محمد جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸۸-۳۰۴۱

(۴) - ۱۲۶

$$\begin{cases} a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2} \\ b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2} \end{cases} \rightarrow (a^2+b^2-2ab)^2\cdot(a^2+b^2+2ab)^2=$$

$$(a-b)^4(a+b)^4=(a^2-b^2)^4=(a^4+b^4-2a^2b^2)^2=$$

$$(\sqrt{6}-2+\sqrt{6}+2-2\sqrt{6-4})^2=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2=$$

$$4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=4(8-2\sqrt{12})=\boxed{16(2-\sqrt{3})}$$

(۴) - ۱۲۷

$$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)=2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{t=\sqrt[3]{x}}$$

$$\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right)(t^2-1)=2t \xrightarrow{\cdot t^2} (t^4+1+t^2)(t^2-1)=2t^3 \rightarrow$$

$$t^6-1=2t^3 \rightarrow t^6-2t^3-1=0 \xrightarrow{t^3=x} x^2-2x-1=0 \rightarrow \boxed{S=x_1+x_2=2}$$

(۱) - ۱۲۸

$$x=5-x^2 \rightarrow x^2+x-5=0 \rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-1 \rightarrow \alpha+1=-\beta \\ P=\alpha\beta=-5 \rightarrow \frac{-1}{\beta}=\frac{\alpha}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow S'=\frac{1}{(\alpha+1)^3}+\frac{1}{(\beta+1)^3}=\frac{\alpha^3}{125}+\frac{\beta^3}{125}=\frac{S^3-3PS}{125}=\frac{-1-3(-1)(-5)}{125}=\boxed{\frac{-16}{125}}$$

$$P'=\frac{1}{(\alpha+1)^3}\cdot\frac{1}{(\beta+1)^3}=\frac{\alpha^3}{125}\cdot\frac{\beta^3}{125}=\frac{P^3}{5^6}=\frac{-5^3}{5^6}=\boxed{-\frac{1}{125}}$$

$$\therefore x^2-S'x+P'=0 \rightarrow x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0 \rightarrow \boxed{125x^2+16x=1}$$

(۴) - ۱۲۹

$$f(x)=16\cos^2 3x\cdot\cos^2 6x\cdot\cos^2 12x\cdot\cos^2 24x \xrightarrow[\div\sin^2 3x]{\times\sin^2 3x}$$

$$\frac{16}{\sin^2 3x}\cdot\underbrace{\sin^2 3x\cdot\cos^2 3x}_{\frac{1}{4}\sin^2 6x}\cdot\cos^2 6x\cdot\cos^2 12x\cdot\cos^2 24x = \frac{16}{\sin^2 3x}\cdot\frac{1}{4\times 64}\sin^2 48x=$$

$\frac{1}{4}\sin^2 6x$, $\frac{1}{16}\sin^2 12x$, $\frac{1}{64}\sin^2 24x$, $\frac{1}{4\times 64}\sin^2 48x$

$$\frac{\sin^2 48x}{16\sin^2 3x} \rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{\sin^2\frac{48\pi}{36}}{16\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{16\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\boxed{\frac{3}{16}(2+\sqrt{3})}$$

(۲) - ۱۳۰

$$tg\,\alpha=\frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{9}{16}}=\boxed{\frac{24}{7}}\checkmark \\ \sin 2\alpha=\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1+\frac{9}{16}}=\boxed{\frac{24}{25}} \\ 1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25}\xrightarrow{\text{ربع ۳} \ \alpha}\boxed{\cos\alpha=-\frac{4}{5}} \end{cases} \longrightarrow$$

محمود جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱

ادامه سوال ۱۳۰:

$$\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{ctg\,2\alpha}=$$

$$tg2\alpha.(\sin2\alpha-\cos\alpha)=\frac{24}{7}\left(\frac{24}{25}+\frac{4}{5}\right)=\boxed{\frac{1056}{175}}$$

۱۳۱ - (۳)

$x\in[0,2\pi]$

$$\cos^2x-\sin^2x.\cos3x=1\rightarrow \cancel{1}-\sin^2x-\sin^2x.\cos3x=\cancel{1}$$

$$\rightarrow -\sin^2x.(1+\cos3x)=0\rightarrow\begin{cases}\sin x=0\rightarrow x=k\pi\\ \cos3x=-1\rightarrow x=\left(\frac{2k+1}{3}\right)\pi\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=0,\pi,2\pi\\ x=\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}\end{cases}\rightarrow \text{تعداد}=5$$

