

"به نام آنکه جان را فکرت آموخت"

تحلیل و بررسی سوالات درس ریاضی کنکور تجربی ۱۴۰۰

۱۲۶- فرض کنید $a = \sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b = \sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$. مقدار $(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2$ کدام است؟

- (۱) $4(2 + \sqrt{3})$ (۲) $4(2 - \sqrt{3})$ (۳) $16(2 + \sqrt{3})$ (۴) $16(2 - \sqrt{3})$

✓ گزینه ۴ - سطح سوال متوسط

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 &= ((a-b)^2)^2 ((a+b)^2)^2 = ((a^2 - b^2)^2)^2 \\ &= ((\sqrt{6}-2 - \sqrt{6}+2)^2)^2 = \left(\sqrt{6}+2 + \sqrt{6}-2 - 2\left(\sqrt{\sqrt{6}^2 - 2^2}\right) \right)^2 \\ &= (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 = 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 4(6 - 2\sqrt{12} + 2) = 4(8 - 4\sqrt{3}) = 16(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

۱۲۷- فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $2\sqrt[3]{x} = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1)$ باشند. مقدار $x_1 + x_2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

✓ گزینه ۴ - سطح سوال دشوار

$$\sqrt[3]{x^2} = A \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt{A}$$

$$\left(A + \frac{1}{A} + 1\right)(A - 1) = \sqrt{A} \Rightarrow A^2 - A + 1 - \frac{1}{A} + A - 1 = A^2 - \frac{1}{A} = 2\sqrt{A} \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A}$$

$$A^3 - 1 = 2A\sqrt{A} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} A^3 - 2A^{1.5} - 1 = 0 \quad A^{1.5} = T$$

$$T^2 - 2T - 1 = 0 \xrightarrow{\text{حل به روش دلتا بزرگ}} T = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$A^{1.5} = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x \Rightarrow T = x \xrightarrow{\text{پس داریم}} x_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{و} \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

۱۲۸- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x = 5$ باشند. $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟

$$125x^2 = 16x + 1 \quad (۲)$$

$$125x^2 + 16x = 1 \quad (۱)$$

$$125x^2 + 12x = 1 \quad (۴)$$

$$125x^2 = 12x + 1 \quad (۳)$$

✓ گزینه ۱ - سطح سوال دشوار

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow S = -1, P = -5$$

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P, \quad x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$$

$$S' = \frac{1}{(x_1+1)^3} + \frac{1}{(x_2+1)^3} = \frac{(x_1+1)^3 + (x_2+1)^3}{(x_1+1)^3 \times (x_2+1)^3}$$

$$= \frac{(x_1^3 + 3x_1^2 + 3x_1 + 1) + (x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1)}{(x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1)^3}$$

$$= \frac{(x_1^3 + x_2^3 + 3(x_1^2 + x_2^2) + 3(x_1 + x_2) + 2)}{(S + P + 1)^3} = \frac{S^3 - 3PS + 3(S^2 - 2P) + 3S + 2}{-5^3}$$

$$= \frac{-1 - 15 + 33 - 3 + 2}{-125} \Rightarrow S' = \frac{-16}{125}$$

$$P' = \frac{1}{(x_1+1)^3} \times \frac{1}{(x_2+1)^3} = \frac{1}{(x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1)^3} \Rightarrow P' = \frac{-1}{125}$$

معادله جدید: $x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0$

طرفین ضرب در ۱۲۵
 $\Rightarrow 125x^2 + 16x - 1 = 0$

۱۲۹- اگر $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ ، کدام است؟

$$\frac{6+3\sqrt{3}}{16} \quad (4)$$

$$\frac{6+\sqrt{3}}{16} \quad (3)$$

$$\frac{6-\sqrt{3}}{16} \quad (2)$$

$$\frac{6-3\sqrt{3}}{16} \quad (1)$$

✓ گزینه ۴ - سطح سوال متوسط

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \cos^2(15^\circ) \cos^2(30^\circ) \cos^2(60^\circ) \cos^2(120^\circ)$$

$$= 16 \cos^2(15^\circ) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Rightarrow \cos(30^\circ) = 2 \times \cos^2(15^\circ) - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times \cos^2(15^\circ) - 1$$

$$\cos^2(15^\circ) = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \times \frac{1}{2}$$

پس داریم
 $\Rightarrow 16 \times \frac{\sqrt{3}+2}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

