درک عمومی ریاضی و فیزیک — سراسری ۱۴۰۰

۱۳۱- گزینه‌ی «۴»

(محاسبات عددی)

$$\frac{۱۳}{۳۳۳} = ۰/۰۳۹۰۳۹۰۳۹...$$

ملاحظه می‌شود که رقم نهم بعد از ممیز ۹ می‌باشد.

۱۳۲- گزینه‌ی «۳»

(محاسبات عددی)

$$\frac{۱۱-۶\sqrt{۲}}{۳-۲\sqrt{۲}} = \frac{(۳-\sqrt{۲})^۲}{(۱-\sqrt{۲})^۲}$$

بنابراین جذر عدد فوق به‌صورت قدرمطلق عدد $\frac{۳-\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}$ می‌باشد.

از آن‌جا که مخرج این کسر منفی و صورت آن مثبت می‌باشد، باید این عدد را در -۱ ضرب کرد. سپس داریم:

$$\frac{۳-\sqrt{۲}}{-۱+\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{۱+۲\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}-۲}{-۱-۲\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+۴} = \frac{۳\sqrt{۲}-۲}{+۳-\sqrt{۲}}$$

حال باید مخرج کسر فوق را گویا کنیم.

$$\frac{۳\sqrt{۲}-۲}{۳-\sqrt{۲}} \times \frac{۳+\sqrt{۲}}{۳+\sqrt{۲}} = \frac{\cancel{۶}+۹\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}-\cancel{۶}}{۹-۲} = \frac{۷\sqrt{۲}}{۷} = \sqrt{۲}$$

۱۳۳- گزینه‌ی «۲»

(محاسبات عددی)

$$۴\times۲^{۱۰}-۹\times۳^۴ = ۴\times۱۰۲۴-۹\times۸۱ = ۴۰۹۶-۷۲۹ = ۳۳۶۷$$
$$۳۳۶۷\div۷ = ۴۸۱$$
$$۳۳۶۷\div۱۳ = ۲۵۹$$
$$۳۳۶۷\div۳۷ = ۹۱$$

ملاحظه می‌شود عدد ۳۳۶۷ بر ۷، ۱۳ و ۳۷ بخش‌پذیر است ولی بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.

۱۳۴- گزینه‌ی «۱»

(محاسبات عددی)

در هر تقسیم، مقسوم برابر است با مجموع باقی‌مانده با حاصلضرب خارج‌قسمت در مقسوم‌علیه. طبق صورت سؤال در این تقسیم، مقسوم برابر a و مقسوم‌علیه برابر ۱۵ است. حال اگر باقی‌مانده را r و خارج‌قسمت را q درنظر بگیریم داریم:

$$\begin{cases} a = ۱۵q+r \\ q+r = ۵ \end{cases} \Rightarrow a = ۱۵q+۵-q \Rightarrow a = ۱۴q+۵$$

$$\Rightarrow a-۵ = ۱۴q$$

در نتیجه عدد $a-۵$ بر ۱۴ بخش‌پذیر می‌باشد.

۱۳۵- گزینه‌ی «۱»

(شمارش)

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر ۲^n است. اگر تعداد اعضای مجموعه‌ی A را به‌صورت $n(A)$ و تعداد اعضای مجموعه‌ی B را به‌صورت $n(B)$ درنظر بگیریم، داریم:

$$۲^{n(B)} = ۲^۲\times۲^{n(A)} = ۲^{۲+n(A)} \Rightarrow n(B) = n(A)+۲$$

$$\frac{۲^{(n(A)+۳)}}{۲^{n(B)}} = \frac{۸\times۲^{n(A)}}{۴\times۲^{n(A)}} = ۲$$

۱۳۶- گزینه‌ی «۲»

(شمارش)

