سؤال ۱۴۱- گزینهٔ «۱»

زاویه‌ای که یک بردار با محور z ها می‌سازد، در واقع همان زاویه‌ای است که با بردار یکهٔ این محور یعنی بردار $\vec{k}=(0,0,1)$ ایجاد می‌کند، بنابراین داریم:

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\,|\vec{k}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2+\alpha^2}\times 1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2+\alpha^2}$$

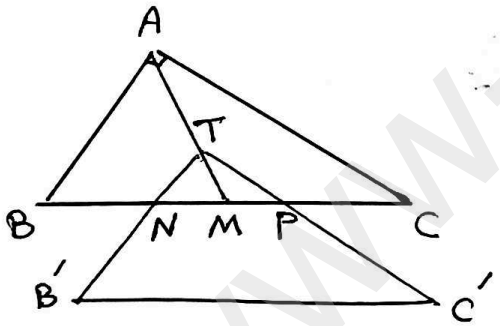
$$\Rightarrow 2+\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(-1,0,1)\\ \vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

اگر θ زاویهٔ بین بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ و محور z ها (بردار $\vec{k}$) باشد، آنگاه داریم:

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{k}}{|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{k}|} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}\times 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

سؤال ۱۴۲- گزینهٔ «۱»



مطابق شکل دو مثلث ABC و TNP متشابه‌اند. از طرفی نسبت میانه‌ها در دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه دو مثلث است، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{TNP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{TM}{AM} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AT}{AM} = \frac{3}{4} \Rightarrow AT = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}BC = \frac{3}{8}\times 8 = 3$$

تذکر: AM میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و طول آن برابر نصف طول وتر است.

www.kanoon.ir

سؤال ۱۴۳ - گزینهٔ «۱»

$$\text{سطر سوم ماتریس } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 11 & -3 \\ 2 & 8 & 2 \\ 9 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 7 + 1 - 5 = 3$$

سؤال ۱۴۴ - گزینهٔ «۴»

نکته: ماتریس A^T (ترانهادهٔ ماتریس A)، ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون‌های ماتریس A حاصل می‌شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B A^T A = 52 I \Rightarrow B \times \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 52 I \Rightarrow B \ \frac{1}{52} \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = I$$

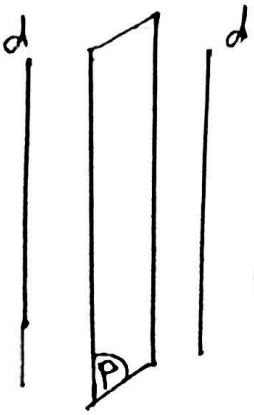
بنابراین ماتریس B، وارون ماتریس $\frac{1}{52}\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ است و در نتیجه داریم:

$$B = 52 \times \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیمم درایه‌های ماتریس B، برابر ۲۸ است.

تذکر: وارون ماتریس kA به صورت $\frac{1}{k} A^{-1}$ است.

سؤال ۱۴۵ - گزینهٔ «۳»



مجموعهٔ نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، روی صفحه‌ای که موازی این دو خط و دقیقاً وسط آن دو خط واقع است قرار دارند، بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» نادرست است. همچنین مجموعهٔ نقاطی از فضا که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت در فضا به یک اندازه باشد، یک شکل فضایی شبیه بیضی (بیضی‌گون) نه خود بیضی است.

www.kanoon.ir

سؤال ۱۴۶ - گزینهٔ «۲»

$$(x-1)^2-12y=6 \Rightarrow (x-1)^2=12y+6 \Rightarrow (x-1)^2=12\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

سهمی رو به بالا باز می‌شود و $F(1,-\frac{1}{2})$ رأس و $a=3$ فاصلهٔ کانونی آن است.

