پاسخ تشریحی سوالات حسابان و گسسته
تیر ۱۴۰۱

۱۰۱

دنباله هندسی $a, aq, aq^۲, aq^۳, aq^۴$

$q^۴ < ۱۰۰ \longrightarrow q < \sqrt{۱۰} \Longrightarrow q = ۲$ یا ۳

۱ $if\ q=۲ \qquad a(۲)^۴ \leq ۱۰۰ \Rightarrow a \leq \frac{۱۰۰}{۱۶} = ۶,..$

$a = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ \longleftarrow$ ۶ حالت

$if:\ q = ۳ \qquad a(۳)^۴ \leq ۱۰۰ \longrightarrow a \leq ۱,...$

$\boxed{a=۱}$ ۱ حالت

گزینه ۴

۱۰۲

$y = mx^۲ - ۱۲x + ۵m - ۱ \xrightarrow{y_{min}=۲} \quad m>۰$

$$y_{min} = \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{-(۱۴۴ - ۴m(۵m-۱))}{۴m} = ۲$$

$\Longrightarrow ۵m^۲ - ۳m - ۳۶ = ۰ \longrightarrow (۵m-۱۵)(۵m+۱۲) = ۰$

$m = ۳$ یا $m = \frac{-۱۲}{۵}$ غق

$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{۲a} = ۲$

۱۰۳

$|A|=n$

$|C|=n+۲$

$|B|=m+۳$

$|D|=m$

$$|C\times B|=\frac{۵}{۴}|A\times B|$$

$$|C|\cancel{|B|}=\frac{۵}{۴}|A|\cancel{|B|}$$

$$(n+۲)=\frac{۵}{۴}(n)\rightarrow ۴n+۸=۵n$$

$$\boxed{۸=n}$$

$$|C\times B|=\frac{۳}{۲}|A\times D|\Rightarrow(n+۲)(m+۳)=\frac{۳}{۲}(n)(m)$$

$$\xrightarrow{n=۸} ۱۰(m+۳)=\frac{۳}{۲}(۸)(m)\rightarrow$$

$$۱۰m+۳۰=۱۲m \longrightarrow m=۱۵$$

$|A|=۸$, $|B|=۱۸ \longrightarrow$ جواب $=۱۰$

۱۰۴

$$A'\cup\Big(\underbrace{(B\cap A)\cap\big[\underbrace{(B\cup A)\cap B}_{B}\big]}_{A\cap B}\Big)=$$

$$=A'\cup(A\cap B)=(\underbrace{A'\cup A}_{U})\cap(A'\cup B)=$$

$$=U-(A\cap B')=(A\cap B')'=(A-B)'$$

(۱۰۵)

$$(\sim p \vee q) \Longleftrightarrow q \equiv \left[(\sim p \vee q) \Rightarrow q\right] \wedge \left[q \Rightarrow (\sim p \vee q)\right]$$

$$\equiv \left[(p \wedge \sim q) \vee q\right] \wedge \left[\sim q \vee (\sim p \vee q)\right]$$

$$\equiv \left[(p \vee q) \wedge \underbrace{(\sim q \vee q)}_{T}\right] \wedge \left[\underbrace{(\sim q \vee q)}_{T} \vee \sim p\right]$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim p) \equiv q$$

---

(۱۰۶)

$$x^{۲} + ۶x + a = 0 \xrightarrow{\alpha < \beta} \Delta = ۳۶ - ۴a$$

$$\alpha = \frac{-۶ - ۲\sqrt{۹ - a}}{۲} = -۳ - \sqrt{۹ - a}$$

$$\beta = -3 + \sqrt{9 - a}$$

$$۳\alpha^{۲} + ۲\beta^{۲} = ۳\left(۱۸ - a + ۶\sqrt{۹ - a}\right) + ۲\left(۱۸ - a - ۶\sqrt{۹ - a}\right)$$

$$= ۹۰ - ۵a + ۶\sqrt{۹ - a} = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵ \longrightarrow a = ۱$$

