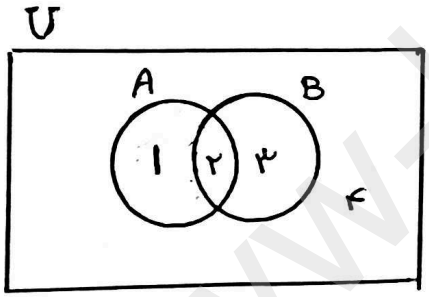
سؤال ۱۲۵ - گزینهٔ «۲»

طبق جدول ارزش گزاره ها برای سه گزارهٔ p، q و r داریم:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن	د

همان طور که در جدول مشاهده می شود، در ردیف های ۲، ۴ و ۶، ارزش گزارهٔ $(p \vee q) \Rightarrow r$ نادرست است. در بین این سه ردیف، تنها در ردیف ۴، ارزش گزارهٔ q نادرست است، پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{1}{3}$ است.

سؤال ۱۲۶ - گزینهٔ «۱»



فرض کنید نواحی موجود در نمودار ون دو مجموعهٔ A و B را به صورت مقابل شماره گذاری کنیم. در این صورت مجموعهٔ C شامل نواحی ۱ و ۳ است و داریم:

$$(A' \cap B')' \cap C' = (A \cup B) \cap C' = \{۱, ۲, ۳\} \cap \{۲, ۴\} = \{۲\}$$

مطابق شکل ناحیهٔ «۲» معادل مجموعهٔ $A \cap B$ است.

سؤال ۱۲۷ - گزینهٔ «۱»

$$k\binom{n}{k} = k \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{k \times n!}{k(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n \times 2^{n-1}$$

سؤال ۱۲۸ - گزینهٔ «۳»

اطلاعات مسئله برای حل کافی نیست و مقدار a به صورت منحصر به فرد به دست نمی‌آید ولی در صورتی که فرض $a \geq 13$ را به سؤال اضافه کنیم، آنگاه چون میانهٔ ۲۲ داده برابر میانگین داده‌های یازدهم و دوازدهم است و یکی از این دو داده قطعاً ۱۳ می‌باشد، پس $a \leq 13$ بوده و در نتیجه حتماً $a = 13$ است (اگر $a > 13$ باشد، آنگاه میانهٔ نیز قطعاً بزرگتر از ۱۳ است). ابتدا میانگین و سپس واریانس را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{3\times 8 + 2\times 12 + 7\times 13 + 3\times 14 + 1\times 26 + 1\times 27 + 5\times 28}{22} = \frac{374}{22} = 17$$

$$\sigma = \frac{3(-9)^2 + 2(-5)^2 + 7(-4)^2 + 3(-3)^2 + 9^2 + 10^2 + 5\times 11^2}{22} = \frac{1218}{22} = 55.36$$

سؤال ۱۲۹ - گزینهٔ «۴»

اعضای مجموعه را می‌توان به صورت زیر مشخص کرد :

$$\underbrace{100001}_{\text{عضو ۱}}, \ldots, \underbrace{100085}_{\text{عضو ۸۵}}, \ldots, \underbrace{100101}_{\text{عضو ۸۶}}, \ldots, \underbrace{100185}_{\text{عضو ۱۷۰}}, \ldots, \underbrace{100201}_{\text{عضو ۱۷۱}}, \ldots$$

عدد ۱۰۰۰۰۰ را می‌توان به صورت $55 + 85 \times 117$ نوشت، بنابراین ده هزارمین عضو مجموعه به صورت ۱۱۱۷۵۵ نوشته می‌شود و سن این فرد برابر ۵۵ است.

سؤال ۱۳۰ - گزینهٔ «۱»

تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با :

$$n(S) = \underset{\text{کارت اول زوج}}{6} \times 11 + \underset{\text{کارت اول فرد}}{6} \times 6 = 102$$

به ازای هر یک از اعداد روشدهٔ زوج در کارت اول، اعداد ۴، ۸ و ۱۲ برای کارت دوم قابل قبول است ولی حالت‌های (۴ و ۴)، (۸ و ۸) و (۱۲ و ۱۲) امکان‌پذیر نیست.

