrow \log_y x = \frac{1}{t} \Rightarrow t - \frac{2}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - 2t - 1 = 0$

چون  $b = a + c$  پس یک جواب برابر منفی یک و یک جواب  $-\frac{c}{a} = 2$  می باشد.

$$\begin{cases} \log_x y = 2 \Rightarrow y = x^2 \\ \log_x y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

که دومی ( $xy = 1$ ) با شرط داده شده سازگاری ندارد.

۱۳۸- مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$  ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\sqrt{2}$

۱۳۸ - گزینه ۴

$$\sqrt{\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2} - \frac{x}{x^2+1}} = \sqrt{1+1} - \sqrt{0-0} = \sqrt{2}$$

۱۳۹- مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x - 1]$  ، کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

۱۳۹ - گزینه ۱

$$\left[ 2 \sin \frac{\pi}{6}^- - 1 \right] = [1^- - 1] = [0^-] = -1 \quad \text{و} \quad \left( \frac{1}{2} \right)^- \approx 0.4$$

۱۴۰- قرینه نمودار تابع  $y = 2 + \sqrt{x-1}$  را نسبت به خط  $y = x$  رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می دهیم و آن را  $y = g(x)$  می نامیم. مقدار  $g(4)$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۴

۱۴۰ - گزینه ۳

یعنی نمودار وارون را بدست بیاور سپس انتقال ها را انجام بده.

$$\sqrt{x-1} = y - 2 \Rightarrow x - 1 = (y - 2)^2 \Rightarrow y^{-1} = (x - 2)^2 + 1$$

$$y = (x - 4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = (4 - 4)^2 - 2 = 0 - 2 = -2$$

راه تستی :

$$g(4) = t \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 \\ t \end{bmatrix} \text{ چپ دو واحد به چپ} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ t \end{bmatrix} \text{ بالا ۳ واحد} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ t + 3 \end{bmatrix}$$

حالا وارونش یعنی  $\begin{bmatrix} t + 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  باید روی  $f$  باشد.

$$2 = 2 + \sqrt{t + 3} - 1 \Rightarrow \sqrt{t + 2} = 0 \Rightarrow t = -2 = g(4)$$

۱۴۱- فرض کنید  $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  و  $f(x) = 1 - x^2$ . تعداد نقاط ناپیوستگی تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

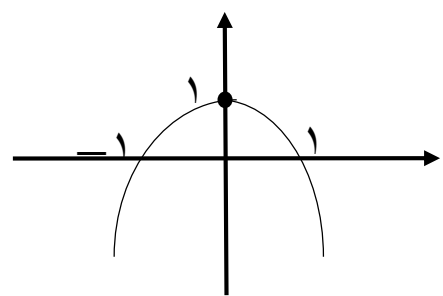
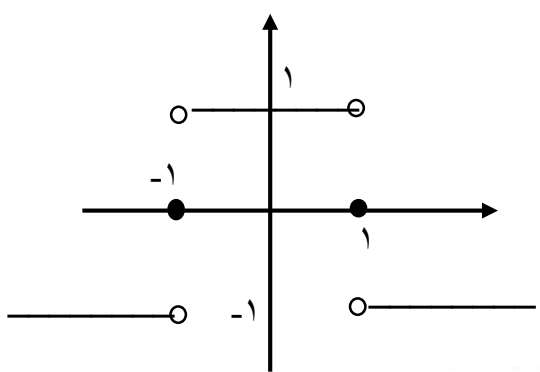
(۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

**۱۴۱ - گزینه ۳**

برد  $f$  در بازه  $(-1, 1)$  مثبت و در  $x = \pm 1$  برابر صفر و در  $x > 1$  یا  $x < -1$  منفی است. پس:

$$g \circ f = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \text{ یا } x^2 < 1 \\ 0 & x = \pm 1 \\ -1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \text{ یا } x^2 > 1 \end{cases}$$

طبق ضابطه فوق تابع مرکب فقط در دو نقطه  $x = 1$  و  $x = -1$  فاقد پیوستگی است.