اعداد طبیعی بین ۱۰۰ و ۲۰۰ همگی در صدگان ۱ مشترک هستند و رقم‌های یکان و دهگان آن‌ها می‌توانند بین ۰ تا ۹ متغیر باشد. مطابق صورت سؤال مجموع ارقام اعداد مطلوب برابر ۱۵ است و چون صدگان برابر ۱ است، پس مجموع یکان و دهگان باید برابر ۱۴ باشد. اگر یکان را b و دهگان را a درنظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} a = ۹ \Rightarrow b = ۵\ \text{یا}\ ۶\ \text{یا}\ ۷\ \text{یا}\ ۸\ \text{یا}\ ۹ \\ a = ۸ \Rightarrow b = ۶\ \text{یا}\ ۷\ \text{یا}\ ۸\ \text{یا}\ ۹ \\ a = ۷ \Rightarrow b = ۷\ \text{یا}\ ۸\ \text{یا}\ ۹ \\ a = ۶ \Rightarrow b = ۹ \end{cases}$$

در نتیجه اعداد مطلوب به‌صورت ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۷۸، ۱۷۹ و ۱۶۹ هستند که تعداد آن‌ها برابر ۱۰ می‌باشد.

۱۳۷- گزینه‌ی «۱»

(محاسبات عددی)

قیمت فروش کالا را P_f، قیمت تمام شده را P_t و قیمت نهایی فروش رفته را P_n در نظر می‌گیریم. آن‌گاه داریم:

$$P_f = \frac{۱۲۰}{۱۰۰}P_t$$

$$P_n = \frac{۹۵}{۱۰۰}\times P_f = \frac{۹۵}{۱۰۰}\times\frac{۱۲۰}{۱۰۰}P_t = \frac{۱۱۴}{۱۰۰}P_t$$

ملاحظه می‌شود که سود فروش این کالا برابر با ۱۴ درصد قیمت تمام شده‌ی کالا است.

۱۳۸– گزینه‌ی «۱»

(معادلات جبری)

حجم مکعب را $V_۱$، حجم کره را $V_۲$ و حجم استوانه را $V_۳$ درنظر می‌گیریم. آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} ۲V_۱+۳V_۲=۲V_۳ \Rightarrow V_۱=V_۳-\frac{۳}{۲}V_۲ \quad * \\ ۳V_۱+۷V_۲=۵V_۳ \quad ** \end{cases}$$

با جاگذاری * در ** داریم:

$$۳V_۳-\frac{۹}{۲}V_۲+۷V_۲=۵V_۳ \Rightarrow \frac{۵}{۲}V_۲=۲V_۳$$

$$\Rightarrow \frac{V_۳}{V_۲}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

۱۳۹– گزینه‌ی «۲»

(معادلات جبری)

عرض مستطیل را a و طول آن را b درنظر می‌گیریم. طبق صورت سؤال $b=۳a$ می‌باشد. پس از افزودن ۶ واحد به ابعاد مستطیل، عرض مستطیل معادل $a+۶$ و طول مستطیل معادل $۳a+۶$ خواهد بود. آن‌گاه در محاسبه‌ی مساحت مستطیل داریم:

$$S_{\text{مستطیل جدید}}=S_{\text{مستطیل قدیم}}+۲۵۲$$

$$\Rightarrow (b+۶)(a+۶)=ba+۲۵۲$$

$$\Rightarrow (۳a+۶)(a+۶)=۳a^۲+۲۵۲$$

$$\Rightarrow \cancel{۳a^۲}+۱۸a+۶a+۳۶=\cancel{۳a^۲}+۲۵۲ \Rightarrow ۲۴a=۲۱۶$$

$$\Rightarrow a=۹, b=۲۷$$

$$\Rightarrow S_{\text{اولیه}}=۹\times۲۷=۲۴۳$$

۱۴۰– گزینه‌ی «۳»

(محاسبات عددی)

$$V=۴\times۱۰\times۱۲\ m^۳=۴۸\times۱۰^۷\ cm^۳$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا نصف آب استخر تخلیه شود معادل است با:

$$t=\frac{۲۴\times۱۰^۷}{۵۰}=۴/۸\times۱۰^۶\ s$$

عدد به‌دست آمده بر حسب ثانیه است و برای این‌که بر حسب شبانه‌روز محاسبه شود، باید آن را بر عدد ۲۴×۳۶۰۰ تقسیم کرد.

$$t=\frac{۴/۸\times۱۰^۶\ s}{۲۴\times۳۶۰۰}=\frac{۱۰۰۰}{۱۸}=۵۵/۵۵...$$

ملاحظه می‌شود که آب استخر طی مدت ...۵۵/۵۵ شبانه‌روز تخلیه می‌شود. در نتیجه در میانه‌ی روز ۵۶ام آب استخر نصف می‌شود.