به ازای هر یک از اعداد روشدهٔ فرد در کارت اول، اعداد ۲ و ۶ در کارت دوم قابل قبول است، بنابراین تعداد اعضای پیشامد تصادفی برابر است با :

$$n(A) = (6 \times 3) - 3 + (2 \times 6) = 27$$

بنابراین احتمال برابر است با :

$$P(A) = \frac{27}{102} = \frac{9}{34}$$

سؤال ۱۳۱ـ گزینهٔ «۲»

عدد مکعب کاملی که مضرب ۹ باشد، حداقل دارای سه عامل ۳ بوده و در نتیجه مضرب ۲۷ است و می‌توان آن را به صورت $27k^3$ نمایش داد. در این صورت داریم:

$$100 \leq 27k^3 < 10000 \xrightarrow{\text{ضرب در } 3} \frac{10}{\sqrt[3]{10}} \leq 3k < 10\sqrt[3]{10}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{2.1} \leq 3k < 10 \times 2.1 \Rightarrow 4.76 \leq 3k < 21 \Rightarrow 1.58 \leq k < 7$$

بنابراین تنها مقادیر ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ برای k قابل قبول است، یعنی ۵ عدد با این مشخصات وجود دارد.

سؤال ۱۳۲ـ گزینهٔ «۴»

تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد طبیعی $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ برابر $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ است،

بنابراین داریم:

$$x = 6^m \times 10^n = (2\times 3)^m \times (2\times 5)^n = 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n$$

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های } x = (m+n+1)(m+1)(n+1)$$

$$15x = 3\times 5\times 2^{m+n} \times 3^m \times 5^n = 2^{m+n} \times 3^{m+1} \times 5^{n+1}$$

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های } 15x = (m+n+1)(m+2)(n+2)$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(m+n+1)(m+2)(n+2) - (m+n+1)(m+1)(n+1) = 35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)\left[(m+2)(n+2) - (m+1)(n+1)\right] = 35$$

$$\Rightarrow (m+n+1)(m+n+3) = 5\times 7 \Rightarrow m+n = 4$$

بزرگ‌ترین مقدار x: $\begin{cases} m=0 \\ n=4 \end{cases} \Rightarrow \max(x) = 10^4 = 10000$

کوچک‌ترین مقدار x: $\begin{cases} m=4 \\ n=0 \end{cases} \Rightarrow \min(x) = 6^4 = 1296$

اختلاف دو عدد $= 10000 - 1296 = 8704$

سؤال ۱۳۳ - گزینهٔ «۲»

عددی مضرب ۸۸ است که مضرب ۸ و ۱۱ باشد، بنابراین داریم:

$$\overline{abaaba} \overset{\wedge}{\equiv} \overline{aba} \overset{\wedge}{\equiv} a+10b+100a \overset{\wedge}{\equiv} 101a+10b$$
$$\overset{\wedge}{\equiv} 5a+2b \overset{\wedge}{\equiv} 0$$

$$\overline{abaaba} \overset{11}{\equiv} a-b+a-a+b-a \overset{11}{\equiv} 0$$

عدد مورد نظر همواره بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس کافی است ارقام a و b را به گونه‌ای تعیین کنیم که در شرط بخش‌پذیری بر ۸ صدق کنند.

