بنام خدا — رضا زینی وند ، دبیر ریاضی — ۱۴۰۱/۴/۱۴

۱۰۱ - ۱

$A=(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}) \quad A^2=3-\cancel{\sqrt{5}}+3+\cancel{\sqrt{5}}-2\sqrt{9-5}=6-4=2$

$A=-\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2}\right)=-\frac{2+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}=-1$

---

۱۰۲ - ۴

$t_5=14,\ t_7=17{,}2,\ a=(-14)\times\frac{1}{70}=-\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{5}(5)^2+b(5)+c=14 \rightarrow 5b+c=19$

$t_7=17{,}2 \rightarrow -\frac{1}{5}(7)^2+b(7)+c=17{,}2 \rightarrow 7b+c=27$

$\boxed{t_n=-\frac{1}{5}n^2+4n-1}$

$\begin{cases}5b+c=19\\7b+c=27\end{cases} \rightarrow \boxed{b=4},\ \boxed{c=-1} \Rightarrow \begin{cases}t_1=\frac{14}{5}\\t_{15}=14\end{cases} \rightarrow \frac{t_{15}}{t_1}=5$

---

۱۰۳ - ۲

(1) $y'=-2ax+a=0 \Rightarrow a(-2x+1)=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

(2) $y'=4bx-b=0 \Rightarrow b(4x-1)=0 \rightarrow x=\frac{1}{4}$

طول رأس سهمی‌ها

$x=\frac{1}{2} \rightarrow y=-a(\frac{1}{2})^2+a(\frac{1}{2})+2=2b(\frac{1}{2})^2-b(\frac{1}{2})-1 \Rightarrow a=-12$

$x=\frac{1}{4} \rightarrow y=12(\frac{1}{4})^2-12(\frac{1}{4})+2=2b(\frac{1}{4})^2-b(\frac{1}{4})-1 \rightarrow b=-6$

$\rightarrow b-a=-6+12=6$

---

۱۰۴ - ۲ حالت تساوی را حل می‌کنیم

(1) $-2\le\frac{1-3x}{x+1} \rightarrow -2x-2=1-3x \rightarrow x=3$

(2) $\frac{1-3x}{x+1}=0 \rightarrow 1-3x=0 \rightarrow x=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}<x<3$

$\xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{6}<\frac{x}{2}<\frac{3}{2} \Rightarrow [\frac{x}{2}]=\{0,1\} \rightarrow$ ۲ عضو دارد

---

۱۰۵ - ۳ تابع ثابت: $f(x)=k\ (k\in R)$

$f(x)=abx-ax^2+2b-2x-7x^2=(-a-7)x^2+(ab-2)x+2b \Rightarrow f(x)=2b=-\frac{4}{7}$

$a=-7$

$-7b-2=0 \rightarrow b=-\frac{2}{7}$

---

۱۰۶ - ۴

انتقال $g(x)=\frac{-1}{x-1}-2$

$f(x)=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{-1}{x-1}-2=\frac{1}{x} \rightarrow \frac{-2x+1}{x-1}=\frac{1}{x}$

$\rightarrow -2x^2+\cancel{x}=\cancel{x}-1 \rightarrow 2x^2=1 \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\pm\sqrt{2}$

فاصله از مبدا $(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}) \rightarrow \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

۲-۱۰۷

$S = a+b = a^2+b^2-12$, $P = a.b = a+b-1$ $(S-1)$ $\Big\}$ $S = S^2-2P-12 \to S = S^2-2S+2-12$

$\Rightarrow S^2-3S-10=0 \to \begin{cases} S=-2 & \text{غ ق} \\ S=5 \to a+b=5 \end{cases}$

۱-۱۰۸

مخرج مشترک $\to \frac{2-\sqrt{2-x}-\sqrt{2-x}-2}{4-(2-x)} = \frac{\sqrt{2-x}}{5} \to \frac{-2\sqrt{2-x}}{x+2} = \frac{\sqrt{2-x}}{5}$

$\Rightarrow x+2=-10 \to x=-12<0 \to$ ریشه مثبت ندارد

۱-۱۰۹

در گزینه‌ها ۱، ۲ و ۳ لازم است جای مولفه‌ها را عوض کنیم :

$(9,-2) \rightsquigarrow (-2,9) \to f(-2) = -3(-8)+2(-2)-11 = 9$ ✓ فقط گزینه ۱

۲-۱۱۰

$gog(0) = g(g(0)) = g(2) = 3$ ①

گزینه ۱، ۳، ۴ حذف

$f^{-1}(-2) = a \to f(a) = -2 \xrightarrow{f \text{ نزولی}} a<1 \to 1<g(a)<2 \xrightarrow{\times 3} 3<3g(a)<6$