۱۴۱– گزینه‌ی «۳»

(قضیه تالس)

مطابق قضیه‌ی تالس داریم:

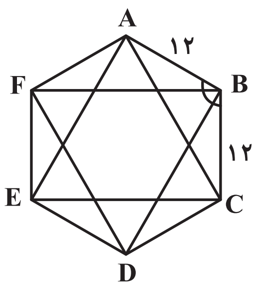
$$\frac{۵}{x}=\frac{۲x+۳}{۴} \Rightarrow ۲۰=۲x^۲+۳x \Rightarrow ۲x^۲+۳x-۲۰=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۳^۲-۴(۲)(-۲۰)=۹+۱۶۰=۱۶۹ \Rightarrow x=\frac{-۳\pm۱۳}{۴}$$

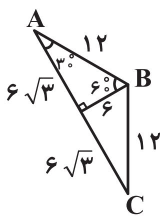
$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱=۲/۵ \\ x_۲=-۴ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۴۲– گزینه‌ی «۴»

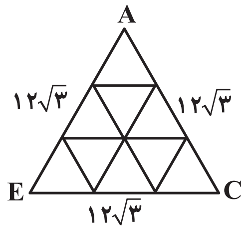
(هندسه مسطحه)



در مثلث ABC زاویه‌ی B همان زاویه‌ی شش‌ضلعی منتظم است. در نتیجه معادل ۱۲۰ درجه می‌باشد. از آن‌جا که ضلع AB و BC هر دو معادل ۱۲ واحد می‌باشد، با رسم ارتفاع وارد بر قاعده در این مثلث متساوی‌الساقین، دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° تشکیل خواهد شد. می‌دانیم در چنین مثلث قائم‌الزاویه‌ای ضلع روبه‌روی زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر و ضلع روبه‌روی زاویه‌ی ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است. بنابراین داریم:



ملاحظه می‌شود که طول پاره‌خط AC برابر $۱۲\sqrt{۳}$ است. به طریق مشابه طول پاره‌خط CE و AE نیز برابر همین مقدار می‌باشد. در نتیجه در مثلث متساوی‌الاضلاع ACE داریم:



$$S_{\text{شش‌ضلعی منتظم کوچک}} = \frac{۶}{۹} S_{ACE} = \frac{۶}{۹} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} (۱۲\sqrt{۳})^{۲}$$

$$= \frac{۲}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۱۴۴ \times ۳ = ۷۲\sqrt{۳}$$

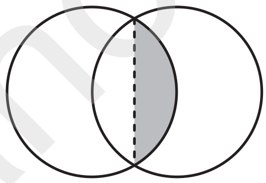
$$S_{\text{شش‌ضلعی منتظم بزرگ}} = ۶\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۲)^{۲} = \frac{۶\sqrt{۳}}{۴} \times ۱۴۴ = ۲۱۶\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{ناحیه‌ی محدود بین دو شش‌ضلعی}} = ۲۱۶\sqrt{۳} - ۷۲\sqrt{۳} = ۱۴۴\sqrt{۳}$$

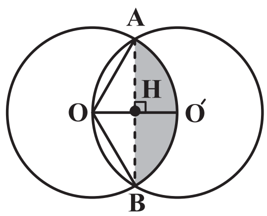
۱۴۳– گزینه‌ی «؟؟»

(*هندسه مسطحه*)

ابتدا مساحت ناحیه‌ی مشترک بین دو دایره را محاسبه می‌کنیم.