۱۳۲ - (۱)

$$y=\frac{\log_4(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}\rightarrow\begin{cases}x^2-x-2>0\rightarrow x<-1 \text{ یا } x>2\\ x^2-1\geq0\rightarrow |x|\geq1\end{cases} \text{و} \rightarrow\cap$$

$$\boxed{x<-1 \text{ یا } x>2}$$

۱۳۳ - (۲)

$$y=2|[3x]|-1\quad ;\ -\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}\leq3x<\frac{3}{2}\rightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}\leq3x<-1\rightarrow[3x]=-2 & ;\ -\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{3}\\ -1\leq3x<0\rightarrow[3x]=-1 & ;\ -\frac{1}{3}\leq x<0\\ 0\leq3x<1\rightarrow[3x]=0 & ;\ 0\leq x<\frac{1}{3}\\ 1\leq3x<\frac{3}{2}\rightarrow[3x]=1 & ;\ \frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{2}\end{cases}\rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases}3 & ;\ -\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{3}\\ 1 & ;\ -\frac{1}{3}\leq x<0\\ -1 & ;\ 0\leq x<\frac{1}{3}\\ 1 & ;\ \frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

۱۳۴ - (۴)

$$\begin{cases}2y=x^2\rightarrow y\geq0\\ x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}\end{cases}\rightarrow 2y=y+3+y-3-2\sqrt{y^2-9}\rightarrow$$

$$y=\pm3\xrightarrow{y\geq0}\boxed{y=3}\rightarrow\boxed{x=\sqrt{6}-0=\sqrt{6}}\rightarrow$$

$$A\begin{vmatrix}\sqrt{6}\\3\end{vmatrix}\rightarrow OA=\sqrt{6+9}=\sqrt{15}$$

محمود جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱

(۲) - ۱۳۵

$$\frac{3^x+3^{x+1}+\cdots+3^{x+5}}{2^{x-2}+2^{x-1}+\cdots+2^{x+3}}=52 \to \frac{3^x(1+3+3^2+\cdots+3^5)}{2^{x-2}(1+2+2^2+\cdots+2^5)}=52 \to$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x\frac{(3^6-1)/2}{(2^6-1)/1}=\frac{52}{4} \to \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{52\times 63\times 2}{4\times 728}=\frac{9}{4} \to \boxed{x=2}$$

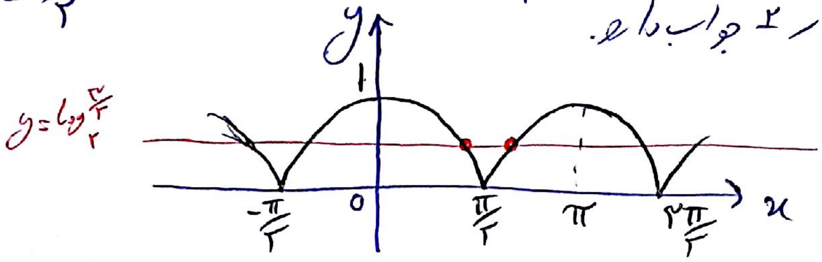
---

(۳) - ۱۳۶

$$y=2^{|\sin x|} \Longrightarrow y=2^{|\sin(x-\frac{\pi}{2})|}-\frac{3}{2}=2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{y=0} 2^{|\cos x|}=\frac{3}{2} \xrightarrow{\log(\cdot)} |\cos x|=\log_2^{\frac{3}{2}}\simeq 0/5 \to$$

با توجه به نمودار ۲ جواب دارد.