۱۳۰- اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{96}{175}$ (۲) $\frac{1056}{175}$ (۳) $\frac{96}{175}$ (۴) $-\frac{1056}{175}$

✓ گزینه ۲ - سطح سوال متوسط

$$= (\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + \cos(\pi + \alpha)) \times \tan(2\alpha) = (\sin(2\alpha) - \cos(\alpha)) \times \tan(2\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} \Rightarrow \tan(2\alpha) = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{12}{7}$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Rightarrow \cos(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(\alpha)}} \Rightarrow \cos(\alpha) = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{16}}}$$

چون α در ناحیه سوم مثلثاتی است $\frac{4}{5}$

$$\cos(\alpha) = \pm \frac{4}{5} \Rightarrow \cos(\alpha) = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} \Rightarrow \sin(2\alpha) = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = \frac{24}{25}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{24}{25} - -\frac{4}{5}\right) \times \frac{12}{7} = \frac{44}{25} \times \frac{12}{7} = \frac{1056}{175}$$

۱۳۱- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

✓ گزینه ۳ - سطح سوال متوسط

$$1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1 \Rightarrow \sin^2(x) + \sin^2(x) \cos(3x) = 0$$

$$\sin^2(x) \times (\cos(3x) + 1) = 0 \Rightarrow \sin^2(x) = 0 \text{ یا } \cos(3x) = -1$$

در بازه $[0, 2\pi]$

$$\sin^2(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

در بازه $[0, 2\pi]$

$$\cos(3x) = \cos(\pi) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

۱۳۲- دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\log_2(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ ، کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
 (۲) $(-1, 2)$
 (۳) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
 (۴) $(-2, 1)$

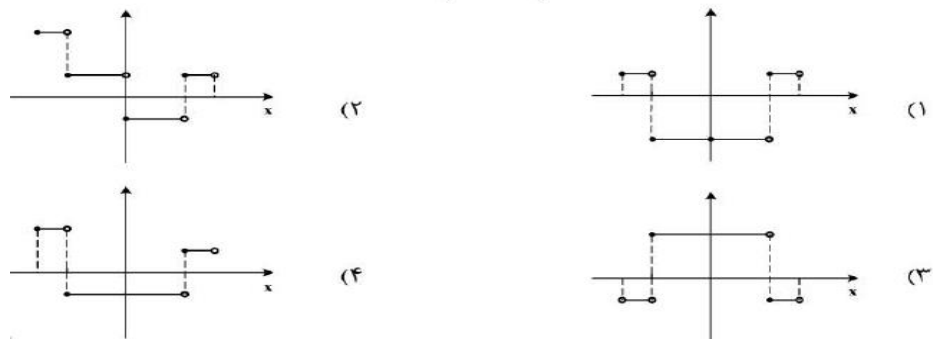
✓ گزینه ۱ - سطح سوال ساده

پس $x > 2$ یا $x < -1$ (I) $\Rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \xRightarrow{\text{در نتیجه}} x^2 - x - 2 > 0$

در نتیجه $x \geq 1$ یا $x \leq -1$ (II) $\Rightarrow x^2 - 1 \geq 0$

$(I) \cap (II) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

۱۳۳- نمودار تابع $y = 2||3x|| - 1$ به ازای $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$ ، کدام است؟



✓ گزینه ۲ - سطح سوال متوسط

نمودار تابع را در حوالی نقطه صفر بررسی میکنیم.

پس $y = -1 \Rightarrow y = 2||3x|| - 1 \Rightarrow y = 2||\cdot^+|| - 1 \Rightarrow y = 2[3 \times \cdot^+] - 1 \Rightarrow y = 6 \cdot^+ - 1 \Rightarrow \cdot^+ = 0 \Rightarrow x \rightarrow \cdot^+$ (گزینه ۳ حذف)

پس $y = +1 \Rightarrow y = 2||\cdot^-|| - 1 \Rightarrow y = 2||\cdot^-|| - 1 \Rightarrow y = 2[3 \times \cdot^-] - 1 \Rightarrow y = 6 \cdot^- - 1 \Rightarrow \cdot^- = 2/3 \Rightarrow x \rightarrow \cdot^-$ (گزینه های ۱ و ۴ حذف)

۱۳۴- فاصله نقطه تلاقی منحنی های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{15}$