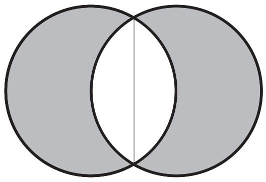
در صورتی که وتر مشترک دو دایره رسم شود دو هلال مساوی ایجاد می‌گردد که در شکل فوق یکی از هلال‌ها رنگی شده است.
مساحت هلال به‌صورت تفاضل مساحت یک مثلث از مساحت یک قطاع دایره محاسبه می‌شود.



مطابق شکل طول پاره‌خط‌های OA، OB و OO' برابر شعاع دایره و معادل یک واحد می‌باشد. در نتیجه مثلث AOO' یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد که هر زاویه‌ی آن برابر ۶۰° است.
بنابراین زاویه‌ی O برابر ۱۲۰° است و قطاع $OAO'B$ یک سوم سطح دایره می‌باشد.
مساحت هلال $ABO'A$ به‌صورت تفاضل مثلث OAB از قطاع $OAO'B$ محاسبه می‌شود.

$$S_{\text{هلال}} = \frac{۱}{۳}\pi(۱)^{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱)^{۲} = \frac{\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{\text{ناحیه‌ی محدود بین دو دایره}} = ۲ \times S_{\text{هلال}} = \frac{۲\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده به‌صورت دو برابر تفاضل مساحت ناحیه‌ی محدود بین دو دایره از مساحت هر یک از دایره‌ها محاسبه می‌شود.

$$S_{\text{هر دایره}} = \pi$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}} = ۲ \times (\pi - \frac{۲\pi}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}) = ۲ \times (\frac{\pi}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$= \frac{۲\pi}{۳} + \sqrt{۳}$$

۱۴۴– گزینه‌ی «۳»

(*هندسه فضایی*)

مطابق شکل، ۱۲ پاره‌خط همان یال‌های مکعب هستند و قطر هر کدام از ۶ وجه مکعب نیز رسم شده است. در نتیجه در مجموع ۱۸ پاره‌خط در شکل مشاهده می‌شود.

۱۴۵– گزینه‌ی «۲»

(*هندسه مسطحه*)

مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده به‌صورت تفاضل مساحت نیم‌دایره‌ی بزرگ از مجموع مساحت‌های دو نیم‌دایره‌ی دیگر و مثلث قائم‌الزاویه محاسبه می‌شود.

$$\text{وتر مثلث قائم‌الزاویه} = \sqrt{۲^{۲} + ۳^{۲}} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع نیم‌دایره‌ی بزرگ} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$S_{\text{مثلث قائم‌الزاویه}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۳ = ۳$$

$$S_{\text{نیم‌دایره‌ی بزرگ}} = \frac{۱}{۲}\pi(\frac{\sqrt{۱۳}}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۲}\pi\frac{۱۳}{۴} = \frac{۱۳}{۸}\pi$$

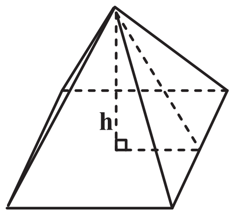
$$S_{\text{نیم‌دایره‌ی کوچک}} = \frac{۱}{۲}\pi(\frac{۲}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۲}\pi \times ۱ = \frac{۱}{۲}\pi$$

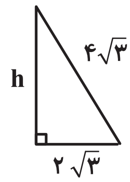
$$S_{\text{نیم‌دایره‌ی متوسط}} = \frac{۱}{۲}\pi(\frac{۳}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۲}\pi \times \frac{۹}{۴} = \frac{۹}{۸}\pi$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = \frac{۱}{۲}\pi + \frac{۹}{۸}\pi + ۳ - \frac{۱۳}{۸}\pi = ۳$$

۱۴۶- گزینه‌ی «۲»

(احجام هندسی)





ارتفاع هرم را رسم می‌کنیم. مطابق شکل یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌شود که وتر آن همان ارتفاع وجه جانبی هرم است. طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

