

گزینه ۴

سوال ۱۰۱

دنباله هندسی گفته شده به صورت روبرو نوشته می شود:

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4$$

$$1 \leq aq^4 \leq 100 \rightarrow \begin{cases} q = 2 \rightarrow 1 \leq 16a \leq 100 \xrightarrow{a \in \{1,2,\dots,100\}} 1 \leq a \leq 6 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \\ a = 3 \\ a = 4 \\ a = 5 \\ a = 6 \end{cases} \\ q = 3 \rightarrow 1 \leq 81a \leq 100 \xrightarrow{a \in \{1,2,\dots,100\}} a = 1 \end{cases}$$

$$a = 1, q = 2 \rightarrow 1, 2, 4, 8, 16$$

$$a = 2, q = 2 \rightarrow 2, 4, 8, 16, 32$$

$$a = 3, q = 2 \rightarrow 3, 6, 12, 24, 48$$

$$a = 4, q = 2 \rightarrow 4, 8, 16, 32, 64$$

$$a = 5, q = 2 \rightarrow 5, 10, 20, 40, 80$$

$$a = 6, q = 2 \rightarrow 6, 12, 24, 48, 96$$

$$a = 1, q = 3 \rightarrow 1, 3, 9, 27, 81$$

گزینه ۱

سوال ۱۰۲

چون تابع مینیمم دارد، بنابراین سهمی رو به بالا بوده و $m > 0$ است.

$$y_{min} = \frac{-\Delta}{4a} = 2 \rightarrow \frac{-(144 - 4m(5m - 1))}{4m} = 2 \rightarrow \frac{20m^2 - 4m - 144}{4m} = 2$$

$$\rightarrow \frac{4(5m^2 - m - 36)}{4m} = 2 \rightarrow \frac{5m^2 - m - 36}{m} = 2 \rightarrow 5m^2 - m - 36 = 2m$$

$$\rightarrow 5m^2 - 3m - 36 = 0 \rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(5)(-36)}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{729}}{10} = \frac{3 \pm 27}{10}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{12}{5} \end{cases} \text{ غرق } \quad \text{محور تقارن } x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2m} = 2$$

گزینه ۴

سوال ۱۰۳

$$|C| = |A| + 2 \quad (*)$$

$$|D| = |B| - 3 \quad (**)$$

$$|C \times B| = 1.25|A \times B| \rightarrow |C| \times |B| = 1.25|A| \times |B| \rightarrow |C| = 1.25|A|$$

$$* \rightarrow |A| + 2 = 1.25|A| \rightarrow 0.25|A| = 2 \rightarrow |A| = 8 \rightarrow |C| = 10$$

$$|C \times B| = 1.5|A \times D| \rightarrow |C| \times |B| = 1.5|A| \times |D| \rightarrow 10|B| = 1.5 \times 8|D|$$

$$** \rightarrow 10|B| = 12(|B| - 3) \rightarrow 10|B| = 12|B| - 36 \rightarrow 2|B| = 36 \rightarrow |B| = 18$$

$$|B| - |A| = 18 - 8 = 10$$

گزینه ۱

سوال ۱۰۴

طبق قانون جذب داریم:

$$A' \cup ((B \cap A) \cap [(B \cup A) \cap B]) = A' \cup ((B \cap A) \cap [B])$$

چون $B \cap A \subseteq B$ است، داریم:

$$A' \cup ((B \cap A) \cap [B]) = A' \cup (A \cap B)$$

طبق قانون توزیع پذیری:

$$A' \cup (A \cap B) = (A' \cup A) \cap (A' \cup B) = U \cap (A' \cup B) = A' \cup B$$

در ادامه از قوانین دمورگان کمک می‌گیریم:

$$A' \cup B = (A \cap B')' = (A - B)'$$

گزینه ۲

سوال ۱۰۵

روش اول: قوانین گزاره‌ها

$$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q \equiv [(\sim p \vee q) \Rightarrow q] \wedge [q \Rightarrow (\sim p \vee q)] \equiv [\sim(\sim p \vee q) \vee q] \wedge [\sim q \vee (\sim p \vee q)]$$

$$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [(\sim q \vee q) \vee \sim p] \equiv [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge T \equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee q) \equiv p \vee q$$