۱۴۲- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4|$ ، کدام است؟

(۱) ۲      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

**۱۴۲ - گزینه ۲**

حداکثر ریشه های این معادله ۴ تا است حداکثر نقاط اکسترمم این معادله ۳ تا است. رد گزینه های ۳ و ۴.

ریشه های قدر مطلق (گوشه های منحنی) = اکسترمم نسبی = ۲ تا

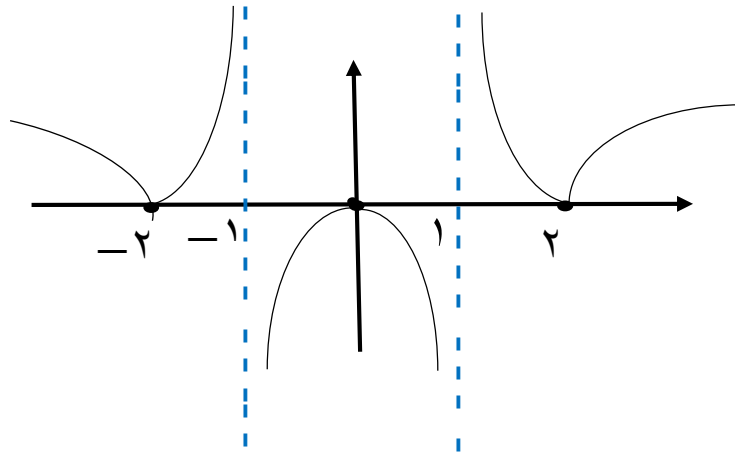
ریشه های مکرر از درجه زوج = اکسترمم نسبی = یکی

جمعا ۳ اکسترمم = رد گزینه یک و رسیدن به گزینه صحیح در سریعترین زمان ممکن.

مشخص شد با توجه به توضیحات فوق، ریشه ی مشتق جز  $x = 0$  نمیتواند باشد.

توضیحات زیر همگی اضافی و برای درک بیشتر شما و اثبات جملات فوق میباشد.





ابتدا قدر مطلق را حذف کرده سپس مشتق میگیریم. چون بررسی شرط مثبت یا منفی قدر مطلق در تعداد ریشه ها تأثیری ندارد فقط شرط مثبت را بررسی میکنیم زیرا ریشه های مخرج در آن محدوده نیست.

در بررسی ریشه های مشتق فقط صورت کسر را مینویسیم و محاسبه میکنیم و به مخرجش کاری نداریم.

$$y = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = (4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2) = 0$$

$$2x^5 - 4x^3 - 8x^3 + 8x - 2x^5 + 8x^3 = 2x(x^4 - 2x^2 + 4) = 0$$

دلتهای پرانتز کوچکتر از صفر است لذا مشتق همان یک ریشه را دارد و چون در طرفین ریشه ی مشتق ، تغییر علامت میدهد آن نقطه اکسترم محسوب میشود.