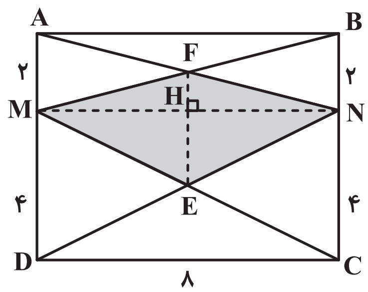
$$h^{۲}=(۴\sqrt{۳})^{۲}-(۲\sqrt{۳})^{۲}=۱۶\times۳-۴\times۳=۳۶$$

$$\Rightarrow h=\sqrt{۳۶}=۶$$

$$V_{\text{هرم}}=\frac{۱}{۳}S\times h=\frac{۱}{۳}(۴\sqrt{۳})^{۲}\times۶=۹۶$$

۱۴۷- گزینه‌ی «۳»

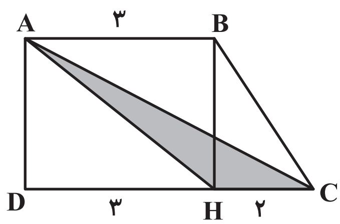
(هندسه مسطحه)



$$S_{MENF}=S_{MNF}+S_{MNE}=\frac{۱}{۲}\times۸\times۱+\frac{۱}{۲}\times۸\times۲=۱۲$$

۱۴۸- گزینه‌ی «۲»

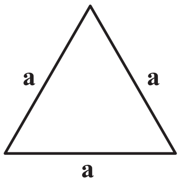
(هندسه مسطحه)

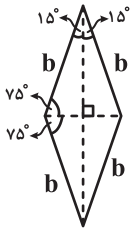


$$\frac{S_{AHC}}{S_{ABHD}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times AD\times۲}{AD\times۳}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴۹- گزینه‌ی «۱»

(هندسه مسطحه)

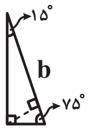




طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a و طول ضلع لوزی را b درنظر می‌گیریم. از آن‌جا که محیط مثلث با محیط لوزی برابر است داریم:

$$۳a=۴b\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۳}{۴}$$

مساحت لوزی را به‌صورت ۴ برابر مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم.



در مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی ۱۵°، ارتفاع وارد بر وتر معادل $\frac{۱}{۴}$ وتر می‌باشد. در نتیجه مساحت لوزی برابر است با:

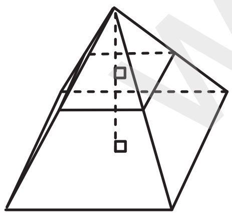
$$S_{\text{لوزی}}=۴\times\frac{۱}{۲}b\times\frac{b}{۴}=\frac{b^{۲}}{۲}$$

$$\frac{S_{\text{لوزی}}}{S_{\text{مثلث}}}=\frac{\frac{b^{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\frac{b^{۲}}{a^{۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{۹}{۱۶}=$$

$$\frac{۹}{۸\sqrt{۳}}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۸\times۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$$

۱۵۰- گزینه‌ی «۴»

(احجام هندسی و تشابه)



از آن‌جا که صفحه به‌صورت موازی هرم را قطع کرده است، در نتیجه هرم کوچک و هرم بزرگ متشابه می‌باشند به‌طوری که نسبت تشابه آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین نسبت حجم هرم کوچک به هرم بزرگ برابر $\frac{۱}{۸}$ و نسبت حجم قطعه‌ی بزرگ‌تر به هرم بزرگ برابر $\frac{۷}{۸}$ است.

۱۵۱- گزینه‌ی «۲»

(هندسه‌ی مسطحه)

در شکل ۶ شش‌ضلعی منتظم کوچک مشاهده می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\frac{\text{شش‌ضلعی‌های منتظم داخل شکل}\;۶\times S}{\text{کل شکل}\;S}=\frac{۶\times۶\times S_{\text{مثلث کوچک}}}{۲۲\times S_{\text{مثلث کوچک}}}=\frac{۳۶}{۲۲}=\frac{۱۸}{۱۱}$$

۱۵۲- گزینه‌ی «۱»

(هوش و خلاقیت)

۸ مکعب کوچکی که در ۸ گوشه‌ی مکعب واقع شده‌اند همان مکعب‌هایی می‌باشند که سه وجه آن‌ها رنگ‌آمیزی می‌شود. از طرفی در هر وجه مکعب نیز یک مکعب مرکزی وجود دارد که فقط یک وجه آن‌ها رنگ‌آمیزی می‌شود. به این ترتیب تعداد مکعب‌هایی که فقط یک وجه آن‌ها رنگ‌آمیزی می‌شود به تعداد وجوه مکعب است که ۶ می‌باشد. بنابراین نسبت مطلوب به صورت $\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$ محاسبه می‌شود.