۴-۱۱۱

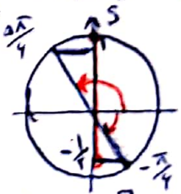
$f(3)=0 \xrightarrow[\text{نزولی}]{\text{اکیداً}} f(x) = 3-x$. $g(x) = \sqrt{x^2(3-x)}$

$x^2(3-x) \geq 0 \to 3-x \geq 0 \to x \leq 3 \to 0,1,2,3 \to$ ۴ عضو دارد

۲-۱۱۲

بازه ۲x را از x بدست آورید :

$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{\times 2} -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6} \to$



$\to -\frac{1}{2} < \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Rightarrow m \in (-1,5]$

۳-۱۱۳

$\sin x+\cos x = \frac{6\sqrt{5}}{10} \xrightarrow{\text{توان } 2} \underbrace{\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{1}+2\sin x\cos x}_{\sin 2x} = \frac{36\times 5}{100}$

$1+\sin 2x = 1/8 \to \sin 2x = 0/8 \to 2\sin x.\cos x = 0/8 \to \sin x\cos x = 0/4$

$\Rightarrow \tan x+\cot x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \to \boxed{\tan x = \frac{1}{2}}$ و $\cot x = 2$

نکته : $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$max = \frac{۵}{۲}$

$min = -\frac{۱}{۲}$

$|a| = \frac{max - min}{۲} = \frac{\frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۳}{۲}$; $c = \frac{max + min}{۲} = \frac{\frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲}}{۲} = ۱$ $\Big|$ $a = -\frac{۳}{۲}$; $ac = -\frac{۳}{۲} \times ۱ = -\frac{۳}{۲}$ ۴ - ۱۱۴

$\cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \cos(\frac{\pi}{۳} - x) = \sin(\frac{\pi}{۶} + x)$ ۲ - ۱۱۵

$\Rightarrow \sin^۲(x + \frac{\pi}{۶}) = ۱ \to \sin(x + \frac{\pi}{۶}) = \pm ۱ \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \frac{۴\pi}{۳} \end{cases}$

$x \in [۰, ۲\pi] \to x = \{\frac{\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳}\} \to$ دو جواب

$\log_۲ ۳ = a \to ۲^a = ۳$, $\log_۸ b = \frac{۲}{۳}(۱+a) \to b = ۲^{۲(۱+a)}$ - ۱۱۶

$b = ۲^{۲+۲a} = ۲^۲ \times ۲^{۲a} = ۴ \times (۳)^۲ = ۳۶ \xrightarrow{b=۳۶} \log(۳b - ۸) = \log_{۱۰} ۱۰۰ = ۲$

$(\frac{۱}{۲}, ۱) \to \sqrt[۳]{۲^{\frac{a}{۲}+b}} = ۱ \to \frac{a}{۲} + b = ۰ \to a + ۲b = ۰$ ۱ - ۱۱۷

$f(۵) = ۸ \to \sqrt[۳]{۲^{۵a+b}} = ۸ \to \cancel{۲}^{\frac{۵a+b}{۳}} = \cancel{۲}^۳ \to \frac{۵a+b}{۳} = ۳ \to ۵a + b = ۹$

$\to a = ۲ , b = -۱ \Rightarrow a - b = ۳$

$\sigma = ۲$, $\Sigma(x_i - \bar{x}) = ۰ \to a + ۰ + (-۱) + b + (-۱) + ۳ = ۰ \to a + b = -۱$ ۴ - ۱۱۸

$\sigma^۲ = \frac{a^۲ + ۱ + b^۲ + ۱ + ۹}{۶} = ۴ \to a^۲ + b^۲ = ۱۳ \xrightarrow{a>۰} \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۳ \end{cases}$

$Q_۲ = ۳$ $\quad \bar{x}_۱ \quad ۳ \quad \bar{x}_۲$ $\quad ۳ - \bar{x}_۱ = \bar{x}_۲ - ۳ \Rightarrow \bar{x}_۱ + \bar{x}_۲ = ۶$ ۳ - ۱۱۹

$\frac{۱}{\frac{n}{۲}} \Sigma x_i = ۶ \to \frac{\Sigma x_i}{n} = ۳ \to \bar{x} = ۳$

$\lim_{x \to -۱^+} \frac{|x+۱| + [x]}{x - [-x]} = \lim \frac{(x+۱) - ۱}{x - ۰} = \lim \frac{x}{x} = ۱$ ۳ - ۱۲۰