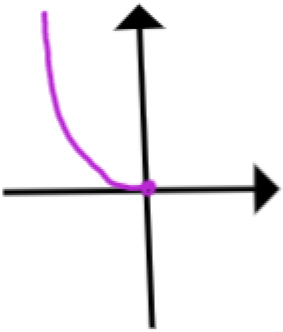
$$a^۳ = t \Rightarrow \frac{۱}{t+۱} + \frac{۱}{t-۱} = ۲ \Rightarrow \frac{۲t}{t^۲-۱} = ۲$$ ۱۰۷

$$t^۲ = t+۱$$

$$\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۲+۱}} + \frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳+۱}} = \frac{۱}{(t+۱)-\sqrt{t}} - \frac{۱}{(t+۱)+\sqrt{t}}$$

$$= \frac{۲(t+۱)}{(t+۱)^۲-t} = \frac{۲(t+۱)}{\underbrace{t^۲+t+۱}_{۲(t+۱)}} = ۱ \xrightarrow{\text{تیر ۱۴۰۱}} ①$$

$$f(x) = x^۲|x| = \begin{cases} x^۳ & x \geq ۰ \\ -x^۳ & x < ۰ \end{cases}$$ ۱۰۸



$$y = -x^۳ \qquad x = -\sqrt[۳]{y}$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt[۳]{x} \qquad D_{f^{-1}} = R_f = [۰, \infty)$$

۱۰۹

$A\left|\begin{matrix} x \\ a-x \end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix} -۳ \\ ۲ \end{matrix}\right.$ $C\left|\begin{matrix} -۱ \\ ۴ \end{matrix}\right.$

$|AB| = \sqrt{(x+۳)^۲ + (a-x-۲)^۲} = \sqrt{۲۹}$ (1)

$|AC| = \sqrt{(x+۱)^۲ + (a-x-۴)^۲} = ۵$ (2)

$$\begin{cases} (x+۳)^۲ + (a-x-۲)^۲ = ۲۹ \\ (x+۱)^۲ + (a-x-۴)^۲ = ۲۵ \end{cases} \Big) -$$

خوب

$۲(۲x+۴) + ۲(۲a-۲x-۶) = ۴$

$\cancel{۴x} + ۸ + ۴a - \cancel{۴x} - ۱۲ = ۴$

عالی

$۴a = ۸ \qquad a=2$

۱۱۰

$f(\sqrt{۲}) = \frac{1}{\sqrt{۲}}$, $f(\frac{1}{\sqrt{۲}}) = \sqrt{۲}$

$f\circ f\circ f(\sqrt{۲}) = f\circ f(\frac{1}{\sqrt{۲}}) = f(\sqrt{۲}) = \frac{1}{\sqrt{۲}}$

۱۱۱

$۵^{x} = ۱۰ \Longrightarrow x = \log_{۵}^{۱۰} = ۱ + \log_{۵}^{۲}$

$\log_{۵}^{۲} = x - 1$

$۲^{f(x)} = ۲۰ \longrightarrow f(x) = \log_{۲}^{۲۰} = ۲ + \log_{۲}^{۵}$

$f(x) = ۲ + \frac{1}{x-1} = \frac{۲x-1}{x-1}$

۱۱۲

$\hat{B} = ۴۵, \hat{A} = ۹۰, C = ۴۵$ قرار دهید

$۲\cos A \sin B - \sin C = 0 - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\sqrt{۲}/۲$

۱۱۳

$\max = |a| = \frac{۱}{۴} \quad a = \frac{۱}{۴}$

$f(\frac{۳}{۴}) = \frac{-۱}{۴} \rightarrow \frac{۱}{۴}\cos(\frac{۳}{۴}b+c) = \frac{-۱}{۴}$

$\cos(\frac{۳}{۴}b+c) = -۱ \quad \frac{۳}{۴}b+c=\pi$

$f(\frac{۵}{۴}) = ۰ \longrightarrow \frac{۱}{۴}\cos(\frac{۵}{۴}b+c) = ۰$

$\frac{۵}{۴}b+c = \frac{۳\pi}{۲}$

$\Longrightarrow b=\pi \,,\, c=\frac{\pi}{۴} \longrightarrow \frac{ac}{b} = \frac{۱}{۱۶}$

۱۱۴

$\sin x + \sqrt{۳}\cos x = \sqrt{۲}$

$\xrightarrow{\div ۲} \sin\frac{\pi}{۶}\sin x + \cos\frac{\pi}{۶}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$\cos(x-\frac{\pi}{۶}) = \cos\frac{\pi}{۴} \Longrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۴}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{۶} = -\frac{\pi}{۴}+۲k\pi \end{cases}$

$x = \frac{۵\pi}{۱۲}+2k\pi \,,\, x = -\frac{\pi}{۱۲}+۲k\pi$

$x = \frac{۵\pi}{۱۲}, \frac{-\pi}{۱۲}, \frac{۲۳\pi}{۱۲} \longrightarrow$ مج. $= \frac{۹\pi}{۴}$

(۱۱۵)

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{۳x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x}}\overset{H}{=}\lim\frac{\dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}-\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۴}}}{\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{۱-۳/۲}{۱/۳}=-۳/۲$$

---

(۱۱۶)

$y=[x^۲]-[x]$ $\quad\underbrace{|x^۳|>x^۲}_{x<-۱ \text{ یا } x>۱}$

در این صورت در نمودار نقاط به فرم $y=\pm\sqrt{n}$ که n طبیعی

طول نقاط ناپیوستگی است.