---

(۱) - ۱۳۷

$$\log_x^y-2\log_y^x=1 \;;\; x,y>1 \xrightarrow{t=\log_x^y}$$

$$t-\frac{2}{t}=1 \xrightarrow{\cdot t} t^2-t-2=0 \to t=-1,2 \to \begin{cases}\log_x^y=-1 \to y=\frac{1}{x} \quad \times \\ \log_x^y=2 \to \boxed{y=x^2} \quad \checkmark\end{cases}$$

زیرا $x,y>1$

---

(۴) - ۱۳۸

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x}{x^4+x^2}}=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$$

---

(۱) - ۱۳۹

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=[0^-]=-1$$

$$x<\frac{\pi}{6} \xrightarrow[\text{با توجه نمودار } y=\sin x]{\text{در حوالی } \frac{\pi}{6}} \sin x<\frac{1}{2} \to 2\sin x-1<0$$

---

(۳) - ۱۴۰

$$y=2+\sqrt{x-1} \to x=2+\sqrt{y-1} \to x-2=2+\sqrt{y-1} \to$$

$$x-2=2+\sqrt{y+2} \to x-2=2+\sqrt{g(x)+2} \xrightarrow{x=4} 2=2+\sqrt{g(4)+2} \to \boxed{g(4)=-2}$$

محمود جعفری {۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱}

۱۴۱- ۳

$f(x)=1-x^2 \; , \; g(x)=\begin{cases}1 & ; x>0\\ 0 & ; x=0 \\ -1 & ; x<0\end{cases} \to$

$(gof)(x)=g(1-x^2)=\begin{cases} 1 & ; 1-x^2>0 \to |x|<1 \\ 0 & ; x=\pm1 \\ -1 & ; 1-x^2<0 \to |x|>1\end{cases} \to$ نقاط ناپیوستگی: $x=\pm1$

---

۱۴۲- ۲

$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|$

نقاط اکسترمم عبارتست از ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق و مشتق برابر صفر بجز ریشه

$\left[\frac{x^2}{x^2-1}(x^2-4)\right]'=0 \to \left(x^2-\frac{3x^2}{x^2-1}\right)'=0 \to 2x+\frac{6x}{(x^2-1)^2}=0 \to$

$x=0 \to x=0 \; , \; \boxed{\pm2}$ : نقاط اکسترمم

---

۱۴۳- ۳

$f(x)=x^2 \to A\left|^{x}_{x^2}\right. \to A'\left|^{x^2}_{x}\right. \to$

$AA'=\sqrt{(x^2-x)^2+(x^2-x)^2}=|x^2-x|\cdot\sqrt2 \to y=|x^2-x|\cdot\sqrt2 \; ; \; 0<x<1$

$x^2=x \to x=0,1 \to 0<x<1$

$\to y=(x-x^2)\sqrt2 \to y'=(1-2x)\sqrt2=0 \to \boxed{x=\frac12} \to \boxed{AA'=\frac{\sqrt2}{4}}$

---

۱۴۴- ۴

$f(x)=\left(x\left[x^2+\frac14\right]\right)^2+1$

$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

$\to (fog)'\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)=g'\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)\cdot f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)\right)=$

$g'\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)\cdot f'(2)=\frac{-16}{\sqrt2}(64)=\boxed{4(-128\sqrt2)}$

$g\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac18}}=2$

$g'(x)=\frac{-1}{3}(2x)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \to g'\left(\frac{3}{\sqrt8}\right)=\frac{-2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt8}(16)=\boxed{\frac{-16}{\sqrt2}}$

$f(x)=16x^2+1$ در حوالی $x=2$ ؛ $\to f'(x)=32x \to \boxed{f'(2)=64}$

(۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱ محمود جعفری)

(۳)-۱۴۵

$$\begin{cases} g(x)=ax^2+bx+c \;;\; a\neq 0 \;,\; a=b+c \\ f(x)=\begin{cases} g(x) & ; x\geq k \\ g'(x) & ; x<k \end{cases} = \begin{cases} ax^2+bx+c & ; x\geq k \\ 2ax+b & ; x<k \end{cases} \rightarrow \end{cases}$$

پیوستگی در $x=k$ : $\boxed{ak^2+bk+c=2ak+b}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & ; x>k \\ 2a & ; x<k \end{cases} \rightarrow$$ مشتق‌پذیری در $x=k$ : $\boxed{2ak+b=2a}$ $\rightarrow$