روش دوم:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$	$p \vee q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F	F

گزینه ۱

سوال ۱۰۶

$$x^2 + 6x + a = 0 \rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{a} = -6 \\ P = \frac{c}{a} = a \end{cases}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{36 - 4a}$$

چون $\alpha < \beta$ است، بنابراین $\alpha - \beta < 0$ و داریم:

$$\alpha - \beta = -\sqrt{36 - 4a}$$

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85 \rightarrow \frac{5}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\rightarrow \frac{5}{2}(S^2 - 2P) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\rightarrow \frac{5}{2}(S^2 - 2P) - \frac{1}{2}S\sqrt{36 - 4a} = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\rightarrow \frac{5}{2}(36 - 2a) - \frac{1}{2}(-6)\sqrt{36 - 4a} = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\rightarrow 90 - 5a + 3\sqrt{36 - 4a} = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\rightarrow \begin{cases} 90 - 5a = 85 \rightarrow a = 1 \\ 3\sqrt{36 - 4a} = 12\sqrt{2} \rightarrow 36 - 4a = 32 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

گزینه ۳

سوال ۱۰۷

$$a^3 = t \rightarrow \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} = 2 \rightarrow \frac{t-1+t+1}{t^2-1} = 2 \rightarrow 2t = 2(t^2-1) \rightarrow t^2 = t+1$$

$$\left[\frac{1}{t-\sqrt{t}+1} + \frac{1}{t+\sqrt{t}+1} \right]^{1401} = \left[\frac{t+\sqrt{t}+1+t-\sqrt{t}+1}{(t+1-\sqrt{t})(t+1+\sqrt{t})} \right]^{1401} = \left[\frac{2(t+1)}{(t+1)^2-t} \right]^{1401}$$

$$= \left[\frac{2t^2}{t^2+t+1} \right]^{1401} = \left[\frac{2t^2}{t^2+t^2} \right]^{1401} = 1$$

گزینه ۴

سوال ۱۰۸

$$f(x) = x^2 \sqrt{x^2} = x^2 |x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اکیدا صعودی} \\ \text{اکیدا نزولی} \end{array}$$

$$-x^3 = y \rightarrow x^3 = -y \rightarrow x = -\sqrt[3]{y} \rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$$

$$x \leq 0 \rightarrow x^3 \leq 0 \rightarrow -x^3 \geq 0 \rightarrow y \geq 0$$

می‌دانیم $R_f = D_{f^{-1}}$ بنابراین $x \geq 0$

گزینه ۱

سوال ۱۰۹

$$A(x, y)$$

$$AB = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4} = \sqrt{29}$$

$$AC = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16} = 5$$

$$\text{معادلات فوق را به توان دو می‌رسانیم} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y = 16 \\ x^2 + y^2 + 2x - 8y = 8 \end{cases}$$

با تفریق معادلات بالا داریم:

$$4x + 4y = 8 \rightarrow x + y = 2 \xrightarrow{\text{معادله خط}} a = 2$$

گزینه ۱

سوال ۱۱۰

$$f \circ f \circ f(\sqrt{2}) = f(f(f(\sqrt{2})))$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}} \rightarrow f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2})}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(f(\sqrt{2})) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$f(f(f(\sqrt{2}))) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

گزینه ۳

سوال ۱۱۱

$$5^x = 10 \rightarrow x = \log_5 10 = \log_5(2 \times 5) = \log_5 2 + 1 \rightarrow \log_5 2 = x - 1$$

$$2^{f(x)} = 20 \rightarrow f(x) = \log_2 20 = \frac{\log_5 20}{\log_5 2} = \frac{\log_5(2^2 + 5)}{\log_5 2} = \frac{2 \log_5 2 + 1}{\log_5 2} = \frac{2(x - 1) + 1}{x - 1}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$$

گزینه ۲

سوال ۱۱۲

با عددگذاری داریم:

$$A = 90, B = 45, C = 45$$

$$2 \cos A \sin B - \sin C = 2(0) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۱

سوال ۱۱۳

$$T = 2 \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) = 2 \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \rightarrow |b| = \pi \xrightarrow{b>0} b = \pi$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \rightarrow a \cos\left(\frac{\pi}{4} + c\right) = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} + c = \frac{\pi}{2} \rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$f_{Max} = |a| = \frac{1}{4} \rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \pm \frac{1}{4} \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow f(0) = \pm \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$$