---

(۱۱۷)

$n=۱\quad P(x)=x^۴+۲x^۳+x^۶+۳x^۵+۱۴a$

$P(-2)=۰ \Longrightarrow a=۲$

$P(x)=(x-۱)(x+۳)q(x)+mx+n$

$P(1)=۳۹ \longrightarrow m+n=۳۹ \longrightarrow m=-۵\quad R=-۵x+۴۴$

$P(-۳)=۸۱ \qquad -۳m+n=۵۹ \qquad n=۴۴$

$$f(x)=\frac{|ax+1|+۲x}{|x|+b}$$ $b<۰$ (۱۱۹)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{|a|x+۲x}{x}=|a|+۲=-b$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f=\frac{-|a|x+۲x}{-x}=+|a|-۲=b$

پس $a=۰$ لذا $b=2$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1+۲x}{|x|-۲}=\frac{۳}{-2}$$

(۱۱۲

$\frac{۳}{۲}\sin x=\frac{1}{۲}\cos x+\sin x\longrightarrow \tan x=1 \quad A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۴}\\ \frac{۳\sqrt{۲}}{۴}\end{matrix}\right.$

$f'(x)=\cos x-\frac{1}{۲}\sin x \xrightarrow{x=\pi/۴} m=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

$$y-\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)\Big\downarrow y=۰$$

$$x=\frac{\pi}{۴}-۳$$

(۱۲۱)

$$f(x+۵)=f(x)\Longrightarrow f'(x+۵)=f'(x)$$

$$\Longrightarrow f'(-۱)=f'(۴)=\frac{۳}{۲}$$

$$g'(x)=f'(x+۱)+۳f'(۳x+۱۰)$$

$$g'(-۲)=f'(-۱)+۳f'(۴)=۴f'(-۱)=۶$$

---

(۱۲۲)

$$f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}\qquad f(۵)=۲$$

$$f'(x)=\sqrt[۳]{x+۳}+(x-۴)\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+3)^{۲}}}$$

$$f'(۵)=۲+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲۵}{۱۲}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-\overset{f(۵)}{\textcircled{۲}})}{h(۵-h)}=(-f'(۵))\times\frac{f(۵-h)-۱}{۵-h}$$

$$=-\frac{۲۵}{۱۲}\times\frac{۱}{۵}=\frac{-۵}{۱۲}$$

(۱۲۵)

$\overset{ز}{\boxed{۴}}\ \overset{ف}{\boxed{۵}}\ \overset{ز}{\boxed{۴}}\ \overset{ف}{\boxed{۴}}\ \overset{ز}{\boxed{۳}} = ۹۶۰$

$\xrightarrow{+} ۲۱۶۰$

$\overset{\underline{L}}{\overset{ف}{\boxed{۵}}}\ \overset{ز}{\boxed{۵}}\ \overset{ف}{\boxed{۴}}\ \overset{ز}{\boxed{۴}}\ \overset{ف}{\boxed{۳}} = ۱۲۰۰$

---

(۱۲۶)

$a = p(x)\ ,\ b = p(y)\ ,\ c = p(z)$

$a + b + c = 1 \longrightarrow a + c = \frac{۴}{۵}$

$b = \frac{1}{۵}\ ,\ \frac{1}{۲۵} = ac$

$x^۲ - \frac{۴}{۵}x + \frac{1}{۲۵} = 0$ پس a و c ریشه‌های معادله

$\Delta = \frac{۱۲}{۲۵}$

$x = \dfrac{\frac{۴}{۵} \pm \frac{۲\sqrt{۳}}{۵}}{۲}$ $\xrightarrow{\text{ریشه کوچیکتر}}$ $\frac{۲}{۵} - \frac{\sqrt{۳}}{۵}$ [illegible]

$= \dfrac{۲ - \sqrt{۳}}{۵}$

۱۲۷

گوی اول — گوی دوم

$$۱ \longrightarrow \times$$

$$۲ \longrightarrow ۱$$

$$۳ \longrightarrow ۱،۲$$

$$\vdots$$

$$۱۶ \longrightarrow ۱،۲،\dots،۱۵$$

$$P = \frac{۱۵}{۱+۲+۳+\dots+۱۵} = \frac{۱۵}{\frac{۱۵(۱۶)}{۲}} = \frac{۱}{۸}$$

۱۲۸

$$(\sigma_{\bar{x}})_۲ = \frac{۲}{۳}(\sigma_{\bar{x}})_۱ \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n_۲}} = \frac{۲}{۳}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n_۱}}$$

$$\frac{۳}{\sqrt{n_۲}} = \frac{۲}{\sqrt{n_۱}} \qquad \frac{n_۲}{n_۱} = \frac{۹}{۴} = ۲،۲۵$$