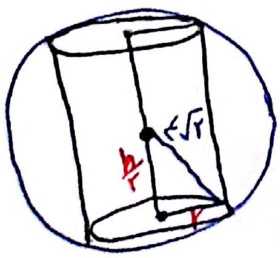
$$\therefore \begin{cases} ak^2+bk+c=2a \\ 2a=2ak+b \rightarrow b=2a-2ak \rightarrow c=a-b=2ak-a \end{cases}$$

$$ak^2+(2a-2ak)k+2ak-a=2a \rightarrow ak^2-4ak+3a=0 \xrightarrow{a\neq 0}$$

$$k^2-4k+3=0 \rightarrow \boxed{k=1,3}$$

(۲)-۱۴۶

$\rightarrow$




$$\begin{cases} S=2\pi rh \\ r^2+\frac{h^2}{4}=32 \rightarrow r^2=\frac{h^2}{4}=16 \\ \max S=2\pi(2)(16)=\boxed{64\pi} \end{cases}$$

(۳)-۱۴۷

$\rightarrow$

$A=$ پیشامد آنکه در امتحان اول موفق شود، باشد.

$B=$ پیشامد آنکه در امتحان دوم موفق شود، باشد.

$$\rightarrow \begin{cases} P(B)=0/9 \\ P(A\cap B)=0/85 \end{cases}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/85}{0/9}=\boxed{\frac{17}{18}}$$

(۳)-۱۴۸

$ax^2+bx-c=0 \rightarrow$ a و c مختلف‌العلامه $\rightarrow \Delta>0$

$$\begin{cases} ax^2+bx-c=0 \rightarrow \boxed{c=b+2a} \\ S=2+P \rightarrow -\frac{b}{a}=2-\frac{c}{a} \rightarrow c=b+2a \end{cases} \;;\; a,b,c=1,2,3,\dots,9 \rightarrow$$

$(a,b,c)=\{(1,1,3),(1,2,4),(1,3,5),(1,4,6),(1,5,7),(1,6,8),(1,7,9),(2,3,7),(2,4,8),(2,5,9),(2,1,5),(2,2,6),(3,9,9)?,(2,2,8),(3,3,9),(3,1,7),(4,1,9)\}$

محمود جعفری ۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱

① - ۱۴۹

$3! \cdot 4! = \boxed{144}$

؟ - ۱۵۰

یک رقمی: ۴ → تعداد = $\boxed{1}$

دو رقمی: ۱۲، ۲۴، ۳۲، ۵۲ → تعداد = $\boxed{4}$

سه رقمی: $\underset{3}{\_}\ \underbrace{\_\ \_}_{\text{4 عدد بالایی}}$ $\Rightarrow \boxed{3\times 4 = 12}$

چهار رقمی: $\underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underbrace{\_\ \_}_{\text{4 عدد}}$ $\Rightarrow \boxed{6\times 4 = 24}$

پنج رقمی: $\underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_}\ \underbrace{\_\ \_}_{\text{4 عدد}}$ $\Rightarrow \boxed{6\times 4 = 24}$

$\rightarrow P(A) = \dfrac{65}{325} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$

دقت شود که:

$n(S) =$ تعداد یک رقمی + تعداد دو رقمی + ... + تعداد پنج رقمی =

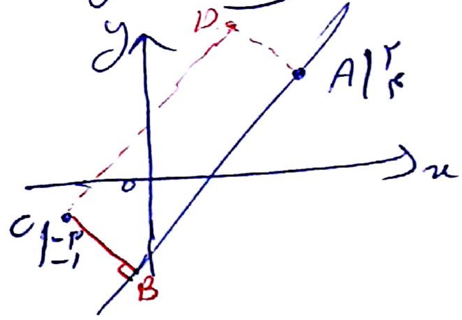
$5 + 5\times4 + 5\times4\times3 + 5\times4\times3\times2 + 5\times4\times3\times2\times1 = \boxed{325}$

③ - ۱۵۱

$\begin{cases} A\,\big|^{2}_{4} \\ m=3 \end{cases} \rightarrow y-4 = 3(x-2) \rightarrow y = 3x-2 \rightarrow m_{CD} = -\frac{1}{3} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{x+3y+6=0}$

$CB:\ y+1 = -\frac{1}{3}(x+3)$




$\begin{cases} CB = \dfrac{|-9+1-2|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \boxed{\sqrt{10}} \\ AB = \dfrac{|2+12+6|}{\sqrt{10}} = \dfrac{20}{\sqrt{10}} = \boxed{2\sqrt{10}} \end{cases}$