با توجه به نمودار مشخص است که $f(0) > 0$ است، بنابراین

$$a = +\frac{1}{4} \rightarrow \frac{ac}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

گزینه ۳

سوال ۱۱۴

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = -\frac{\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \\ x = \frac{5\pi}{12} \end{matrix} \rightarrow \text{مجموع} = \frac{9\pi}{4}$$

گزینه ۴

سوال ۱۱۵

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

سوال ۱۱۶

گزینه ۳

$$|x^3| = x^2 \rightarrow x^2|x| = x^2 \rightarrow x^2(|x| - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ |x| - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & -1 < x < 0 \text{ or } 0 < x < 1 \\ 1 + \cos \pi x & x = 0, \pm 1 \\ [x^2] - [x] & x < -1 \text{ or } x > 1 \end{cases}$$

ضابطه سوم به ازای تمام x هایی که x^2 صحیح می‌شود، اما x صحیح نمی‌شود ناپیوسته است. بنابراین بی‌شمار نقطه ناپیوستگی داریم.

سوال ۱۱۷

گزینه ۴

مقدار n را به دلخواه برابر ۱ قرار می‌دهیم.

$$n = 1 \rightarrow P(x) = x^4 + 2x^3 + x^6 + 3x^5 + 16a$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow P(-2) = 0 \rightarrow 16 - 16 + 64 - 96 + 16a = 0 \rightarrow a = 2$$

در تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + 2x - 3$ باقیمانده از درجه حداکثر یک است، بنابراین داریم:

$$P(x) = x^6 + 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 32 = (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b$$

$$\rightarrow x^6 + 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 32 = (x - 1)(x + 3)Q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} P(1) = 39 \rightarrow a + b = 39 \\ P(-3) = 59 \rightarrow -3a + b = 59 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 44 \end{cases} \rightarrow R(x) = -5x + 44$$

سوال ۱۱۸

گزینه ۳

$$\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9, \dots, 12\}, \dots$$

اعداد آخر هر دسته (به جز دسته اول) تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.

$$a_2 = 3, \quad a_3 = 6 = 3 \times 2^1, \quad a_4 = 12 = 3 \times 2^2, \quad \dots$$

$$a_{12} = 3 \times 2^{10} = 3072, \quad a_{13} = 3 \times 2^{11} = 6144$$

$$\text{دسته سیزدهم} = \{3073, 3074, \dots, 6144\} \rightarrow \bar{x} = \frac{3073+6144}{2} = 4608.5$$

گزینه ۱

سوال ۱۱۹

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{x} = \frac{(a+2)x}{x} = a+2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-ax + 2x}{-x} = \frac{(-a+2)x}{-x} = a-2$$

$$|x| + b = 0 \rightarrow |x| = -b \rightarrow \begin{cases} -b \geq 0 \rightarrow b \leq 0 \\ x = \pm b \end{cases}$$

حالت اول:

$$\begin{cases} a+2 = b \\ a-2 = -b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-b = -2 \\ a+b = 2 \end{cases} \rightarrow a=0, b=2 \text{ غقق}$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} a+2 = -b \\ a-2 = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b = -2 \\ a-b = 2 \end{cases} \rightarrow a=0, b=-2$$

$$f(x) = \frac{1+2x}{|x|-2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{-1} = -3$$

گزینه ۲

سوال ۱۲۰

$$f(x) = g(x) \rightarrow \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{3}{2} \sin x \rightarrow \sin x = \cos x \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow y - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{y=0} -\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow -3 = x - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} - 3$$

گزینه ۳

سوال ۱۲۱

$$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$$

$$x = -2 \rightarrow g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4) \xrightarrow{f'(-1)=f'(4)} g'(-2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

گزینه ۲

سوال ۱۲۲

$$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3} \rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + (x-4) \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} \rightarrow f'(5) = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$$

$$f(5) = 2$$

با استفاده از هوپیتال نسبت به h داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2f'(5-h)f(5-h) + 3f'(5-h)}{5-2h} \\ &= \frac{-2f'(5)f(5) + 3f'(5)}{5} = \frac{-2 \times \frac{25}{12} \times 2 + 3 \times \frac{25}{12}}{5} = \frac{-\frac{25}{12}}{5} = -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