و با توجه به شرط $5a+2b \overset{\wedge}{\equiv} 0$، a قطعاً زوج و همچنین غیرصفر است،

بنابراین داریم:

$$a=2 \Rightarrow 2b+10 \overset{\wedge}{\equiv} 0 \Rightarrow 2b \overset{\wedge}{\equiv} -10 \overset{\wedge}{\equiv} 6 \Rightarrow b \overset{\wedge}{\equiv} 3 \Rightarrow b=3$$
$$a=4 \Rightarrow 2b+20 \overset{\wedge}{\equiv} 0 \Rightarrow 2b \overset{\wedge}{\equiv} -20 \overset{\wedge}{\equiv} 4 \Rightarrow b \overset{\wedge}{\equiv} 2 \Rightarrow b=2$$
$$a=6 \Rightarrow 2b+30 \overset{\wedge}{\equiv} 0 \Rightarrow 2b \overset{\wedge}{\equiv} -30 \overset{\wedge}{\equiv} 2 \Rightarrow b \overset{\wedge}{\equiv} 1 \Rightarrow b=1,9$$
$$a=8 \Rightarrow 2b+40 \overset{\wedge}{\equiv} 0 \Rightarrow 2b \overset{\wedge}{\equiv} -40 \overset{\wedge}{\equiv} 0 \Rightarrow b \overset{\wedge}{\equiv} 0 \Rightarrow b=0,8$$

بنابراین ۶ عدد با مشخصات مورد نظر وجود دارد.

سؤال ۱۳۴ - گزینهٔ «۳»

اگر خارج قسمت و باقی مانده را به ترتیب با q و r نمایش دهیم، داریم:

$$q+r=17 \Rightarrow q=17-r$$
$$a=13q+r=13(17-r)+r=221-12r$$
$$\Rightarrow a-8=213-12r=192-12r+21=12(16-r)+21$$

با توجه به فرض، $0 \leq r \leq 12$ بوده یعنی فضای نمونه شامل ۱۳ عدد است.

برای اینکه باقی ماندهٔ تقسیم $a-8$ بر عدد ۳۶، برابر ۲۱ باشد، لازم است $16-r$ مضرب ۳ شود که در این صورت مقادیر ۱، ۴، ۷ و ۱۰ برای r قابل قبول است، یعنی پیشامد تصادفی دارای ۴ عضو است، پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{4}{13}$ می‌باشد.

۱۳۵- گزینهٔ «۴»

$$۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \Rightarrow \min(m) = ۵$$

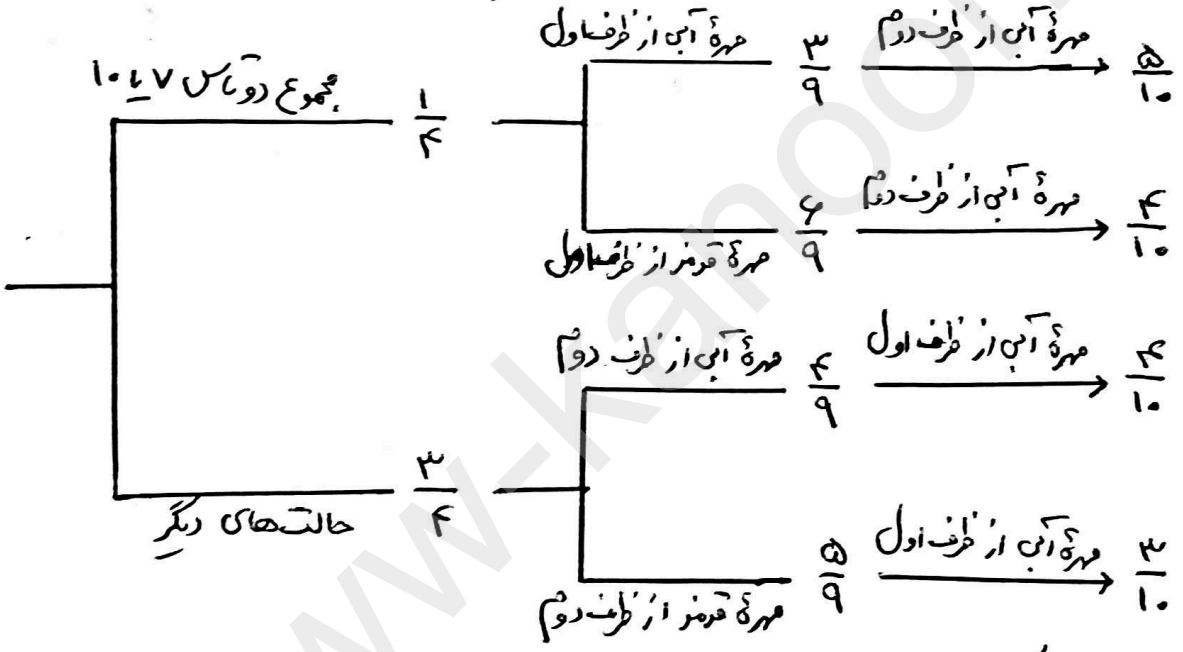
$$۵^{۳} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۱۱۰}} ۵^{۳۳۰} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵^{۲}} ۵^{۳۳۲} \overset{۳۱}{\equiv} ۲۵$$