مختصات کانون این سهمی برابر است با:

$$F'\left(1,-\frac{1}{2}+3\right)=\left(1,\frac{5}{2}\right)$$

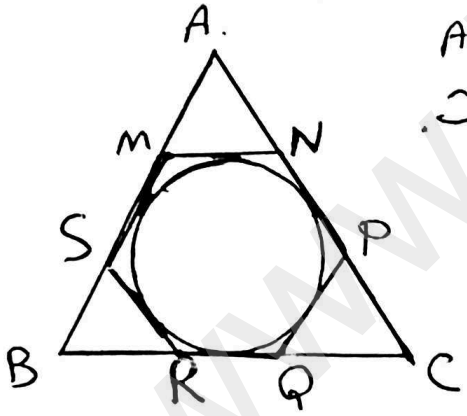
اگر نقاط F و F' کانون‌های یک بیضی باشند، آن‌گاه نقطهٔ O' (مرکز بیضی) دقیقاً وسط آن دو قرار دارد، بنابراین داریم:

$$O'=\frac{F+F'}{2}=(1,1)$$

فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

سؤال ۱۴۷ - گزینهٔ «۲»



مطابق شکل شش‌ضلعی MNPQRS که درون مثلث ABC محاط شده است، بر دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث، مماس است. بنابراین کافی است شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را محاسبه کرده و سپس طول هر ضلع شش‌ضلعی منتظم محیطی این دایره را به دست آوریم.

$$P=\frac{13+14+15}{2}=21$$

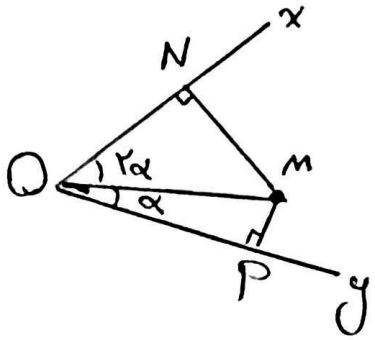
$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{21\times 8\times 7\times 6}=84$$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{84}{21}=4$$

$$MN=2r\tan\frac{180^\circ}{6}=2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

www.kanoon.ir

سؤال ۱۴۸ - گزینهٔ «۴»



مطابق شکل اگر $M\hat{O}y=\alpha$ باشد، آنگاه $x\hat{O}M=2\alpha$ است

و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{OMN}: \sin 2\alpha = \dfrac{MN}{OM} \\ \overset{\triangle}{OMP}: \sin\alpha = \dfrac{MP}{OM} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{MP}{OM}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$$

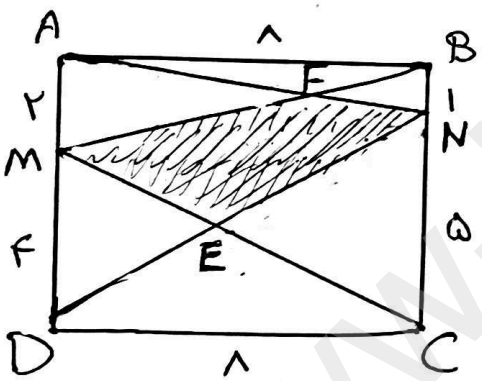
$$\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha \quad (1)$$

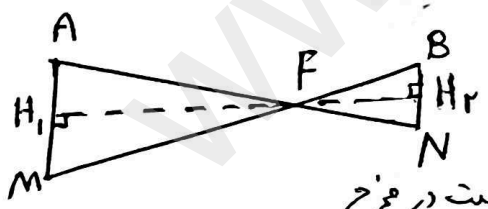
از طرفی در مثلث OMP داریم:

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OM} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2OP}{OM}$$

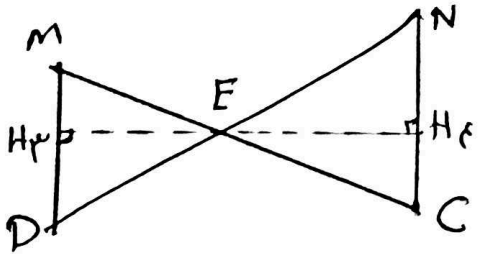
سؤال ۱۴۹ - گزینهٔ «۱»





$$\overset{\triangle}{AFM} \sim \overset{\triangle}{BFN} \Rightarrow \frac{FH_1}{FH_2} = \frac{AM}{BN} = \frac{2}{1}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{FH_1}{H_1H_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow FH_1 = \frac{2}{3}\times 8 = \frac{16}{3}$$