✓ گزینه ۴ - سطح سوال متوسط

$$y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{x^2}{4} + 3} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - 3} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 = \frac{x^2}{4} + 3 + \frac{x^2}{4} - 3 - 2\sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + 3\right) \times \left(\frac{x^2}{4} - 3\right)}$$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 - 2\sqrt{\frac{x^4}{4} - 9} \Rightarrow x^2 = x^2 - 2\sqrt{\frac{x^4}{4} - 9}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{\frac{x^4}{4} - 9} = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{4} - 9 = 0 \Rightarrow x^4 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}, y = 3$$

$$O(0,0) \text{ و } A(3, \pm\sqrt{6}) \Rightarrow AO = \sqrt{(0-3)^2 + (0 - (\pm\sqrt{6}))^2} \Rightarrow AO = \sqrt{9+6} = \sqrt{15}$$

۱۳۵- اگر $\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = 52$ باشد، مقدار x کدام است؟

۴ (۴)
۳ (۳)
۲ (۲)
۱ (۱)

✓ گزینه ۲ - سطح سوال متوسط

$$\frac{3^x (1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5)}{2^{x-2} (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)} = 52 \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \frac{3^x \times 364}{2^{x-2} \times 63} = 52$$

$$\frac{3^x}{2^{x-2} \times 9} = 1 \Rightarrow \frac{3^{x-2}}{2^{x-2}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

۱۳۶- نمودار تابع $y = 2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{\pi}{4}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ ، کدام است؟

۴ (۴)
۲ (۳)
۱ (۲)
صفر (۱)

✓ گزینه ۳ - سطح سوال دشوار

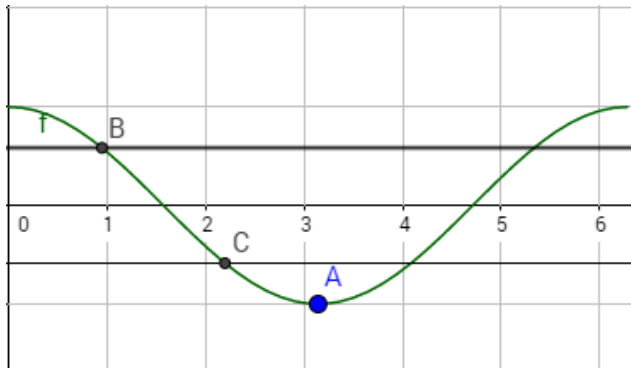
$$y = 2^{|\sin(x)|} \xrightarrow{\text{در امتداد محور } x \text{ ها در جهت مثبت}} y = 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{4})|} \xrightarrow{\text{در امتداد محور } y \text{ ها در جهت منفی}} y = 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{4})|} - \frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{تقاطع با محور } x \text{ ها}} 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{4})|} - \frac{3}{4} = 0$$

$$2^{|\sin(x - \frac{\pi}{4})|} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| = \log_2 \frac{3}{4} \Rightarrow \left| -\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right| = \log_2 \frac{3}{4}$$

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right| = \log_2 \frac{3}{4} \Rightarrow \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right| = \log_2 \frac{3}{4} \Rightarrow \cos(x) = \pm \log_2 \frac{3}{4}$$

$$2^0 < \frac{3}{4} < 2^1 \xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم در مبنای ۲ می گیریم}} 0 < \log_2 \frac{3}{4} < 1$$



مطابق شکل، تابع $\cos(x)$ در بازه $[0, \pi]$ در یک نقطه با $\log_2 \frac{3}{4} +$ (B) و در یک نقطه با $-\log_2 \frac{3}{4}$ (C) تلاقی میکند.

۱۳۷- اگر تساوی $\log_x y - 2 \log_y x = 1$ به ازای $x, y > 1$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

$xy = 2$ (۴) $y = \sqrt{x}$ (۳) $y = x^2$ (۲) $y = x^{\frac{1}{2}}$ (۱)

✓ گزینه ۱ - سطح سوال متوسط

$$\log_x y = A \xRightarrow{\text{پس}} \log_y x = \frac{1}{A}$$

$$A - \frac{2}{A} - 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A} A^2 - A - 2 = 0 \xRightarrow{\text{پس}} (A - 2)(A + 1) = 0$$

$$\log_x y = 2 \xRightarrow{\text{در نتیجه}} y = x^2$$

$$\log_x y = -1 \xRightarrow{\text{در نتیجه}} y = \frac{1}{x}$$

۱۳۸- مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$ ، کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱ (۲) صفر (۱)

✓ گزینه ۴ - سطح سوال دشوار

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2+x}{x^2+x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2+x}{x^2+x}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2+x^2}} = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$$

۱۳۹- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2\sin x - 1]$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است).