۱۳۶- گزینهٔ «۲»

حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۷ یا ۱۰ می‌شود، عبارت‌اند از:

$$\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۶),(۵,۲),(۵,۵),(۶,۱),(۶,۴)\}$$

بنابراین احتمال آمدن مجموع برابر ۷ یا ۱۰، برابر $\frac{۹}{۳۶}$ یا $\frac{۱}{۴}$ است.



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\frac{۱}{۴}\left(\frac{۳}{۹}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۶}{۹}\times\frac{۴}{۱۰}\right)+\frac{۳}{۴}\left(\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۵}{۹}\times\frac{۳}{۱۰}\right)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۳۹}{۹۰}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۳۱}{۹۰}$$

$$=\frac{۱۳۲}{۳۶۰}=\frac{۱۱}{۳۰}$$

سؤال ۱۳۷ - گزینهٔ «۴»

$x_1+x_2+x_3=9 \longrightarrow$ تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$

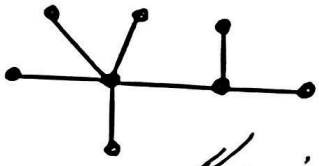
$x_4+x_5=7 \longrightarrow$ تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{7-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$

بنابراین تعداد کل جواب‌های طبیعی این دستگاه معادلات برابر است با :

$28 \times 6 = 168$

سؤال ۱۳۸ - گزینهٔ «۱»

مطابق شکل این درخت فاقد رأس درجهٔ ۲ است.



تذکر: مبحث درخت در گراف در کتاب نظام جدید ریاضیات گسسته موجود نیست.

سؤال ۱۳۹ - گزینهٔ «۱»

مربع لاتین را مطابق شکل پر می‌کنیم (در هیچ سطر یا ستونی نباید عدد تکراری داشته باشیم).

۲	۴	۳	۵	۱
۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	۴

بنابراین $a=4$ و $b=5$ است.

سؤال ۱۴۰ - گزینهٔ «۲»

سه رأس ۱۴، ۱۵ و ۱۶، تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند، پس مجموعهٔ $\{14, 15, 16\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف بوده و عدد احاطه‌گری گراف برابر ۳ است.

سؤال ۱۴۱ - گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(-1,\alpha,2)\\ \vec{b}=(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\left(2\alpha-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\alpha\right)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\parallel\vec{c}\Rightarrow\frac{2\alpha-\frac{4}{3}}{-1}=\frac{-\frac{2}{3}}{1}=\frac{-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\alpha}{-1}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2\alpha+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}\Rightarrow-2\alpha=-2\Rightarrow\alpha=1\\ \frac{2}{3}-\frac{4}{3}\alpha=-\frac{2}{3}\Rightarrow-\frac{4}{3}\alpha=-\frac{4}{3}\Rightarrow\alpha=1\end{cases}$$

پس به ازای $\alpha=1$، دو بردار $(\vec{a}\times\vec{b})$ و $\vec{c}$ موازی یکدیگرند.

تذکر: بردار $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ برداری هم راستا با بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ است و نیازی به محاسبهٔ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ در این سؤال وجود ندارد.