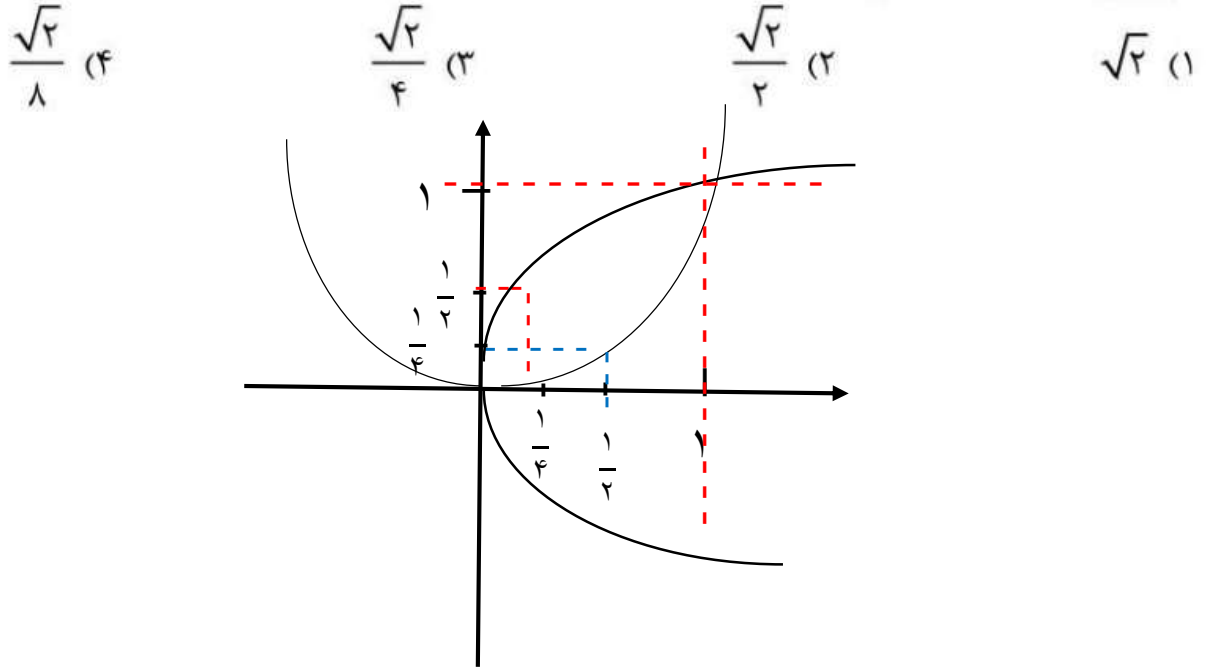
بررسی اکسترم بودن نقاط  $x = 2$  و  $x = -2$  : مشتق راست در  $x = 2$  نکته : فقط از عامل صفر ساز مشتق میگیریم و در بقیه ی جملات ضرب میکنیم.

$$y' = 2x \times \frac{x^2}{x^2 - 1} = +4 \times \frac{4}{3}$$

$$y' = -2x \times \frac{x^2}{x^2 - 1} = -4 \times \frac{4}{3} \quad \text{مشتق چپ در } x = 2 :$$

یعنی مشتق در طرفین  $x = 2$  تغییر علامت داده است و اکسترم محسوب میشود. همین کار را هم میتوان برای  $x = -2$  انجام داد و به همین نتیجه رسید.

۱۴۳- قرینه نقطه A واقع بر سهمی  $f(x) = x^2$  را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را  $A'$  می‌نامیم. اگر طول نقطه A بین دو طول متوالی از محل بر تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط  $AA'$ ، کدام است؟



۱۴۳ - گزینه ۳

وقتی نمودار تابع و معکوسش را بکشیم مشخص میشه در بین صفر و یک ۲ بار تلاقی دارند و برای ماکزیمم باید وسط این نقطه استفاده شود. یعنی:  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow AA' = \frac{\sqrt{2}}{4}$

حل تشریحی:  $A = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$  و  $A' = \begin{bmatrix} x^2 \\ x \end{bmatrix}$

$$AA' = \sqrt{(x - x^2)^2 + (x^2 - x)^2} = \sqrt{2}(x - x^2)$$

چون  $A, A'$  در محدوده بین صفر و یک قرار دارند پس  $x > x^2$  مشتق مساوی با صفر طول نقطه اکسترم را به ما میدهد.

$$1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow AA' = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۴۴- فرض کنید  $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{4}])^2 + 1$  و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ . مقدار مشتق تابع fog در  $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$  چند برابر

است؟  $(-128\sqrt{2})$

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۴ (۱)

۱۴۴ - گزینه ۴

ابتدا جزء صحیح را حذف میکنیم.  $g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = 2$ . حال عدد ۲ را فقط داخل ایکس های جزء صحیح تابع  $f$  قرار میدهیم. در نتیجه:  $f(x) = 16x^2 + 1$  حال مشتق تابع مرکب را میگیریم.

$$(f \circ g)' = g'(x) \times f'(g(x))$$

$$g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right) = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) f'(2) =$$

$$f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 32 \times 2 = 64$$

$$g'(x) = -\frac{1}{3}(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -8\sqrt{2}$$

$$(f \circ g)' = -8\sqrt{2} \times 64 = -128\sqrt{2} \times 4$$

۱۴۵- فرض کنید  $g(x) = ax^2 + bx + c$ ،  $(a \neq 0)$  و  $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$  باشد. اگر  $f$  یک تابع مشتق پذیر باشد، حداکثر مقدار  $k$  به شرط  $b + c = a$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