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) وجود ندارد.

✓ گزینه ۱- سطح سوال ساده

وقتی از مقادیر کوچکتر از $\frac{\pi}{6}$ به $\sin(x)$ نزدیک می شویم $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^- \implies \sin(x) \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-$

$$\left[2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^- - 1 \right] = [1^-] - 1 = 0 - 1 = -1$$

۱۴۰- قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور X ها و ۳ واحد در جهت منفی محور Y ها انتقال می دهیم و آن را $y = g(x)$ می نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۴

✓ گزینه ۳- سطح سوال دشوار

قرینه نسبت به خط $y=x$: ضابطه تابع وارون $y = 2 + \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{پس}} \sqrt{x-1} = y - 2 \xrightarrow{\text{پس}} x = (y-2)^2 + 1$
 $f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1$

دامنه تابع اصلی = برد تابع معکوس

$y = 2 + \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{پس}} y \geq 2 \xrightarrow{\text{پس}} Rf = Df^{-1} = [2, +\infty)$

$y = (x-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{۲ واحد در جهت مثبت محور } x \text{ ها}} y = ((x-2)-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{پس}} y = (x-4)^2 + 1$

$\xrightarrow{\text{۳ واحد در جهت منفی محور } y \text{ ها}} y = (x-4)^2 - 2 \xrightarrow{\text{در نتیجه}} g(x) = (x-4)^2 - 2, x \geq 2$

$g(4) = (4-4)^2 - 2 \xrightarrow{\text{پس}} g(4) = -2$

۱۴۱- فرض کنید $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = 1 - x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

✓ گزینه ۳- سطح سوال ساده

$$gof(x) = \begin{cases} 1 & \text{در نتیجه } x^2 - 1 > 0 \implies x > +1 \text{ یا } x < -1 \\ 0 & \text{در نتیجه } x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1 \\ -1 & \text{در نتیجه } x^2 - 1 < 0 \implies -1 < x < +1 \end{cases}$$

$$x \rightarrow 1^- \xRightarrow{\text{پس}} gof(x) = -1, x \rightarrow 1^+ \xRightarrow{\text{پس}} gof(x) = +1, x = 1 \xRightarrow{\text{پس}} gof(1) = 0$$

$$x \rightarrow -1^- \xRightarrow{\text{پس}} gof(x) = +1, x \rightarrow -1^+ \xRightarrow{\text{پس}} gof(x) = -1, x = -1 \xRightarrow{\text{پس}} gof(-1) = 0$$

۱۴۲- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4|$ ، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

✓ گزینه ۲- سطح سوال متوسط

$$x^2 - 1 = 0 \xRightarrow{\text{پس}} x = \pm 1 \quad (\text{در این دو نقطه مشتق وجود ندارد})$$

$$x \geq 2, x \leq -2 \xRightarrow{\text{پس}} f(x) = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 1} \xRightarrow{\text{پس}} f'(x) = \frac{(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - (2x)(x^4 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \xRightarrow{\text{پس صورت مساوی صفر}} 4x^5 - 4x^3 - 8x^3 + 8x - 2x^5 + 8x^3 = 0 \xRightarrow{\text{پس}}$$

$$2x^5 - 4x^3 + 8x = 0 \xRightarrow{\text{پس}} 2x(x^4 - 2x^2 + 4) = 0 \xRightarrow{\text{دلنا عبارت دوم منفی است و ریشه ندارد}} x = 0 \quad \text{غ.ق.ق.}$$

$$-2 \leq x \leq +2 \xRightarrow{\text{پس}} f(x) = \frac{-x^4 + 4x^2}{x^2 - 1} \xRightarrow{\text{پس}} f'(x) = 0 \xRightarrow{\text{پس}} -2x(x^4 - 2x^2 + 4) = 0$$

$$\xRightarrow{\text{دلنا عبارت دوم منفی است و ریشه ندارد}} x = 0$$

۱۴۳- قرینه نقطه A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطه A بین دو طول متوالی از محل بر تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط AA'، کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{8}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

✓ گزینه ۳- سطح سوال متوسط

$$A(x, x^2) \xRightarrow{\text{قرینه نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم}} A'(x^2, x)$$

$$AA' = \sqrt{(x-x^2)^2 + (x^2-x)^2} \Rightarrow AA' = \sqrt{2(x^2-x)^2} = \sqrt{2}|x^2-x|$$