سؤال ۱۴۲ - گزینهٔ «۳»

$$\begin{bmatrix}5&-2\\4&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_1\\4b_2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5b_1-2b_2\\4b_1-ab_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_1\\4b_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5b_1-2b_2=4b_1\Rightarrow b_1=2b_2\\ 4b_1-ab_2=4b_2\Rightarrow 8b_2-ab_2=4b_2\Rightarrow 8-a=4\\ \Rightarrow a=4\end{cases}$$

سؤال ۱۴۳ - گزینهٔ «۴»

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8&4\\3&2&5\\6&9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&9&3\\7&8&4\\3&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&6&3\\8&7&4\\2&3&5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی}}=9+7+5=21$$

سؤال ۱۴۴ - گزینهٔ «۴»

نکته: ماتریس A^T (ترانهادهٔ ماتریس A) ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون های ماتریس A حاصل می شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد)

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+10 & a+2 \\ a+2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AA^TB = 52I \Rightarrow |AA^TB| = |52I| \Rightarrow |AA^T||B| = 52^2 \times 1$$

$$\Rightarrow \left[3(a^2+10) - (a+2)^2\right] \times 104 = 52^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 30 - a^2 - 4a - 4 = 26$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 4a = 0 \Rightarrow 2a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a، برابر ۲ است.

سؤال ۱۴۵ - گزینهٔ «۱»

گزینهٔ «۱»: بر یک خط در فضا بی شمار صفحه می توان عمود رسم کرد. هر خط موجود در هر کدام از این صفحه ها بر خط مفروض عمود است.

گزینهٔ «۲»: مجموعهٔ نقاط متساوی الفاصله از یک خط در فضا، روی سطح یک استوانه قرار می گیرند.

گزینهٔ «۳»: مجموعهٔ نقاطی در صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت به یک اندازه باشند، روی محیط یک بیضی قرار می گیرند ولی این موضوع در فضا صادق نیست.

گزینهٔ «۴»: مجموعهٔ خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه، زاویهٔ یکسان می سازند، روی دو خروطی قرار می گیرد.

سؤال ۱۴۶ - گزینهٔ «۳»

$$25(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 100 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

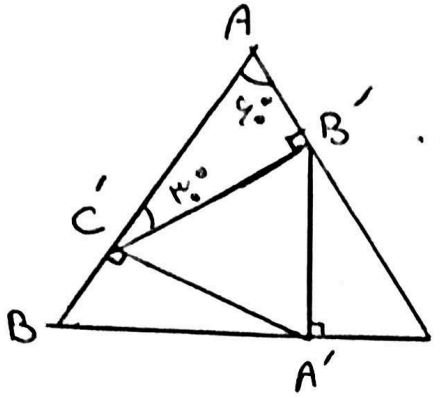
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{25}{4} \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow c^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

بیضی قائم و مرکز آن $O'(1,-1)$ است، پس $F(1, \frac{1}{2})$ و $F'(1, -\frac{5}{2})$ هستند. با توجه به مکان این دو نقطه سهمی رو به پایین باز شده و فاصلهٔ کانونی آن برابر $2c = 3$ است و داریم:

معادلهٔ سهمی: $(x-1)^2 = -12(y - \frac{1}{2}) \Rightarrow (x-1)^2 = -12y + 6$

تذکر: معادلهٔ بیضی در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد.

سؤال ۱۴۷- گزینهٔ «۱»



سه مثلث $AB'C'$ ، $BA'C'$ و $CA'B'$ همنهشت هستند.
در مثلث $AB'C'$ ، AB' ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° است، پس $AC' = ۲AB'$ است و داریم:

$$\overset{\triangle}{AB'C'}: AC'^{۲} = B'C'^{۲} + AB'^{۲}$$

$$\Rightarrow ۴AB'^{۲} = B'C'^{۲} + AB'^{۲} \Rightarrow B'C'^{۲} = ۳AB'^{۲}$$

$$\Rightarrow B'C' = \sqrt{۳}\,AB' \Rightarrow AB' = \frac{\sqrt{۳}}{۳}B'C' \quad (۱)$$

$$AB = AC' + BC' = AC' + AB' = ۳AB'$$

$$\xrightarrow{(۱)} AB = \sqrt{۳}\,B'C' \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C}} = (\sqrt{۳})^{۲} = ۳$$