$\frac{3}{4}$  (۱)

**۱۴۵ - گزینه ۳**

چون گفته  $f$  مشتق پذیر است ابتدا شرط پیوستگی و سپس شرط مشتق پذیری را بررسی میکنیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$ak^2 + bk + c = 2ak + b \Rightarrow ak^2 + (b - 2a)k + c - b = 0$$

معادله باید ریشه مضاعف داشته باشد تا انفصال ایجاد نکند. یعنی:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (b - 2a)^2 - 4a(c - b) = 0$$

حال بجای  $c$  معادله را طبق فرض قرا میدهیم. لذا خواهیم داشت:

$$(b - 2a)^2 - 4a(a - 2b) = 0 \Rightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 - 4a^2 + 8ab = 0$$

$$b(b + 4a) = 0 \Rightarrow b = 0, -4a$$

حال شرط مشتق پذیری را بررسی میکنیم (همان طول رأس سهمی در شرط اول است یعنی میشود با همان شرط اول به جواب رسید).

$$2ak + b = 2a \Rightarrow k = \frac{2a-b}{2a}$$

حال بجای  $b$  معادله را  $(b = 0, -4a)$  قرار میدهیم :

$$k = \frac{2a-0}{2a} = 1 \quad \text{و} \quad k = \frac{2a+4a}{2a} = 3$$

و چون حداکثر مقدار  $k$  را خواسته است لذا  $k = 3$  پاسخ صحیح میباشد.

۱۴۶- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع  $4\sqrt{2}$  محاط می‌شود، کدام است؟

- (۱)  $32\pi$       (۲)  $64\pi$       (۳)  $\frac{256\pi}{3}$       (۴)  $\frac{512\pi}{3}$

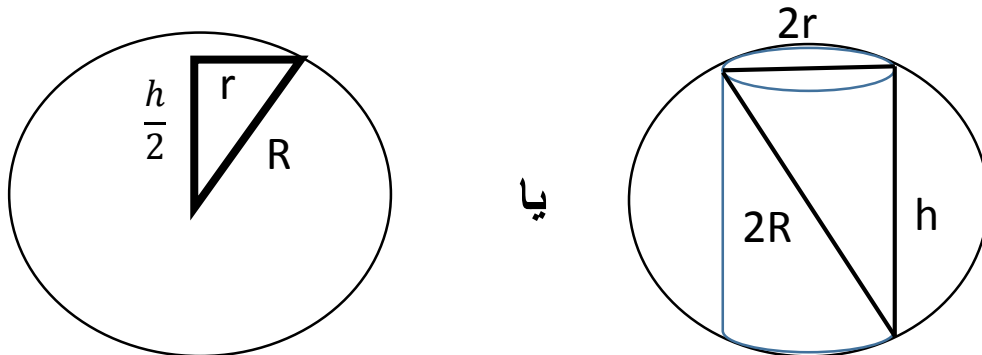
**۱۴۶ - گزینه ۲**

ابتدا رابطه ای بین اجزاء استوانه و کره مینویسیم. سپس بر حسب یک متغیر مرتب میکنیم و در نهایت مشتق مساوی با صفر را حل میکنیم. یا :

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{h}{2} = 4 \Rightarrow h = 8 \\ r^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \end{cases}$$

$$S = 2\pi r h = 2\pi \times 4 \times 8 = 64\pi$$

میشد از رابطه  $h^2 + (2r)^2 = (2R)^2$  هم حل نمود که محاسبات بیشتر میشود.



