

سؤال ۱۲۵ - گزینه "ا"

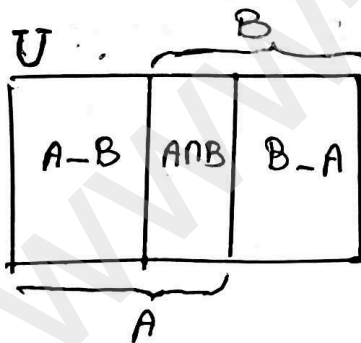
P	q	r	$q \vee r$	$P \Rightarrow (q \vee r)$
>	>	>	>	>
>	>	⊂	>	>
>	⊂	>	>	>
>	⊂	⊂	⊂	⊂
⊂	>	>	>	>
⊂	>	⊂	>	>
⊂	⊂	>	>	>
⊂	⊂	⊂	⊂	>

همان طور که در جدول مشاهده می شود ، در ۷ ردیف ارزش گزاره $P \Rightarrow (q \vee r)$ درست است ،
 که در ردیف های ۲ ، ۶ و ۸ یعنی ۳ ردیف آن ، ارزش گزاره r نادرست است .

سؤال ۱۲۶ - گزینه "ا"

$$(A' - B)' \cap C = (A' \cap B')' \cap C = (A \cup B) \cap C = U \cap C = C$$

مطابق نمودار ون ، متمم مجموعه C در این سوال معادل مجموعه $A \cap B$ است ،



بنابراین داریم:

$$C' = B \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow B \subseteq A$$

سؤال ۱۲۷ - گزینه "ب"

$$\begin{aligned} 20! &= 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 20 = 1 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2 \times 3 \times (2 \times 5) \\ &\quad \times 11 \times (2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times 5) \times 2 \times 17 \times (2 \times 3) \times 19 \times (2 \times 5) \\ &= 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 \times 19^1 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 18 + 8 + 4 + 2 + 1 \times 1 = 36$$

سوال ۱۲۸ - گزینه "۳"

تعداد دانه‌ها برابر ۲۲ است و پس میانگین دانه‌ها یازدهم و دوازدهم برابر میانگین است.
همچنین میانگین ۱۱ دانه اول یعنی دانه ششم برابر چارک اول و میانگین ۱۱ دانه آخر
یعنی دانه هفدهم برابر چارک سوم است. بنابراین $Q_1 = 13$ بوده و در شبکه داریم:

$$Q_3 - Q_1 = 17 \Rightarrow Q_3 - 13 = 17 \Rightarrow Q_3 = 30$$

پس مقدار α لزوماً برابر ۳۰ است. میانگین دانه‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{3 \times 11 + 2 \times 12 + 6 \times 13 + 3 \times 14 + 2 \times 28 + 1 \times 30 + 5 \times 31}{22} = 19$$

واریانس دانه‌ها از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \frac{3(-1)^2 + 2(-7)^2 + 6(-6)^2 + 3(-5)^2 + 2 \times 9^2 + 1 \times 11^2 + 5 \times 12^2}{22} = 72$$

سوال ۱۲۹ - گزینه "۳"

اولین دانه به صورت ۱۰۷۰۱ است و مطابق تعریف ارائه شده داریم:

$$\underbrace{11504}_{\text{عضو ۱۰۰}} \dots \underbrace{11501}_{\text{عضو ۹۷}} \dots \underbrace{10901}_{\text{عضو ۲۵}} \dots \underbrace{10801}_{\text{عضو ۱۳}} \dots \underbrace{10712}_{\text{عضو ۱۲}} \dots \underbrace{10701}_{\text{عضو ۱}}$$

در واقع $100 = 8 \times 12 + 4$ است و پس ۸ گروه سنی (۷، ۱۴ سال) قبل از رسیدن به
عضو پنجم مجموعه به پایان رسیده و از عضو نود و هفتم گروه سنی ۱۵ سال آغاز می‌گردد
که صدمین عضو مجموعه نیز به این گروه تعلق دارد.

تعداد راه‌های انتخاب دو کارت به صورت متوالی برابر $420 = 21 \times 20$ است ولی در سه حالت عدد یکسانی ایجاد می‌شود که عبارت اند از:

$$\boxed{1} \boxed{12} \text{ و } \boxed{11} \boxed{2}$$

$$\boxed{1} \boxed{21} \text{ و } \boxed{12} \boxed{1}$$

$$\boxed{1} \boxed{11} \text{ و } \boxed{11} \boxed{1}$$

بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با: $n(S) = 420 - 3 = 417$

به ازای کارت ۱، ۴ کارت با شماره‌های ۲، ۸، ۱۴ و ۲۰، به ازای کارت ۲، ۳ کارت با شماره‌های ۴، ۱۰ و ۱۶، و به ازای کارت ۳، ۳ کارت با شماره‌های ۶، ۱۲ و ۱۸، می‌توانند در کنار هم اعدادی مضرب ۶ ایجاد کنند. بنابراین تعداد حالت‌ها به ازای شماره‌های ۱، ۲ و ۳ برابر ۱۵ است. برای هر سه کارت بعدی نیز تعداد حالت‌های مشابه خواهیم داشت که در مجموع برابر $7 \times 10 = 70$ می‌شود.