سؤال ۱۴۸- گزینهٔ «۳»

$$M\hat{C}N = \frac{\overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{PQ}}{۲} = ۱۱۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{PQ} = ۲۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{NQ} = ۳۶۰^\circ - ۲۳۰^\circ = ۱۳۰^\circ$$

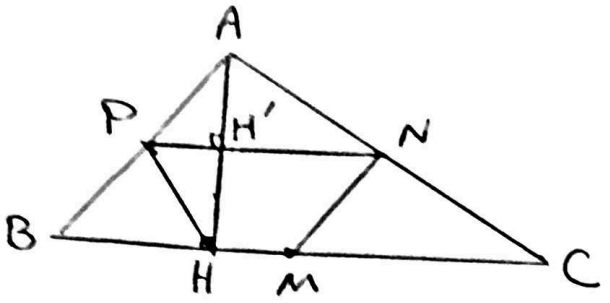
$$\hat{B} = \frac{(\overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{NQ}) - \overset{\frown}{PQ}}{۲} = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow (\overset{\frown}{MN} + ۱۳۰^\circ) - \overset{\frown}{PQ} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{PQ} - \overset{\frown}{MN} = ۱۰^\circ$$

$$M\hat{A}N = \frac{(\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{NQ}) - \overset{\frown}{MN}}{۲} = \frac{(\overset{\frown}{PQ} + ۱۳۰^\circ) - \overset{\frown}{MN}}{۲}$$

$$= \frac{(\overset{\frown}{PQ} - \overset{\frown}{MN}) + ۱۳۰^\circ}{۲} = \frac{۱۰^\circ + ۱۳۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

سؤال ۱۴۹- گزینهٔ «۴»



ابتدا طبق قضیهٔ هرون، مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم.

$$P = \frac{10+17+21}{2} = 24$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{24 \times 3 \times 7 \times 14} = 84$$

با توجه به اینکه $\frac{1}{2} \times 8 \times 21 = 84$، پس ارتفاع AH بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث (به طول ۲۱) وارد می‌شود. با فرض $AB=10$، $AC=17$ و $BC=21$ داریم:

$$NP = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 21 = 10,5$$

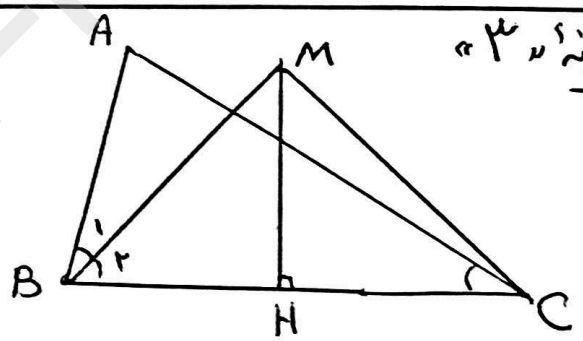
$$HH' = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$\overset{\triangle}{AHB}: \quad BH^2 = AB^2 - AH^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow BH = 6$$

$$MH = BM - BH = 10,5 - 6 = 4,5$$

$$S_{PNMH} = \frac{1}{2} HH'(NP + MH) = \frac{1}{2} \times 4 (10,5 + 4,5) = 30$$

سؤال ۱۵۰- گزینهٔ «۳»



M روی عمود منصف BC $\Rightarrow MB = MC \xrightarrow{M\hat{B}C} \hat{B}_2 = M\hat{C}B \xrightarrow{M\hat{C}B > A\hat{C}B}$

$$\hat{B}_2 > A\hat{C}B \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} > \hat{C} \Rightarrow \hat{B} > 2\hat{C}$$