۱۵۳- گزینه‌ی «۴»

(هوش و خلاقیت)

در شکل هشت مربع ۱×۱، سه مربع ۲×۲، دو مربع ۳×۳، چهار مربعی که در چهار گوشه مربع بزرگ قرار گرفته‌اند و همچنین یک مربع بزرگ دیده می‌شود. بنابراین تعداد مربع‌ها برابر است با:

$$۸+۳+۲+۴+۱=۱۸$$

۱۵۴- گزینه‌ی «۴»

(تقارن)

در مرکز شکل یک هشت ضلعی منتظم مشاهده می‌شود که هشت محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد. از آن‌جا که سایر اجزای شکل به‌صورت متقارن و متوازن حول مرکز تقارن هشت ضلعی منتظم قرار گرفته‌اند پس شکل نهایی نیز دارای هشت محور تقارن و یک مرکز تقارن است.

۱۵۵- گزینه‌ی «۳»

(هوش و خلاقیت)

شکل از ۵ مثلث مجزا، یک ۱۰ ضلعی منتظم، یک ستاره‌ی ۵ پر و یک دایره تشکیل شده است.

۱۵۶- گزینه‌ی «۱»

(فیزیک - واحدها)

واحد نجومی همان فاصله‌ی سیاره‌ی زمین تا خورشید است.

۱۵۷- گزینه‌ی «۴»

(فیزیک — عدسی‌ها)

هر عدسی دو کانون دارد که فاصله‌ی آن‌ها تا وسط عدسی را فاصله‌ی کانونی می‌نامند.

۱۵۸- گزینه‌ی «۲»

(فیزیک — حرکت)

$$v_۱=۳۶\frac{km}{h}=۳۶\times\frac{۱۰}{۳۶}=۱۰\frac{m}{s}$$

$$v_۲=۱۰۸\frac{km}{h}=۱۰۸\times\frac{۱۰}{۳۶}=۳۰\frac{m}{s}$$

$$\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۳۰-۱۰}{۵}=۴$$

۱۵۹- گزینه‌ی «۳»

(فیزیک — نیرو)

از آن‌جا که $BC=۷AB$ است. بنابراین قطعه‌ی AB، $\frac{۱}{۸}$ جرم میله و قطعه‌ی BC، $\frac{۷}{۸}$ جرم میله را به خود اختصاص داده‌اند. با توجه به این‌که اهرم در وضعیت تعادل قرار دارد، می‌توان نوشت:

بازوی مقاوم × نیروی مقاوم = بازوی محرک × نیروی محرک

$$\Rightarrow (m+\frac{۲}{۸})\times AB=\frac{۱۴}{۸}\times BC\Rightarrow (m+\frac{۲}{۸})\times ۱=\frac{۱۴}{۸}\times ۷$$

$$\Rightarrow m+\frac{۲}{۸}=\frac{۹۸}{۸}\Rightarrow m=\frac{۹۶}{۸}=۱۲\ kg$$

۱۶۰- گزینه‌ی «۴»

(فیزیک — قوانین نیوتون)

از آن‌جا که در هر دو حالت نیروی خالص وارد بر جسم ثابت است در نتیجه مطابق قانون دوم نیوتون داریم:

$$m_۱a_۱=m_۲a_۲\Rightarrow ۴m_۱=۵(m_۱-۰/۲)$$

$$\Rightarrow ۴m_۱=۵m_۱-۱\Rightarrow m_۱=۱$$

$$\Rightarrow F=m_۱a_۱=۱\times۴=۴\ N$$