گزینه ۱

سوال ۱۲۳

$$f(-1) = 1 \rightarrow 1 + 3a + b = 1 \rightarrow 3a + b = 0 \quad (*)$$

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ x = -1 < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = -x^3 + 3ax^2 + b \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6ax$$

$$\rightarrow f'(-1) = -3 - 6a = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

گزینه ۴

سوال ۱۲۴

$$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{مجانِب قائم} = \frac{-d}{c} = \frac{1-a}{a+1} = \frac{-1}{3} \rightarrow 3 - 3a = -a - 1 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

$$y = \frac{2x + 3}{3x + 1} \xrightarrow{y=0} 2x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

گزینه ۳

سوال ۱۲۵

دو حالت می‌توانیم در نظر بگیریم.
حالت اول: رقم سمت چپ فرد باشد.

$$\frac{5}{\text{فرد}} \times \frac{5}{\text{زوج}} \times \frac{4}{\text{فرد}} \times \frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{3}{\text{فرد}} = 1200$$

حالت دوم: رقم سمت چپ زوج باشد. بدیهی است در این حالت عدد صفر نمی‌تواند به عنوان رقم سمت چپ انتخاب شود.

$$\frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{5}{\text{فرد}} \times \frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{4}{\text{فرد}} \times \frac{3}{\text{زوج}} = 960$$

$$1200 + 960 = 2160$$

گزینه ۲

سوال ۱۲۶

$P(y)$ واسطه هندسی $P(x)$ و $P(z)$ است. بنابراین داریم:

$$P(x) = \frac{1}{5q}, \quad P(y) = \frac{1}{5}, \quad P(z) = \frac{q}{5}$$

$$\frac{1}{5q} + \frac{1}{5} + \frac{q}{5} = 1 \xrightarrow{\times 5q} 1 + q + q^2 = 5q \rightarrow q^2 - 4q + 1 = 0 \rightarrow q = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$q = \begin{cases} 2 + \sqrt{3} > 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ غقق}$$

$$P(x) = \frac{1}{5(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{5}, \quad P(y) = \frac{1}{5}, \quad P(z) = \frac{2 - \sqrt{3}}{5}$$

بنابراین کمترین میزان احتمال مربوط به $P(z)$ می‌باشد.

گزینه ۳

سوال ۱۲۷

پیشامد A را ۱۶ بودن گوی اول و پیشامد B را کمتر بودن شماره گوی دوم از گوی اول تعریف می‌کنیم.

واضح است که اگر گوی اول ۱۶ بیاید، قطعا گوی دوم عددی کمتر از گوی اول خواهد داشت. بنابراین $P(A \cap B) = P(A)$ و داریم:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

گزینه ۲

سوال ۱۲۸

$$\frac{\sigma_{\bar{x}_2}}{\sigma_{\bar{x}_1}} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{9}{4} = 2.25$$

گزینه ۲

سوال ۱۲۹

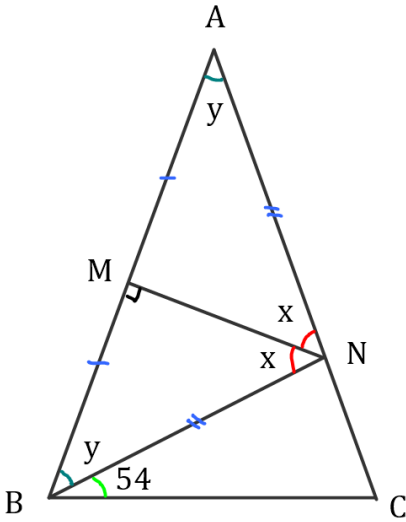
$$\text{واریانس} = \frac{9+a^2+0+9+b^2+1}{6} = 4 \rightarrow a^2 + b^2 = 5 \xrightarrow{a,b \in \mathbb{Z}} \{a, b\} = \{\pm 1, \pm 2\}$$

از طرفی چون مجموع انحراف داده‌ها از میانگین باید برابر صفر باشد، a و b نمی‌توانند هم‌علامت باشند.