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{ax^۲ + x + ۱}}{x + ۲} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{a}|x + \frac{۱}{۲}|}{x + ۲} = \frac{۱}{۲} \to \sqrt{a} = \frac{۱}{۲} \to a = \frac{۱}{۴}$ ۱ - ۱۲۱

$\to f(x) = \sqrt{\frac{۱}{۴}x^۲ + x + ۱}$, $\lim_{x \to -۱} [\frac{۱}{x}] f(x) = \lim [\frac{۱}{-۱}] \sqrt{\frac{۱}{۴} + (-۱) + ۱} = (-۱) \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$

روش هم‌ارزی

۲ - ۱۲۲

$f(1) = \frac{1\sqrt{1}}{2+1-1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)} = \frac{0}{0}$ مبهم → هوپیتال

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f'(x)}{2} = f'(1) \to f'(1) = \frac{(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}})-(4x+1)(x\sqrt{x})}{(2x^2+x-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

---

۳ - ۱۲۳

معادله خط مماس داده شده:

$x=1 \to y=\frac{1+a}{a+1}=1 \to \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \to$ نقطه تماس

$y=2x+b \to 1=2+b \to b=-1$, $y'(1)=2$ شیب خط $\quad a-b=\frac{2}{3}$

$$\to \frac{(1)(ax+1)-a(x+a)}{(ax+1)^2}=2 \to \frac{1-a^2}{(1+a)^2}=2 \to \frac{1-a}{1+a}=2 \to a=-\frac{1}{3}$$

---

۱ - ۱۲۴

$y'(0)=0 \to 3x^2+2ax-2b=0 \xrightarrow{x=0} -2b=0 \to b=0$

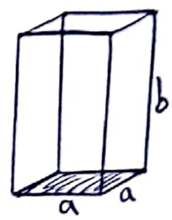
$y'(-2)=0 \to 3(-2)^2+2a(-2)=0 \Rightarrow 12-4a=0 \to a=3$

$\Rightarrow y=x^3+3x^2-4 \to \begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} \to \sqrt{(-2)^2+(4)^2}=\sqrt{20}=\boxed{2\sqrt{5}}$

---

۲ - ۱۲۵

$v=a^2b$, $S=a^2+4ab$ $\to$ $4=a^2b \to b=\frac{4}{a^2}$, $S=a^2+4a(\frac{4}{a^2})=a^2+\frac{16}{a}$



$S'(a)=2a-\frac{16}{a^2}=0 \to 2a^3-16=0 \to a=2, b=1 \to \boxed{S=12}$

---

۱ - ۱۲۶

R - R - A - R - A - R → ٤!×٢!

یا

R - A - R - A - R - R → ٤!×٢!

$4!+4! = 24+24 = 48\times 2 = 96$ حالت

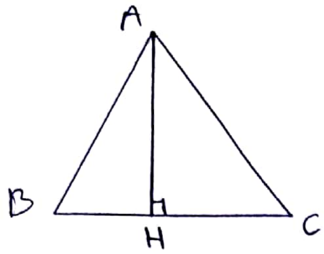
---

٤ - ۱۲۷

① → $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$



۱۲۸ـ ۳ ابتدا باید معادله خطی ضلع BC را بنویسیم.

$$BC:\ y-۳=\frac{۱۱-۳}{۷-۳}(x-۳) \rightarrow y-۳=۲(x-۳)=۲x-۶$$

$$\Rightarrow BC:\ ۲x-y-۳=۰$$

$$A\left|\begin{matrix}۱\\۹\end{matrix}\right.\ ,\ AH=\frac{|۲(۱)-۹-۳|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۵}}=۲\sqrt{۵}$$

۱۲۹ـ ۴ : طبق عکس قضیه تالس:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۲} \rightarrow DE \parallel BC$$

DE قاعده و h ارتفاع مشترک دو مثلث است پس $S_{CDE}=S_{BDE}$

۱۳۰ـ ۲

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+۲y-۴x=۰ \rightarrow O=(-۱,۲) \\ x^۲+y^۲-۲y-۲=۰ \rightarrow O'=(۰,۱) \end{cases}$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+۴^۲}=\sqrt{۵}\ ,\ r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+۲^۲-۴(-۲)}=\sqrt{۳} \quad \begin{cases} r\simeq ۲,۲ \\ r'\simeq ۱,۷ \end{cases}$$

$$r+r'\simeq ۲,۲+۱,۷=۳,۹ \quad ۱$$

$$OO'=\sqrt{(-۱-۰)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۲} \quad OO'\simeq ۱,۴$$

$OO' < r+r' \rightarrow$ دو دایره متقاطع هستند

موفق باشید