یا

۱۴۷- احتمال این که یک دانش آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد  $9/10$  و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد  $85/100$  است. اگر دانش آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال این که امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{9}$       (۲)  $\frac{85}{94}$       (۳)  $\frac{17}{18}$       (۴)  $\frac{45}{47}$

**۱۴۷ - گزینه ۳**

امتحان دوم =  $B$

امتحان اول =  $A$

$$P(A) = P(B) = 0.9 \text{ و } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.85}{0.9} = \frac{85}{90} = \frac{5 \times 17}{5 \times 18} = \frac{17}{18}$$

۱۴۸- فرض کنید  $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ . چند معادله درجه دوم به صورت  $ax^2 + bx - c = 0$  می توان تشکیل داد، به طوری که مجموع ریشه های هر معادله از حاصل ضرب ریشه های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

۱۴ (۱)

۱۴۸ - گزینه ۳

با توجه به فرض مسئله  $\frac{c}{a} < 0$  یا  $\Delta > 0$ ، معادله حتما دو ریشه حقیقی و متمایز و مختلف العلامه دارد.

$$S = P + 2 \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{-c}{a} + 2 \Rightarrow c = 2a + b$$

$a = 1, b = 1, 2, \dots, 7$  هفت مقدار

$a = 2, b = 1, 2, \dots, 5$  پنج مقدار

$a = 3, b = 1, 2, 3$  سه مقدار

$a = 4, b = 1$  یک مقدار

جمعاً ۱۶ مقدار

۱۴۹- در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی ها بنشینند، به طوری که در کنار هر دانش آموزی، دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟

۱۱۵۲ (۴)

۲۷۶ (۳)

۲۸۸ (۲)

۱۴۴ (۱)

۱۴۹ - گزینه ۱ . حذف در نظام جدید. سوال باید حذف شود.

کلاس پایه دهم را انتخاب میکنیم تعداد حالات در میزگرد (حالت دوری)  $(n - 1)!$  میباشد. زیرا اگر آنها را با حروف  $A, B, C, D$  مشخص کنیم حالت های  $ABCD$  و  $BCDA$  و  $CDAB$  و  $DABC$  در دور (میزگرد) با هم یکسان هستند لذا تعداد حالت کل برابر است با  $(n - 1)!$   $\frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n - 1)!$ . لذا تعداد حالت های پایه دهم بصورت  $3!$  میباشد. تعداد حالت های پایه دوازدهم چون حالت های یکسان در نمی آید همان  $4!$  میباشد. لذا تعداد حالت های کل بصورت  $3! 4! = 6 \times 24 = 144$  میباشد.

۱۵۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۴) \qquad \frac{3}{7} \quad (۳) \qquad \frac{4}{7} \quad (۲) \qquad \frac{13}{21} \quad (۱)$$

**۱۵۰ - همه ی گزینه ها غلط هستند و سوال باید حذف شود.**

اعدادی بر ۴ بخش پذیرند که ۲ رقم سمت راست آنها بر ۴ بخش پذیر باشد. پس :

$$n_{(S)} = 5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 325$$

$$n_{(A)} = 1 + 4 + 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 65$$

یک رقمی = فقط عدد ۴ = یک حالت

دو رقمی = ۱۲ و ۲۴ و ۳۲ و ۵۲ = ۴ حالت

۳ رقمی = دو رقم سمت راست یکی از ۴ عدد دو رقمی بالا و ۳ حالت برای صدگان = ۱۲ حالت

۴ رقمی = دو رقم سمت راست یکی از ۴ دو رقمی بالا و ۳ حالت برای صدگان و ۲ حالت برای هزارگان = ۲۴ حالت

۵ رقمی = دو رقم سمت راست یکی از ۴ دو رقمی بالا و ۳ حالت برای صدگان و ۲ حالت برای هزارگان و یک حالت برای ده هزارگان = ۲۴ حالت

$$P(A) = \frac{n_{(A)}}{n_{(S)}} = \frac{65}{325} = \frac{1}{5} = 0.2$$

۱۵۱- شیب نیم‌خطی با نقطه شروع  $A(2, 4)$  برابر ۳ است. مستطیل  $ABCD$  را چنان می‌سازیم، که نقطه  $B$  روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن  $C(-3, -1)$  باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

$$3\sqrt{10} \quad (۴) \qquad 6\sqrt{10} \quad (۳) \qquad 18 \quad (۲) \qquad 24 \quad (۱)$$

**۱۵۱ - گزینه ۳**

معادله خط  $AB$  را نوشته سپس فاصله نقطه  $C$  را تا خط  $AB$  بدست می‌آوریم  $(BC)$ . سپس فاصله  $AC$  را بدست می‌آوریم و از رابطه فیثاغورث به اندازه  $AB$  میرسیم.