(۱۲۹)

$(x_i - \bar{x})^۲ : ۹, a^۲, ۰, ۹, b^۲, ۱$

$$\sigma^۲ = \frac{۱۹ + a^۲ + b^۲}{۶} = ۴ \Longrightarrow a^۲ + b^۲ = ۵$$

$a, b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a = \pm ۲ \wedge b = \pm ۱$ یا $a = \pm ۱ \wedge b = \pm ۲$

---

(۱۴۴)

$y = \frac{۳x - ۱}{x + ۲}$ $\quad x + ۲ \mid ۳x - ۱ \Longrightarrow x + ۲ \mid -۷ \xrightarrow{} $ ۴ نقطه

$x + ۲ = \pm ۱, \pm ۷ \longrightarrow$

۱۴۵

$a^۲ - ۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۴a + ۶ \Longrightarrow (a-۱)(a+۱) \overset{۱۰}{\equiv} \overbrace{۴a - ۴}^{۴(a-۱)}$

$a + ۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \qquad a \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \qquad a^۲ + a \overset{۱۰}{\equiv} ۹ + ۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$

$۱۲x + ۱۱y \overset{۱۱}{\equiv} ۷۵۹ \quad x \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \quad x = ۱۱k \geq ۱$ $\left\{ k \geq \frac{۱}{۱۱} \right\}$ ⑭⑥

$$۱۲ \times ۱۱k + ۱۱y = ۷۵۹$$

$$۱۱y = ۷۵۹ - 12 \times ۱۱k$$

$$y = ۶۹ - ۱۲k \geq ۰ \quad k \leq \frac{۶۹}{۱۲} = ۵٫..$$

$$k = ۱, ۲, ۳, ٤, ۵$$

(۱۴۷

$$\frac{p(p-۱)}{۲} = (p-۱)^۲ - ۲(p-۱)$$

$$\frac{p}{۲} = p - ۱ - 2$$

$$\frac{p}{۲} = p - ۳ \qquad p = 2p - ۶$$

$$p = ۶$$

۱۴۸

$$۹_+ = \frac{۳}{۴}(a+b+c) \Longrightarrow \frac{۱۴+(a+b+c)}{۲} = \frac{۳}{۴}(a+b+c)$$

$$a+b+c=۸$$

۴, ۲, ۲

۶, ۱, ۱ — یک [illegible] نمی‌شود

۵, ۲, ۱

۴, ۳, ۱

۳, ۳, ۲

گراف همبند:
تعداد یال‌ها فقط
عددی زوج است.

(۱۴۹

اعداد یک رقمی $a=۸$ ①

اعداد دو رقمی $\overline{ab}$ $a+b=۸ \overset{a\geq ۱}{\Longrightarrow} a+b=۷$ $\binom{۸}{۱}=۸$

اعداد سه رقمی $\overline{abc}$ $a+b+c=۸ \overset{a\geq ۱}{\Longrightarrow} a+b+c=۷$

$\binom{۹}{۲}=۳۶$

۱۴۹

$\overline{abcd} \xrightarrow[a<۶]{a\geq ۱} a+b+c+d=۸$

$\xrightarrow[a\leq ۴]{a\geq ۱} a+b+c+d=7 \xrightarrow{a\geq ۵}$

$\binom{۱۰}{۳}-\binom{۵}{۳}=۱۲۰-۱۰=۱۱۰$

ج

$=۱+۸+۳۶+۱۲۰=۱۱۵$

۱۵۰

تعداد زیرمجموعه‌ها / شکل $=۲^{۶}=۶۴ \xrightarrow{+۱} ۶۵$

۱

۱۱۸) تعداد اعداد حذف شده:

۱, ۲, ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ... , $a_{12}, a_{13}, \ldots$

اگر دقت کنید از جمله دوم به بعد دنباله هندسی است پس

$a_{12} =$ دهمین جمله دنباله هندسی $= aq^{9} = ۳ \times ۲^{9} = ۱۵۳۶$

$a_{13} = aq^{10} = ۳ \times ۱۰۲۴ = ۳۰۷۲$

بقیه لیست دوم (۱۵۳۷, ۱۵۳۸, ...

$$\text{میانگین} = \frac{\checkmark\ \frac{۳۰۷۲}{۲}\left(۲(۱۵۳۷) + ۳۰۷۱\right)}{۳۰۷۲}$$

$= 3۰۷۲,۵$