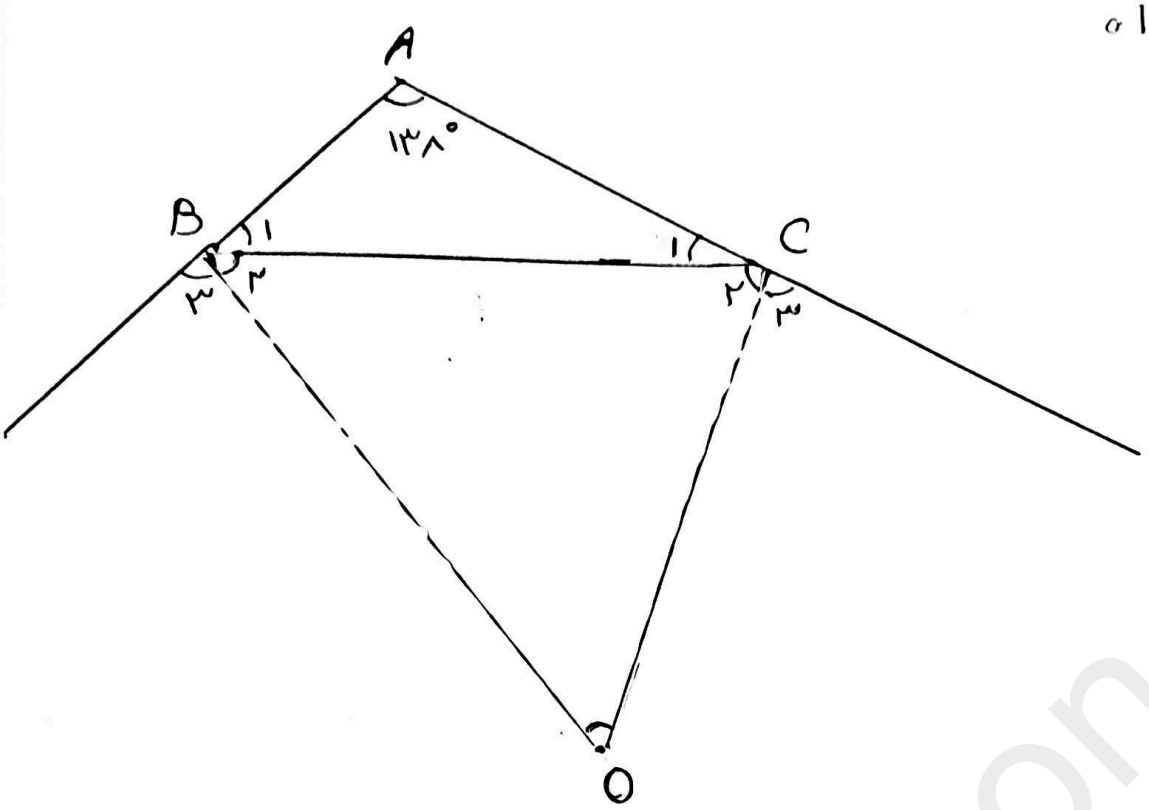
$$\overset{\triangle}{MED} \sim \overset{\triangle}{NEC} \Rightarrow \frac{EH_3}{EH_4} = \frac{MD}{NC} = \frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{EH_3}{H_3H_4} = \frac{4}{9} \Rightarrow EH_3 = \frac{4}{9}\times 8 = \frac{32}{9}$$

$$S_{MFNE} = S_{AND} - (S_{AFM} + S_{MED}) = \frac{1}{2}\times 8\times 6 - \left(\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times 2 + \frac{1}{2}\times\frac{32}{9}\times 4\right)$$
$$= 24 - \left(\frac{16}{3} + \frac{64}{9}\right) = \frac{104}{9}$$

www.kanoon.ir

سؤال ۱۵۰ - گزینهٔ «۱»

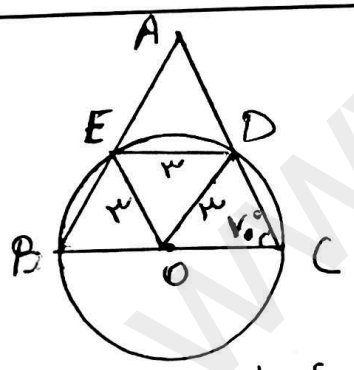


$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ \Rightarrow (\hat{B}_2 + \hat{B}_3) + (\hat{C}_2 + \hat{C}_3) = 360^\circ - 42^\circ$

$\Rightarrow 2\hat{B}_2 + 2\hat{C}_2 = 318^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 159^\circ$

$\Rightarrow \hat{O} = 180^\circ - 159^\circ = 21^\circ$

سؤال ۱۵۱ - گزینهٔ «۳»



مطابق شکل شعاع های OD و OE را رسم می‌کنیم.