برای محاسبه معادله خط  $AB$  سریع مینویسیم  $y = 3x + b$ . برای محاسبه  $b$ ؛ قرینه شیب را در طول نقطه ضرب میکنیم و سپس با عرض نقطه جمع میکنیم یا شیب را در قرینه طول ضرب میکنیم و سپس با عرض جمع میکنیم. یعنی :

$$b = 3 \times (-2) + 4 = -2$$

پس معادله  $AB$  بصورت  $y = 3x - 2$  در می آید. فاصله نقطه  $C$  تا خط  $AB$  :

$$3x - y - 2 = 0 \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

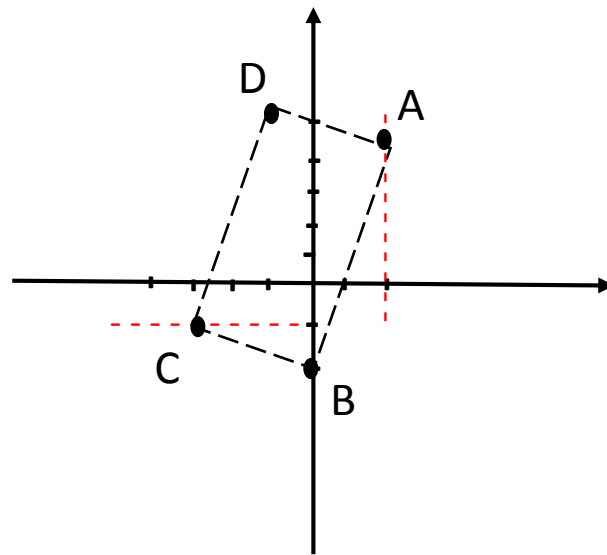
$$d = BC = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(-3) - 1(-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 + 3)^2 + (4 + 1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AB^2 = 50 - 10 = 40 \Rightarrow AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2 \times (\text{طول} + \text{عرض}) = 2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$

میشد معادله  $BC$  و  $AB$  را نوشت و در یک دستگاه حل نمود تا مختصات نقطه  $B$  بدست آید. سپس با محاسبه ی عرض و طول ، به اندازه محیط برسیم.



$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۱۵۲- نقطه  $H(2, 1)$  را روی خط  $3x - y = 5$  در نظر بگیرید. مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$  را با ارتفاع  $AH$  می سازیم، به طوری که محیط مثلث  $\sqrt{270}$  واحد باشد. مختصات یک رأس  $A$ ، کدام است؟

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{6}\right) \quad (۴)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad (۳)$$

$$\left(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (۲)$$

$$\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (۱)$$

۱۵۲ - گزینه ۲

محیط  $3\sqrt{30}$  باشد پس هر ضلع  $\sqrt{30}$  میشود و ارتفاع  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  برابر ضلع یعنی  $\frac{\sqrt{90}}{2}$

میشود. حال از گزینه ها استفاده میکنیم. فاصله کدامیک از آنها از  $H$  برابر  $\frac{\sqrt{90}}{2}$  است؟

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2} - \frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

بررسی گزینه ۱ :

$$\sqrt{\left(\frac{13}{2} - \frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

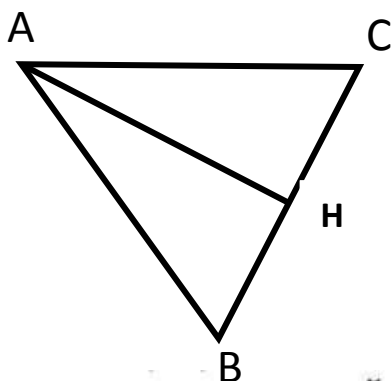
بررسی گزینه ۲ : گزینه دو جواب است

راه دوم : میتوان معادله  $AH$  ( $3y + x - 5 = 0$ ) را نوشت سپس فاصله ی

نقطه  $A = \begin{bmatrix} 3t - 5 \\ t \end{bmatrix}$  را از نقطه  $H = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  برابر  $\frac{\sqrt{90}}{2}$  بدست آورد.