برای آنکه طول AA' ماکزیمم شود پس مشتق AA' باید صفر شود
 $\xrightarrow{\text{پس}} \sqrt{2}(2x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$$AA' = \sqrt{2} \left| \frac{1}{4} - \frac{2}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۴۴- فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{4}])^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. مقدار مشتق تابع $f \circ g$ در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ چند برابر

است؟ $(-128\sqrt{2})$

- (۱) -۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

✓ گزینه ۴- سطح سوال متوسط

$$\left(f \circ g \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) \right)' = g' \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) \times f' \left(g \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) \right)$$

$$g(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3} \times (x^2-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x$$

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{\sqrt{8}}} g'(x) = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{9}{8} - 1 \right)^{-\frac{4}{3}} \times \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3} \times 16 \times \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow g'(x) = -8\sqrt{2}$$

$$g \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) = \left(\frac{9}{8} - 1 \right)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) = 2$$

$$f'(2) \Rightarrow f(x) = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$\frac{\left(f \circ g \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) \right)'}{-128\sqrt{2}} = \frac{-8\sqrt{2} \times 64}{-128\sqrt{2}} = 4$$

۱۴۵- فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$ و $(a \neq 0)$ و $\begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c = a$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

✓ گزینه ۳- سطح سوال دشوار

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq k \\ 2a & x < k \end{cases}$$

پس
شرط اولیه : $b + c = a \Rightarrow b = c - a$ (I)

شرط پیوستگی : $ak^2 + bk + c = 2ak + b$ (II)

شرط مشتق پذیری : $2ak + b = 2a$ (III) $\Rightarrow ak + b = 2a - ak$ (IV)

(I),(III) $\Rightarrow 2ak + b = 2a \Rightarrow 2ak + a - c = 2a \xrightarrow{\text{در نتیجه}} 2ak = a + c$ (V)

(II),(V) $\Rightarrow ak^2 + bk + c = 2ak + b \Rightarrow ak^2 + bk + c = a + b + c$

زدن c ها $\Rightarrow ak^2 + bk = a + b \xrightarrow{\text{همگی یک طرف}} ak^2 + bk - a - b = 0$

پس $\Rightarrow a(k^2 - 1) + b(k - 1) = 0 \xrightarrow{\text{در نتیجه}} (k - 1)(ak + b + a) = 0$

(IV) $\Rightarrow (k - 1)(2a - ak + a) = 0 \Rightarrow (k - 1)(3a - ak) = 0$

نهایتا $\Rightarrow (k - 1)(a)(3 - k) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} k = 1 \text{ یا } k = 3$

۱۴۶- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟

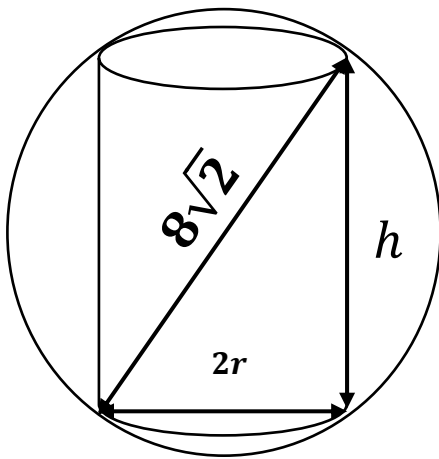
$\frac{512\pi}{3}$ (۴)

$\frac{256\pi}{3}$ (۳)

64π (۲)

32π (۱)

✓ گزینه ۲- سطح سوال دشوار



$$4r^2 + h^2 = 128 \Rightarrow h = \sqrt{128 - 4r^2}$$

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r \times h \Rightarrow S = 2\pi r \times \sqrt{128 - 4r^2}$$

$$S = 2\pi\sqrt{128r^2 - 4r^4}$$

$$S(\text{max}) \xrightarrow{\text{در نتیجه}} S' = 0$$

$$S' = \frac{2\pi(256r - 16r^3)}{2\sqrt{128r^2 - 4r^4}}$$

$$S' = 0 \Rightarrow 16r(16 - r^2) = 0 \Rightarrow r = 4$$

$$S = 8\pi\sqrt{128} - 64 = 64\pi$$

۱۴۷- احتمال این که یک دانش آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد $\frac{5}{9}$ و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد $\frac{85}{9}$ است. اگر دانش آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال این که امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

$$\frac{45}{47} \quad (4)$$

$$\frac{17}{18} \quad (3)$$

$$\frac{85}{94} \quad (2)$$

$$\frac{8}{9} \quad (1)$$

✓ گزینه ۳- سطح سوال دشوار

رخ داد قبولی در امتحان اول = A_1

رخ داد قبولی در امتحان دوم = A_2

رخ داد قبولی در دو امتحان متوالی = $A_1 \cap A_2$

$$P(A_1) = 0.9, \quad P(A_2) = 0.9$$

$$P(A_1 \cap A_2) = 0.85$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{0.85}{0.9} = \frac{17}{18}$$