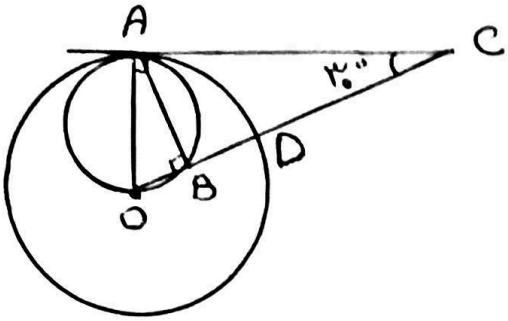
سؤال ۱۵۱ - گزینهٔ «۴»

$$DB = BC \Rightarrow CD = 2BC$$

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$AC^2 = BC \times CD = BC \times 2BC = 2BC^2 \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}$$

سؤال ۱۵۲ - گزینهٔ «۲»



$$\overset{\triangle}{OAC}: \sin\hat{C} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{OC}$$

$$\Rightarrow OC = 12$$

$$\overset{\triangle}{OAC}: \cos\hat{C} = \frac{AC}{OC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{12}$$

$$\Rightarrow AC = 6\sqrt{3}$$

زاویهٔ ABO زاویهٔ محاطی روبه رو به قطر OA در دایرهٔ کوچکتر است، پس $A\hat{B}O = 90^\circ$ است.
(می دانیم شعاع از نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس OA بر شعاع گذرنده از نقطهٔ A در دایرهٔ کوچکتر منطبق است و در نتیجه OA قطر دایرهٔ کوچکتر است)

طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویهٔ OAC داریم:

$$OA^2 = OB \times OC \Rightarrow 6^2 = OB \times 12 \Rightarrow OB = 3$$

$$BD = OD - OB = 6 - 3 = 3$$

سؤال ۱۵۳ - گزینهٔ «۳»

$$\hat{B} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$BM = BN \xrightarrow{B\hat{M}N} B\hat{M}N = B\hat{N}M = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

$$\Rightarrow O\hat{M}N = O\hat{N}M = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$$

$$\overset{\triangle}{OMN}: M\hat{O}N = 180^\circ - 2 \times 67,5^\circ = 45^\circ$$

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} OM \times ON \times \cos M\hat{O}N = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

سؤال ۱۵۴ - گزینهٔ «۲»

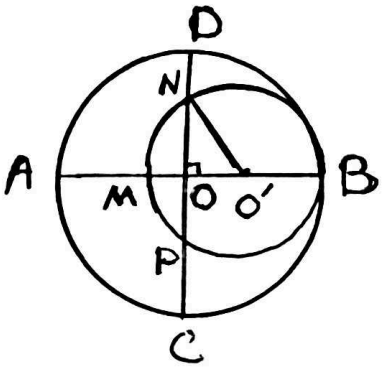
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (۲, -۲, -۱)\\ \overrightarrow{AC} = (۱, -۳, ۱)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-۵, -۳, -۴)$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۵)^۲+(-۳)^۲+(-۴)^۲} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

$$BC = \sqrt{(۰-۱)^۲+(-۱-۰)^۲+(۱+۱)^۲} = \sqrt{۶}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC \Rightarrow \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲} AH \times \sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$



سؤال ۱۵۵ - گزینهٔ «۳»

فرض کنید شعاع دایرهٔ بزرگ برابر R و شعاع دایرهٔ کوچک برابر r باشد. می دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می کند، پس $ON = OP = R - ۱۰$ است.

طبق روابط طولی در دایرهٔ بزرگ داریم:

$$ON \times OP = OB \times OM \Rightarrow (R-۱۰)^۲ = R(R-۱۶)$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۲۰R + ۱۰۰ = R^۲ - ۱۶R \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

$$ON = ۲۵ - ۱۰ = ۱۵$$

$$\overset{\triangle}{OO'N}: \; O'N^۲ = OO'^۲ + ON^۲ \Rightarrow r^۲ = (۲۵-r)^۲ + ۱۵^۲$$

$$\Rightarrow r^۲ = ۶۲۵ - ۵۰r + r^۲ + ۲۲۵$$

$$\Rightarrow ۵۰r = ۸۵۰ \Rightarrow r = ۱۷$$