ولی سه حالت ۶ و ۶، ۱۲ و ۱۲ و نیز ۱۸ و ۱۸ امکان پذیر نیست و پس

تعداد اعضای بی‌مقدار فرضی برابر است با: $n(A) = 70 - 3 = 67$

$$P(A) = \frac{67}{417} \quad \text{در سببه داریم:}$$

$$100000 \leq 18x < 1000000 \xrightarrow[\substack{\div 9 \\ x \in \mathbb{Z}}]{\div 9} 11112 \leq 2x \leq 111111$$

زوج است و عدد $2x$ باید مربع کامل باشد، بنابراین داریم:

$$34^2 \leq 2x \leq 104^2$$

$$n = \frac{104 - 34}{2} + 1 = 36 \quad \text{پس تعداد مقادیر } x \text{ برابر است با:}$$

نکته: اگر عدد A به صورت عامل‌های اول $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ تجزیه شود، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن از رابطه $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ به دست می‌آید.

بنابراین داریم:

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های } x = (m+1)(n+1)$$

$$\frac{x}{20} = \frac{2^m \times 5^n}{2^4 \times 5} = 2^{m-4} \times 5^{n-1}$$

$$\frac{x}{20} \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های } = (m-4)(n)$$

$$(m+1)(n+1) - (m-4)n = 12 \Rightarrow mn + m + n + 1 - mn + 4n = 12$$

$$\Rightarrow m + 5n = 11$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} m-4 \geq 0 \Rightarrow m \geq 4 \\ n-1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1 \end{cases}$$

برای کوچک بودن عدد x ، باید توان عدد ۵ تا حد امکان کوچک باشد که کمترین

مقدار آن برابر ۱ است، پس $n=1$ و $m=6$ بوده و در نتیجه داریم:

$$\min(x) = 2^6 \times 5 = 1280$$

تذکر: این سوال مربوط به کاربردهای قضیه بنیادی حساب است که در کتاب ریاضیات گسسته نظام جدید وجود ندارد.

عدد \overline{aba} بر ۱۲ بخش پذیر است، پس باید بر ۳ و ۴ بخش پذیر باشد.

در این صورت a حتماً رقم زوج و غیر صفر است.

$$\overline{aba} \text{ بزرگ‌ترین مقدار} = 888 \quad \overline{aba} \text{ کوچک‌ترین مقدار} = 252$$

$$\text{میانگین دو عدد} = \frac{252 + 888}{2} = 570$$

۱۳۴ - گزینه "۲"

$$q = r + 3 \Rightarrow a = 11(r + 3) + r = 12r + 33 \Rightarrow a - 9 = 12r + 24 = 12(r + 2)$$

$$0 \leq r < 6 \Rightarrow 0 \leq r < 11$$

بنابراین برای ۲ یازده مقدار ۰ تا ۱۰ قابل قبول است. به ازای مقادیر زوج ۲،

$r + 2$ نیز زوج بوده و عدد $a - 9$ بر ۲۴ بخش پذیر است، یعنی اعضای فضا نمونه

شامل مقادیر ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ هستند و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر $\frac{6}{11}$ است.

۱۳۵ - گزینه "۳"

کوچکترین عددی به صورت $n!$ که مضرب ۳۶ باشد، عدد ۶! است، پس داریم:

$$10 - m = 6 \Rightarrow m = 4$$

بنابراین باید باقی مانده تقسیم ۴ را بر ۱۵ بدست آوریم:

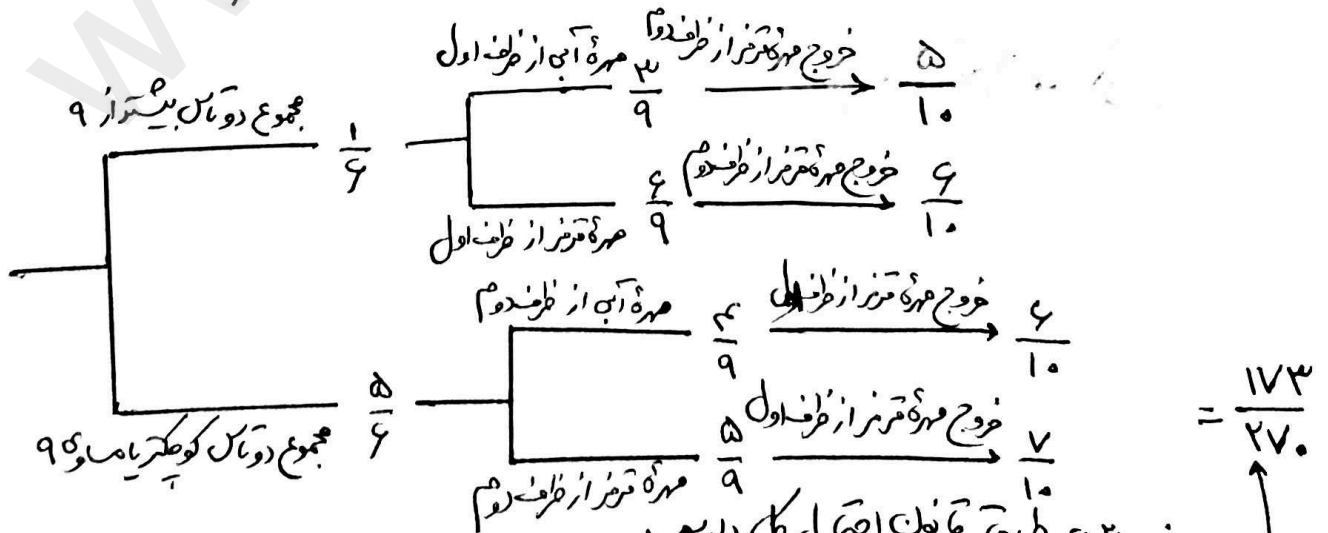
$$4 \equiv 4 \pmod{15} \xrightarrow{\times 4} 16 \equiv 1 \pmod{15} \xrightarrow{\times 4} 64 \equiv 4 \pmod{15} \xrightarrow{\times 4} 256 \equiv 1 \pmod{15}$$

۱۳۶ - گزینه "۳"

باید دید آنکه مجموع دو تاس عددی بیشتر از ۹ باشد، به صورت مجموعه زیر است:

$$\{(4, 6), (5, 5), (5, 4), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

یعنی احتمال این بیست عدد برابر $\frac{1}{6}$ و در نتیجه سهم آن برابر $\frac{5}{6}$ است. طبق نمودار درختی داریم:



بنابراین طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\frac{1}{6} \left(\frac{3}{9} \times \frac{5}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{6}{10} \right) + \frac{5}{6} \left(\frac{4}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{5}{9} \times \frac{7}{10} \right) = \frac{1}{6} \times \frac{51}{90} + \frac{5}{6} \times \frac{59}{90} = \frac{346}{540} = \frac{173}{270}$$

سوال ۱۳۷ - گزینه ۴

برای این که معادله دارای جواب‌های صحیح و نامنفی باشد، باید یکی از مقادیر x_4 مثبت عدد ۱۰ باشد که در نتیجه داریم:

$$x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{12}{2} = 66$$

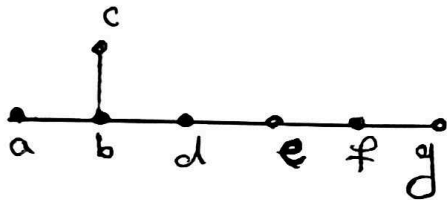
$$x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{7}{2} = 21$$

$$x_4 = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2 \rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x_4 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 \rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{3}{2} = 3$$

تعداد کل جواب‌ها = $66 + 21 + 6 + 3 = 96$

سوال ۱۳۸ - گزینه ۲



مطابق شکل کوچکترین اندازه گراف ساده همبندی از مرتبه ۷ که در آن $\Delta = 3$ باشد، برابر ۶ است.

سوال ۱۳۹ - گزینه ۴

مربع لاتین را مطابق شکل کامل می‌کنیم:

۲	۴	۳	۵	۱
۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	۴

همان‌طور که مشاهده می‌شود $a = 4$ و $b = 1$ است.

سوال ۱۴۰ - گزینه ۲

- گزینه ۱: مجموعه $\{h, b\}$ قادر به اطراف‌رسانی نیست.
- گزینه ۲: مجموعه $\{i, d, b\}$ قادر به اطراف‌رسانی تمام رئوس گراف است.
- گزینه ۳: مجموعه $\{a, c, h\}$ قادر به اطراف‌رسانی e و e نیست.
- گزینه ۴: چون تمام رئوس گراف با مجموعه سه عضوی $\{i, d, b\}$ اطراف‌رسانی می‌شوند، پس یک مجموعه چهار عضوی نمی‌تواند اطراف‌رسان باشد.