(۱۰۱)

$ar^4 \leq 100 \ , \ r>1$

$a(2)^4 \leq 100 \Rightarrow a \leq \frac{100}{16} \to a = 1, 2, \dots, 6$

$a(3)^4 \leq 100 \Rightarrow a \leq 1/\dots \to a = 1$

جمعاً ۷ مورد. با توجه به اینکه گزینه بزرگتر از ۷ ندارد

(۱۰۲)

$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2m} = \frac{6}{m} \ , \ m>0$

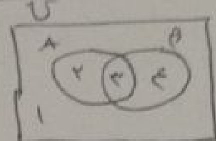
$y_{min} = m\left(\frac{6}{m}\right)^2 - 12\left(\frac{6}{m}\right) + 5m - 1 = 2$

$\xRightarrow{\times m} 5m^2 - 3m - 36 = 0 \to \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{12}{5} \ \times \end{cases}$

$x = \frac{6}{3} = 2$ محور تقارن

گزینه ۱

(۱۰۴)



با شکل فوق و جایگذاری به سادگی حاصل $(A-B)'$ بدست می آید. عبارت مسئله $=$

$(A-B)' = \{1, 3, 4\}$

۱۰۶

$S = -6 \qquad P = a$

$3\alpha^2 + 2\beta^2 = \frac{5}{2}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)$

$= \frac{5}{2}(36-2a) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$= \frac{5}{2}(36-2a) + \frac{1}{2}(-\sqrt{\Delta})(-6)$

$= 90 - 5a + 6\sqrt{9-a} = 12\sqrt{2} + 85$

$\Rightarrow a = 1$

۱۰۷

$\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{a^3-1} = 2 \Rightarrow a^6 = a^3 + 1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a^3-\sqrt{a^3}+1} &\overset{\text{گویا}}{=} \frac{a^3+\sqrt{a^3}+1}{(a^3+1)^2-a^3} \\ \frac{1}{a^3+\sqrt{a^3}+1} &\overset{\text{گویا}}{=} \frac{a^3-\sqrt{a^3}+1}{(a^3+1)^2-a^3} \end{aligned}\right\} + = 1$$

۱۰۸

$f(x) = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x \leq 0 \end{cases}$

$y = -x^3 \to \begin{cases} D = (-\infty, 0] \\ R = [0, +\infty) \end{cases}$

$x = -y^3 \Rightarrow y = -\sqrt[3]{x} \quad x \geq 0 \to$ گزینه ۴

۱۰۹

$A(x, a-x)$

$AB = \sqrt{(x+3)^2 + (a-x-2)^2} = \sqrt{29}$

$AC = \sqrt{(x+1)^2 + (a-x-4)^2} = 5$

$\begin{cases} x^2 + 6x + 9 + (a-x)^2 - 4(a-x) + 4 = 29 \\ x^2 + 2x + 1 + (a-x)^2 - 8(a-x) + 16 = 25 \end{cases}$

دو رابطه را از هم کم می کنیم:

$4x + 8 - 12 + 4(a-x) = 4 \Rightarrow a = 3$

۱۱۰

$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

$f \circ f \circ f(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(۱۱۱)

$5^x = 10 = 2 \times 5 \Rightarrow 5^{x-1} = 2 \Rightarrow 5 = 2^{\frac{1}{x-1}}$

$2^{f(x)} = 20 = 2^2 \times 5 = 2^2 \times 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{2+\frac{1}{x-1}}$

$2^{f(x)} = 2^{\frac{2x-1}{x-1}} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

روش دوم

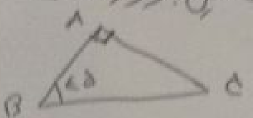
$5^x = 10 \Rightarrow x = \log_5 10 = \frac{1}{\log 5} = \frac{1}{0.7} = \frac{10}{7}$

$2^{f(x)} = 20 \Rightarrow f(x) = \log_2 20 = 2 + \log_2 5 = 2 + \frac{\log 5}{\log 2}$

$f(x) = 2 + \frac{0.7}{0.3} = \frac{13}{3}$

در گزینه با قرار دادن $x = \frac{10}{7}$ فقط گزینه ۴ است که مقدار $\frac{13}{3}$ حاصل می شود و گزینه این است

(۱۱۲) چون مثلث ABC دلخواه است پس این رابطه برای مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین برقرار است.