$$ab = -2$$

گزینه ۳

سوال ۱۳۰



$MN \rightarrow$ عمود منصف $\rightarrow AM = BM$

$$\left. \begin{array}{l} AM = BM \\ \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \\ MN = MN \end{array} \right\} \text{فرض} \rightarrow AMN \cong BMN \rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{MAN} = y$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180 \rightarrow y + y + 54 + y + 54 = 180$$

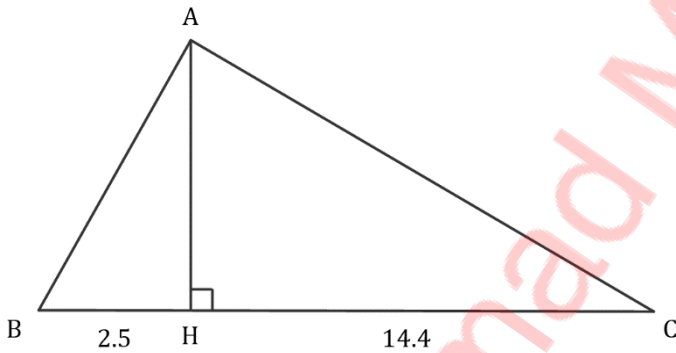
$$\rightarrow y = 24$$

در مثلث MBN داریم:

$$y + x = 90 \rightarrow x = 66$$

گزینه ۲

سوال ۱۳۱



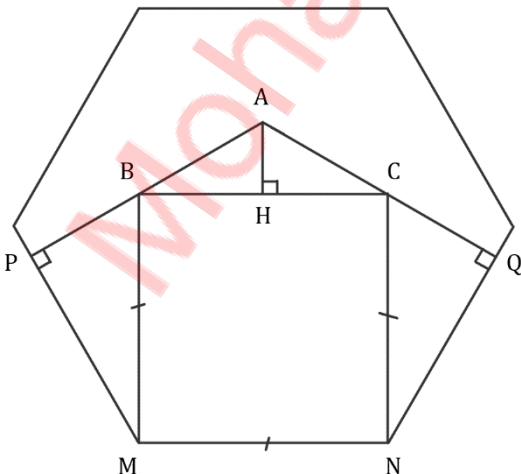
$$AH^2 = BH \times HC$$

$$AH^2 = 2.5 \times 14.4$$

$$\rightarrow AH = \sqrt{2.5 \times 14.4} = \sqrt{36} = 6$$

گزینه ۱

سوال ۱۳۲



$$MN = BC = 6 \rightarrow BH = HC = 3$$

$$\widehat{PMN} = 120 \rightarrow \widehat{PMB} = 30 \rightarrow \widehat{PBM} = 60$$

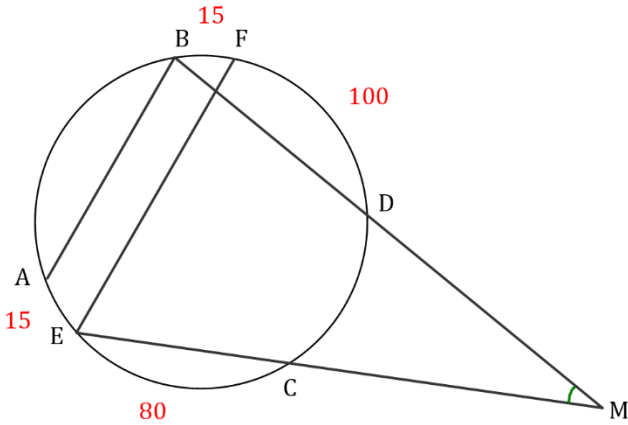
$$\widehat{ABH} = 180 - 60 - 90 = 30 \rightarrow \widehat{BAH} = 60$$

$$\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} \rightarrow AH = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$S_{ABH} = S_{AHC} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow S_{ABC} = 3\sqrt{3}$$