مثلث ODE متساوی الاضلاع است، پس $D\hat{O}E = 60^\circ$

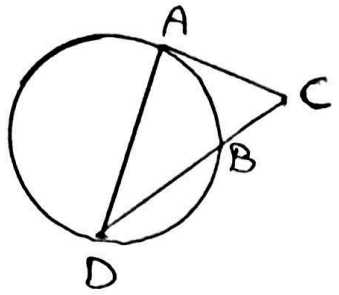
و در نتیجه $\overset{\frown}{DE} = 60^\circ$ است.

$\hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{ED}}{2} \Rightarrow 70^\circ = \dfrac{\overset{\frown}{BE} + 60^\circ}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = 80^\circ$ (زاویهٔ محاطی)

$\overset{\frown}{EDC} = 180^\circ - \overset{\frown}{BE} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

www-kanoon-ir

سؤال ۱۵۲ - گزینهٔ «۳»



طبق روابط طولی در دایره داریم:

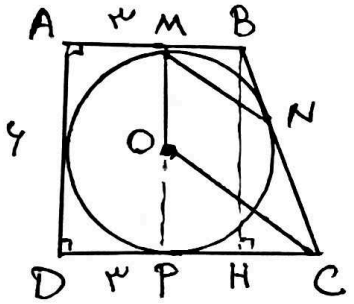
$$CA^2 = CB \times CD \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{CB + BD}{CA} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{CB}{CA} + \frac{BD}{CA} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{BD}{CA} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\frac{BD}{CA}}{\frac{BC}{CA}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = 2$$

سؤال ۱۵۳ - گزینهٔ «۱»



از نقطهٔ B، عمود BH را بر ضلع CD رسم می‌کنیم.

زاویهٔ C مکمل زاویهٔ B و برابر ۶۰° است، پس داریم:

$$\overset{\triangle}{BCH}: \sin 60^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$$

$$\overset{\triangle}{BCH}: \cos 60^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{4\sqrt{3}} \Rightarrow CH = 2\sqrt{3}$$

چهارضلعی ABCD محیطی است، بنابراین داریم:

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow 2AB + CH = AD + BC$$

$$\Rightarrow 2AB + 2\sqrt{3} = 6 + 4\sqrt{3} \Rightarrow 2AB = 6 + 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 3 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BM = BN = \sqrt{3}$$

$$S_{OMNC} = S_{ABCD} - (S_{AMPD} + S_{OPC} + S_{BMN})$$

$$= \frac{1}{2} \times 6(6 + 4\sqrt{3}) - \left(3 \times 6 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \underbrace{\sin 120^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= 18 + 12\sqrt{3} - \left(18 + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = 12\sqrt{3} - \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

www-kanoon-ir

سؤال ۱۵۴- گزینهٔ «۴»

مرکز دایره محل تلاقی قطرهای دایره است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره}: O(2,-1)$$

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر طول شعاع دایره است.

$$R = \frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

اگر فاصلهٔ نقطهٔ M از مرکز دایره را با d نمایش دهیم، آن‌گاه نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ M از نقاط واقع بر دایره برابر $|d-R|$ است، بنابراین داریم:

$$d = OM = \sqrt{(4-2)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

$$|d-R| = \sqrt{5}-2$$

سؤال ۱۵۵- گزینهٔ «۱»

اگر دو دایره تنها یک مماس مشترک داشته باشند، آن‌گاه حتماً مماس داخل هستند.

اگر شعاع‌های دو دایره را با R و R′ و طول خط المرکزین دو دایره را با d نمایش دهیم، داریم:

$$|R-R'| = d \Rightarrow |(a^2-2)-(6a-1)| = 6$$

$$\Rightarrow |a^2-6a-1| = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-6a-1=6 \Rightarrow a^2-6a-7=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=7 \end{cases} \\ a^2-6a-1=-6 \Rightarrow a^2-6a+5=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{میانگین مقادیر } a = \frac{-1+7+1+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$