راه سوم : میتوان معادله  $AH$  ( $3y + x - 5 = 0$ ) را نوشت سپس فاصله ی

نقطه  $A = \begin{bmatrix} 3t - 5 \\ t \end{bmatrix}$  را از خط  $AH$  برابر  $\frac{\sqrt{90}}{2}$  بدست آورد.



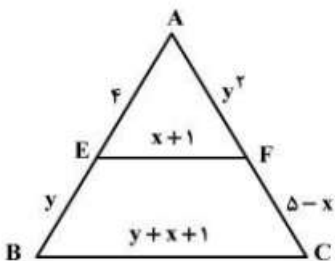
۱۵۲- دایره های  $x^2 + y^2 + 2x = 3$  و  $x^2 + y^2 + 2y = 3$  متقاطع اند. معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟  
 (۱)  $x = y$  (۲)  $x = 1 + y$  (۳)  $x = -y$  (۴)  $x = 1 - y$

**۱۵۳ - گزینه ۱ . حذف در نظام جدید. سوال باید حذف شود.**

چون سوال گفته دایره ها متقاطع هستند و دو معادله نسبت به  $y = x$  متقارن هستند پس خط  $y = x$  همان وتر مشترک است و نیازی به حل و محاسبه نیست.

۱۵۴- در شکل زیر  $EF$  موازی  $BC$  است. مقدار  $y - 2x$ ، کدام است؟

- (۱) -۴
- (۲) -۲
- (۳) ۲
- (۴) ۴



**۱۵۴ - گزینه ۱**

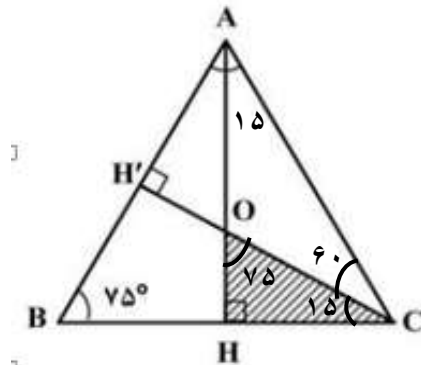
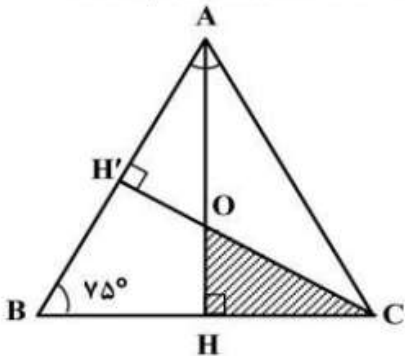
$$\frac{4}{y+4} = \frac{x+1}{y+x+1} \text{ (تفضیل نسبت در مخرج)} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{x+1}{y} \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$$



$$\frac{4}{y} = \frac{y^2}{5-x} \Rightarrow y^3 = 4 \times (5-3) = 8 \Rightarrow y = 2$$

$$y - 2x = 2 - 2(3) = 2 - 6 = -4$$

۱۵۵- در شکل زیر مثلث ABC متساوی الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC، کدام است؟



$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{9}{7+4\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{18}{7+4\sqrt{3}} \quad (3)$$

**۱۵۵ - همه ی گزینه ها غلط هستند و سوال باید حذف شود.**

مثلث های  $OHC$  و  $AHC$  بحالت ۳ زاویه با هم متشابهند. و نست تشابه آنها طبق شکل

$K = \tan 15$  میباشد و نسبت تشابه مساحتها برابر  $K^2 = \tan^2 15$  میباشد و چون مساحت مثلث  $AHC$  نصف مساحت مثلث  $ABC$  است و مساحت مثلث  $ABC$  برابر

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 9 \quad \text{است با:}$$

$$\text{پس } S_{AHC} = \frac{9}{2} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$K^2 = \frac{S_{OHC}}{S_{ACH}} = \tan^2 15 = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 2\sqrt{3} = \frac{1}{7+2\sqrt{3}}$$

$$S_{OHC} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{7+2\sqrt{3}} \quad \text{جواب صحیح در بین گزینه ها نیست.}$$