۱۴۸- فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می توان تشکیل داد، به طوری که مجموع ریشه های هر معادله از حاصل ضرب ریشه های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

$$18 \quad (4)$$

$$16 \quad (3)$$

$$15 \quad (2)$$

$$14 \quad (1)$$

✓ گزینه ۳- سطح سوال دشوار

$$S = P + 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a} + 2 \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \frac{c-b}{a} = 2 \Rightarrow c-b = 2a$$

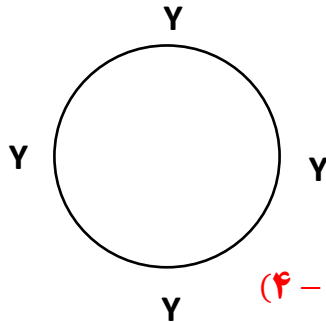
مجموعاً ۱۶ حالت میتوان متصور شد.

| c, b | a |
|-----------------------------|-----|
| ۳,۱/۴,۲/۵,۳/۶,۴/۷,۵/۸,۶/۹,۷ | ۱ |
| ۵,۱/۶,۲/۷,۳/۸,۴/۹,۵ | ۲ |
| ۷,۱/۸,۲/۹,۳ | ۳ |
| ۹,۱ | ۴ |

۱۴۹- در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی‌ها بنشینند، به طوری که در کنار هر دانش آموزی، دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟

۱۴۴ (۱) ۲۸۸ (۲) ۲۷۶ (۳) ۱۱۵۲ (۴)

✓ گزینه ۱- سطح سوال دشوار



تنها حالت قابل فرض یک در میان نشستن دانش آموزان هر گروه است. در ابتدا یازدهمی‌ها (یا دوازدهمی‌ها) به $(4-1)!$ حالت دور میز می‌نشینند. سپس گروه دیگر در ۴ جایگاه ایجاد شده به ۴! حالت می‌نشینند.

$$(4-1)! \times 4! = 144$$

۱۵۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۲) $\frac{13}{21}$ (۱)

✓ گزینه ۲- سطح سوال دشوار

$$n(s) = 5! + \frac{5!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} \Rightarrow n(s) = 325$$

عددی بر ۴ بخش پذیر است که ۲ رقم سمت راستی بر ۲ بخش پذیر باشد.

عدد تک رقمی = ۴

عدد دو رقمی = $12/32/52/24$

عدد سه رقمی = $-12/-32/-52/-24$

$$\text{عدد چهار رقمی} = \overline{12/32/52/24} = \overline{1232524}$$

$$\text{عدد پنج رقمی} = \overline{12/32/52/24} = \overline{1232524}$$

$$n(A) = \overbrace{(1)}^{\text{یک رقمی}} + \overbrace{(4)}^{\text{دو رقمی}} + \overbrace{(4 \times 3)}^{\text{سه رقمی}} + \overbrace{(4 \times 3 \times 2)}^{\text{چهار رقمی}} + \overbrace{(4 \times 3 \times 2 \times 1)}^{\text{پنج رقمی}} = 65$$

$$P(A) = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$

۱۵۱- شیب نیم خطی با نقطه شروع $A(2, 4)$ برابر ۳ است. مستطیل ABCD را چنان می‌سازیم، که نقطه B روی نیم خط فوق و رأس سوم آن $C(-3, -1)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

24 (۱) 18 (۲) $6\sqrt{10}$ (۳) $3\sqrt{10}$ (۴)

✓ گزینه ۳- سطح سوال دشوار

پس $\Rightarrow y - 4 = 3(x - 2)$: نیم خط

AB ضلع معادله : $3x - y - 2 = 0$

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

فاصله نقطه $C(-3, -1)$ از نیم خط AB (طول ضلع BC) :