$2\cos A \sin B - \sin C = 2\times 0\times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱۳

$Max = \frac{1}{4} = |a| \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{4}$

$\frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow b = \pi$

$(\frac{5}{2}, 0) \in f \Rightarrow \frac{1}{4}\cos(\frac{5\pi}{4} + c) = 0 \to c = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{ac}{b} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$

---

(۱۱۴)

$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow x = \frac{-\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{\text{جمع}} \frac{9\pi}{4}$

---

(۱۱۵)

$Hop = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} \overset{x=-1}{=} -\frac{3}{2}$

---

(۱۱۶) در ضابطه $[x^2]-[x]$ تابع از بی شمار نقطه ناپیوسته است.

---

(۱۱۷)

$n=1 \Rightarrow p(x) = x^4 + 2x^3 + x^6 + 3x^5 + 16a$

$p(-2) = 0 \Rightarrow a = 2$

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$p(x) = (x+3)(x-1)Q(x) + ax + b$

$p(1) = a + b = 39$

تنها گزینه ۱ است که در آن $a+b=39$ است.

---

(۱۱۸) تعداد جملات دنباله را می نویسیم

$1, 2, \underbrace{3, 6, 12, 24, \ldots}_{\text{دنباله هندسی}}$

آخرین عضو دسته ۱۲ $= 3 + \frac{3(2^{10}-1)}{2-1} = 3072$

آخرین عضو دسته ۱۳ $= 3 + \frac{3(2^{11}-1)}{2-1} = 6144$

میانه $= \frac{3073 + 6144}{2} = 4608/5$

---

(۱۱۹)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{|ax|+2x}{|x|} = |a| + 2$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{|ax|+2x}{|x|} = |a| - 2$

چون مخرج ریشه دارد پس $b<0$ است.

$\begin{matrix} |a| + 2 = -b \\ |a| - 2 = b \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim \frac{1+2x}{|x|-2} = -3$

---

(۱۲۰)

$f(x) = g(x) \Rightarrow \sin x = \cos x \to x = \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x \to m = f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$y - \frac{3}{4}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})$

$y = 0 \Rightarrow -3\sqrt{2} = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

$-12\sqrt{2} + \pi\sqrt{2} = 4\sqrt{2}x$

$x = -3 + \frac{\pi}{4}$

$$g'(x) = f'(x+۱) + ۳f'(۳x+۱۰)$$

$$g'(-۲) = f'(-۱) + ۳f'(۴)$$

$$= \frac{۳}{۲} + ۳\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۶$$

$$f(x+۵) = f(x) \Rightarrow f'(x+۵) = f'(x)$$

$$\Rightarrow f'(-۱+۵) = f'(-۱) \Rightarrow f'(۴) = f'(-۱)$$

(۱۲۲)

$$\text{Hop} = \lim_{h\to ۰} \frac{-۲f'(۵-h)f(۵-h) + ۳f'(۵-h)}{۵-۲h}$$

$$= \frac{-۲f'(۵)f(۵) + ۳f'(۵)}{۵} = \frac{-۲\times\frac{۲۵}{۱۲}\times۲ + ۳\left(\frac{۲۵}{۱۲}\right)}{۵}$$

$$= \frac{\frac{-۲۵}{۳} + \frac{۲۵}{۴}}{۵} = \frac{-۱۰۰+۷۵}{۶۰} = -\frac{۲۵}{۶۰} = \frac{-۵}{۱۲}$$

$$f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + (x-۴)\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$$

$$f'(۵) = ۲ + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲}$$

(۱۲۳)

$$(-۱,۱)\in f \Rightarrow ۱ = ۱+۳a+b$$

$$\Rightarrow ۳a+b = ۰ \Rightarrow b = -۳a \Rightarrow \frac{b}{a} = -۳$$

(۱۲۴)

مجانب قائم $x = \frac{-(a-۱)}{a+۱}$

طول رأس $x_s = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱}{۳}$

$$\Rightarrow \frac{-a+۱}{a+۱} = \frac{-۱}{۳} \Rightarrow a = ۲$$

[illegible] $y = \frac{۲x+۳}{۳x+۱} \xrightarrow{y=۰} x = \frac{-۳}{۲}$