نسبت تشابه مثلث کوچک به مثلث بزرگ =  $\tan 15$

نسبت تشابه مثلث بزرگ به مثلث کوچک =  $\tan 75$

اگر مقدار  $\tan 15$  را حفظ نیستید میتوانید براحتی مقدارش را محاسبه کنید.

$$\tan(60 - 45) = \frac{\tan 60 - \tan 45}{1 + \tan 60 \tan 45} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

<i>Radian</i> Degree	0	$\frac{\pi}{12}$ 15	$\frac{\pi}{8}$ 22.5	$\frac{\pi}{6}$ 30	$\frac{\pi}{4}$ 45
<i>Sin</i>	0	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
<i>Cos</i>	1	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
<i>Tan</i>	0	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
<i>cot</i>	$\infty$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{2} + 1$	$\sqrt{3}$	1

از صفر تا ۴۵ را یاد بگیرید کافیست. برای محاسبه بقیه ی زوایا ، از متمم استفاده کنید.

$$\sin 75 = \cos 15 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cot 67.5 = \tan 22.5 = \sqrt{2} - 1$$

$$\tan \alpha \times \cot \alpha = 1 \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

با یاد گیری این جدول ، سرعت تست زنی را به حداکثر ؛ زمان پاسخگویی را به حداقل و از طراحان سوال سبقت بگیرید !!

**موفق باشید !!**

## مسئولین سازمان سنجش و آموزش کشور و طراحان سوالات ریاضی کنکور :

۱. چرا طراحان سوال بلافاصله پاسخنامه تشریحی نمیدهند تا هم درجه و درک علمی و سرعت و قدرت و پردازش محاسبات ذهنی و عملی تان مشخص شود و هم راه روشنی برای کنکوری های سالهای بعد بشود؟؟
۲. وقتی طبق نظر مسئولین کشوری ، طراحان سوالات کنکور از بهترین های کشوری هستند و خودشان پس از ماه ها فرصت و زمان برای طرح و بررسی سوال ها ؛ آنها با توجه به منابع بسیار خوب و بالایی که دارند ؛ هم در طرح سوال ها و هم در طرح گزینه ها دچار خطا و لغزش میشوند از دانش آموزان پایه ی دوازدهم چه انتظاری دارید که در فرصت حدود یک دقیقه ای به پاسخ صحیح برسند؟؟ مطمئنم طراحان تان در این فرصت حتی قادر به درک سوالها هم نیستید چه برسد به پاسخ صحیح دادن. سوالات کنکور مثنی است از نمونه خروارهایی که تا بحال ، خودتان رو کرده اید.
۳. از حل سوالات ریاضی رشته ی انسانی و تجربی و ریاضی مشخص شد **(الف)** به سر فصل های کتابهای نظام جدید واقف و مسلط نیستند و سوالاتی از قسمت های حذف شده آوردند. **(ب)** در مفاهیم پایه ای و علمی دچار خطا و لغزش هستند **(ج)** در طرح گزینه های درست و مناسب دچار خطا و لغزشند.
- سالیان سال است که برای پوشاندن عیب های بزرگ شان از این مهم طفره میروند و بلافاصله بعد از جلسه آزمون ، پاسخنامه تشریحی نمی دهند تا بر مشکلات تان بیشتر از این افزوده نشود.
۴. بنده حاضرم با تک تک طراحان سوالات ریاضی کنکور رشته های انسانی و تجربی و ریاضی در حضور همگان در سیمای کشوری و در برنامه زنده ، آنها در فرجه ی قانونی برای هر سوال به رقابت پردازم. یک سوال شما برای من طرح میکنید و من پاسخ میدهم و یک سوال من برای شما طرح میکنم و شما پاسخ میدهند.
۵. لطفا مسئولین سازمان سنجش و آموزش کشور و طراحان سوالات کنکور سراسری دنبال رفع معضلاتشان باشند و پس از گذشت چندین دهه ، به دنبال راه راست باشند و دنبال نابودی نسل های پر تلاش و پر توان و پر امید و پر انگیزه و پر اراده و پر ارزش نباشند.

**@Aazzii**

از تابستان ۱۴۰۰

در شهرستان ساری

در خدمت علاقمندان

به ریاضیات و کنکور

هستم.

**@Aazzii**