پس $\Rightarrow BC = \frac{|(3 \times -3) + (-1 \times -1) + (-2)|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2}}$

$$BC = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

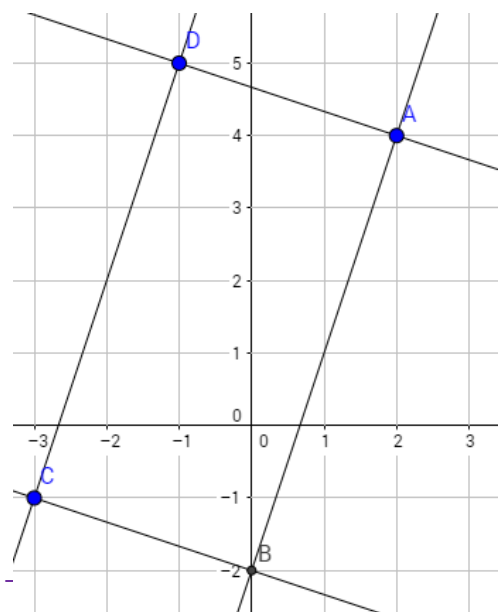
BC ضلع معادله : $C(-3, -1), m = \frac{-1}{m_{AB}} \Rightarrow y - (-1) = \frac{-1}{3}(x -$

BC ضلع معادله : $x + 3y + 6 = 0$

فاصله نقطه $A(2, 4)$ از خط BC (طول ضلع AB) = $\frac{|(1 \times 2) + (3 \times 4) + (6)|}{\sqrt{(1)^2 + (3)^2}}$

$$AB = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

پس $\Rightarrow P = 2AB + 2BC \Rightarrow P = 2 \times \sqrt{10} + 2 \times 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$



۱۵۲- نقطه $H(2, 1)$ را روی خط $3x - y = 5$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث $\sqrt{270}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A ، کدام است؟

- (۱) $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$ (۳) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{6})$

✓ گزینه ۲- سطح سوال دشوار

$$AH \text{ شیب ارتفاع} = -\frac{1}{3} \quad BC \text{ شیب} = 3 \Rightarrow y = 3x - 5 \text{ ضلع}$$

$$AH \text{ معادله ارتفاع: } H(2, 1), m = -\frac{1}{3} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$AH: y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow A \left(t, -\frac{1}{3}t + \frac{5}{3} \right)$$

$$\sqrt{270} = 3 \times \text{طول یک ضلع} \Rightarrow \text{ضلع} = \sqrt{30}$$

$$\text{ارتفاع در مثلث متساوی‌الاضلاع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{ضلع} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$A \left(t, -\frac{1}{3}t + \frac{5}{3} \right), H(2, 1) \xrightarrow{\text{در نتیجه}} AH = \sqrt{(t-2)^2 + \left(-\frac{1}{3}t + \frac{5}{3} - 1\right)^2} =$$

$$\sqrt{(t-2)^2 + \left(\frac{t-2}{3}\right)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{10(t-2)^2}{9}} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{3} \times |t-2| = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$|t-2| = \frac{9}{2} \Rightarrow t = \frac{13}{2} \text{ یا } t = -\frac{5}{2}$$

۱۵۳- دایره‌های $x^2 + y^2 + 2x = 3$ و $x^2 + y^2 + 2y = 3$ متقاطع‌اند. معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