$\rightarrow P_{ABCD} = 2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = \boxed{6\sqrt{10}}$

② - ۱۵۲

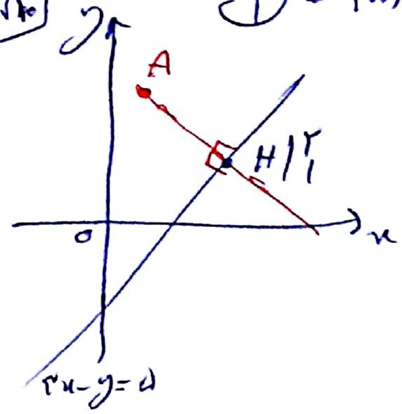
$3a = \sqrt{270} \rightarrow a = \boxed{\sqrt{30}} \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{10}}$

$H\,\big|^{2}_{1}$ , $3x - y = 5$ ,

بررسی گزینه‌ها:

1) $A\,\big|^{5/2}_{1/2} \rightarrow AH = \dfrac{|\frac{15}{2} - \frac{1}{2} - 5|}{\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{10}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$ ✗

2) $A\,\big|^{13/2}_{-1/2} \rightarrow AH = \dfrac{|\frac{39}{2} + \frac{1}{2} - 5|}{\sqrt{10}} = \dfrac{15}{\sqrt{10}} = \boxed{\dfrac{3}{2}\sqrt{10}}$ ✓



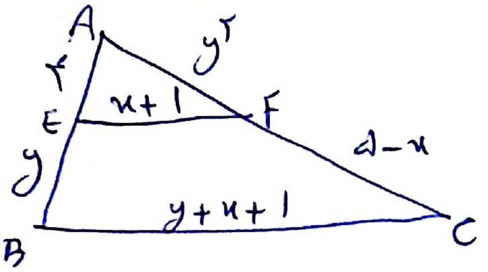
۰۹۱۱-۱۵۸-۳۰۴۱ محمود جعفری

(۱) - ۱۵۳

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=3 \\ -\ (x^2+y^2+2x=3) \end{cases}$$

$$2y-2x=0 \rightarrow \boxed{y=x}$$ معادله وتر مشترک:

(۱) - ۱۵۴

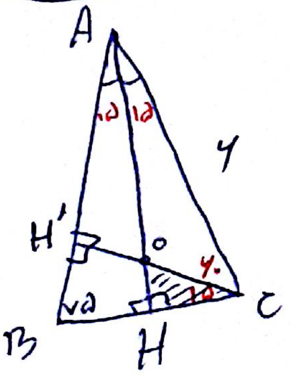



$$\frac{4}{4+y}=\frac{y^2}{y^2-x+5}=\frac{x+1}{y+x+1}\rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{4}{4+y}=\frac{x+1}{x+1+y}\rightarrow \frac{4}{y}=\frac{x+1}{y}\rightarrow \boxed{x=3} \\ \frac{4}{4+y}=\frac{y^2}{y^2-x+5}\rightarrow \frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-x}\xrightarrow{x=3} \end{cases}$$

$$y^3=8\rightarrow \boxed{y=2}\rightarrow y-2x=\boxed{-4}$$

? - ۱۵۵




$$\overset{\triangle}{AHC}: CH=AC.\sin 15=6\left(\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}\right)=\boxed{\frac{3}{2}(\sqrt6-\sqrt2)}$$

$$\overset{\triangle}{oHC}: \cos 15=\frac{CH}{oC}\rightarrow oC=\frac{CH}{\cos 15}=\frac{\frac{3}{2}(\sqrt6-\sqrt2)}{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}$$

$$\rightarrow S_{\overset{\triangle}{oHC}}=\frac{1}{2}oC.CH.\sin 15=\frac{\frac{3}{2}(\sqrt6-\sqrt2)}{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}\cdot\frac{3}{2}(\sqrt6-\sqrt2)\cdot\left(\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}\right)=$$

$$\frac{9}{8}\frac{(\sqrt6-\sqrt2)^3}{\sqrt6+\sqrt2}=\frac{9}{32}(\sqrt6-\sqrt2)^4=\frac{9}{32}(8-2\sqrt{12})^2=$$

$$\boxed{\frac{9}{2}(7-4\sqrt3)=\frac{9}{2(7+4\sqrt3)}}$$