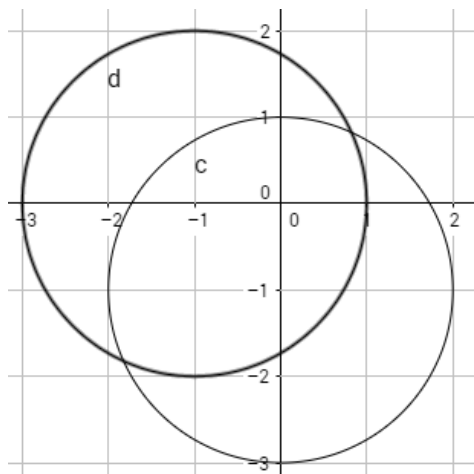
(۴) $x = 1 - y$

(۳) $x = -y$

(۲) $x = 1 + y$

(۱) $x = y$

✓ گزینه ۱- سطح سوال ساده



$$x^2 + (y+1)^2 = 2^2$$

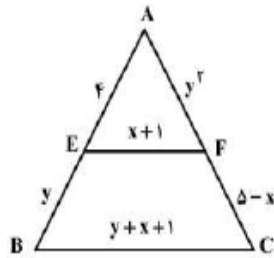
$$(x+1)^2 + y^2 = 2^2$$

$$x^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2$$

$$2y = 2x \Rightarrow y = x$$

۱۵۴- در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y - 2x$ ، کدام است؟



- (۱) -۴
- (۲) -۲
- (۳) ۲
- (۴) ۴

✓ گزینه ۱- سطح سوال متوسط

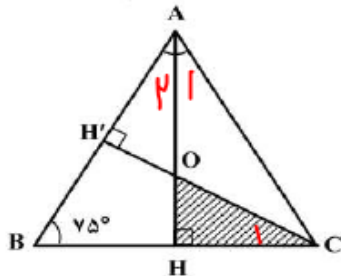
$$\frac{y+4}{4} = \frac{y+x+1}{x+1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4y + 4x + 4 = xy + 4x + y + 4 \xrightarrow{\text{پس}} 3y = xy$$

$$\xrightarrow{\text{در نتیجه}} x = 3, \quad 5 - x = 2$$

$$\frac{y+4}{4} = \frac{y^2+2}{y^2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} y^3 + 4y^2 = 4y^2 + 8 \xrightarrow{\text{پس}} y = 2$$

$$y - 2x = 2 - 2 \times 3 = -4$$

۱۵۵- در شکل زیر مثلث ABC متساوی الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC، کدام است؟



$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{9}{7+4\sqrt{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{18}{7+4\sqrt{3}} \quad (۳)$$

✓ گزینه ۳- سطح سوال متوسط

$$\hat{A} = 30^\circ \xrightarrow{\text{پس}} \hat{A1} = 15^\circ$$

$$\hat{A1} = \hat{A2} = \hat{C1} = 15^\circ$$

$$\cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad (\cos 2x = 2\cos^2(x) - 1)$$

$$\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x)$$

$$\tan(15^\circ) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\sin(\widehat{A1}) = \frac{CH}{AC} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{CH}{6} \Rightarrow CH = 3\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\tan(\widehat{C1}) = \frac{OH}{CH} \Rightarrow \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{OH}{3\sqrt{2-\sqrt{3}}} \Rightarrow OH = \frac{3(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$S(OHC) = \frac{1}{2} \times CH \times OH$$

برای گویا کردن مخرج

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2-\sqrt{3}} \times \frac{3(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{9(2-\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})}$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل پاسخ به فرم گزینه ها}} \frac{9(2-\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})} \times \frac{(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})} = \frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$$

بررسی و تحلیل سوالات ریاضی کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۰:

بدون شک، سوالات درس ریاضیات در کنکور تجربی امسال دشوارترین ریاضیات همه ادوار پیشین بود. سوالات جدید و علی الخصوص با راه حل های طولانی و زمان بر بارزترین ویژگی سوالات ریاضی این آزمون بود.

دو! سوال ۱۵۰ و ۱۵۵ اشتباه بود و پاسخی که مد نظر صورت سوال بود در گزینه ها وجود نداشت.

از نظر این بنده حقیر، چالشی ترین سوالات آزمون امروز سوالات شماره ۱۴۵ و ۱۴۶ و ۱۴۷ و ۱۴۸ و ۱۴۹ بودند.

علاقه طراحان به مباحث هندسه تحلیلی و مختصاتی در این کنکور به طرز ویژه ای خودنمایی میکرد (سوالات ۱۴۳ و ۱۵۱ و ۱۵۲ و ۱۵۳)

امسال برای اولین بار در آزمون های سراسری اخیر شاهد عدم وجود تست از مبحث آمار در آزمون امروز بودیم.

تست ۱۳۰ در مبحث مثلثات، نسبت به تست های مشابه در سال های اخیر نسبتاً راه حل زمان بر تری داشت

تست های مبحث مشتق (۱۴۴ و ۱۴۵) هر دو نسبتاً زمان بر بودند و تست ۱۴۵ تستی با ایده نو و خلاقانه بود.

تست ۱۴۷ اولین تست کنکور سراسری تجربی در مبحث خود بود و البته تستی چالشی (قانون بیز).

تست ۱۴۸ تستی بسیار خلاقانه بود.

از دیگر ویژگی آزمون امروز طرح تست ترکیبی از مباحث مختلف در قالب یک تست بود. لذا دانش آموزان و داوطلبان

عزیز مد نظر خویش قرار دهند که علی حد الامکان همه مباحث را مطالعه کنند و مبحثی را حذف ننمایند.

(مهرداد استقلالیان – دانشجو پزشکی دانشگاه علوم پزشکی اصفهان و رتبه برتر کنکور سراسری سال ۱۳۹۷)