گزینه ۴

سوال ۱۳۳



$$AB + 15 + 100 + CD + 80 + 15 = 360$$

$$AB + CD = 150$$

$$\widehat{M} = \frac{BE - CD}{2} \rightarrow \frac{AB + 15 - CD}{2} = 20$$

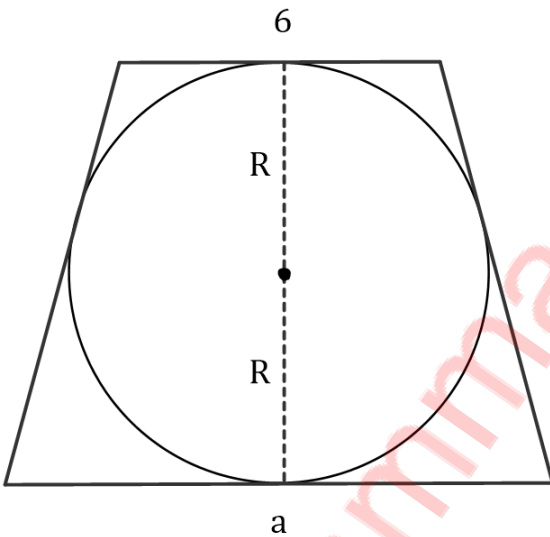
$$\rightarrow AB - CD = 25$$

$$\begin{cases} AB + CD = 150 \\ AB - CD = 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AB = 87.5 \\ CD = 62.5 \end{cases}$$

$$\widehat{ABD} = \frac{15 + 80 + 62.5}{2} = 78.75$$

گزینه ۴

سوال ۱۳۴



$$\pi R^2 = 15\pi \rightarrow R^2 = 15$$

اندازه قطر دایره محاطی ذوزنقه متساوی الساقین
واسطه هندسی دو قاعده آن است.

$$(2R)^2 = 6a \rightarrow 4R^2 = 6a \rightarrow 6a = 60$$

$$\rightarrow a = 10$$

گزینه ۱

سوال ۱۳۵

$$R - r = 3.5 \quad (*)$$

$$\pi R^2 - \pi r^2 = 21\pi \rightarrow R^2 - r^2 = 21 \rightarrow (R - r)(R + r) = 21 \rightarrow 3.5(R + r) = 21$$

$$\rightarrow R + r = 6$$

$$\begin{cases} R - r = 3.5 \\ R + r = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R = 4.75 \\ r = 1.25 \end{cases}$$

گزینه ۲

سوال ۱۳۶

نقطه D روی محور طولها قرار دارد، بنابراین مختصات آن به صورت $D(3,0)$ است.

بازتاب نقطه C نسبت به قطر BD بر روی راس A قرار می‌گیرد.

طول نقاط B و D برابر هستند، یعنی قطر BD عمودی است؛ بنابراین قطر AC باید افقی باشد، یعنی عرض نقاط A و C برابر باشد.

$$x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow x_A + 5.5 = 3 + 3 \rightarrow x_A = 0.5$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow 2y_A = 5 + 0 \rightarrow y_A = 2.5$$

$$|AO| = \sqrt{(0.5)^2 + (2.5)^2} = \sqrt{6.5}$$

گزینه ۱

سوال ۱۳۷

طبق قضیه نیمسازها:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2.5}{3.5} = \frac{5}{7} \rightarrow \begin{cases} AC = 5x \\ AB = 7x \end{cases}$$

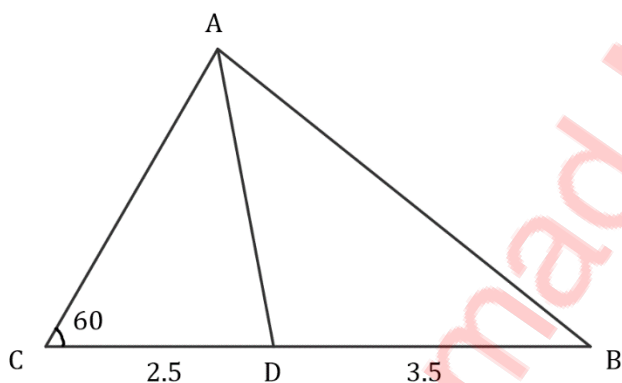
طبق قضیه کسینوسها:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos \hat{C}$$

$$\rightarrow 49x^2 = 25x^2 + 36 - 2(5x)(6) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow 24x^2 + 30x - 36 = 0 \rightarrow 4x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(4)(-6)}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غقق} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow AC = \frac{15}{4} = 3.75$$



گزینه ۲

سوال ۱۳۸

$$AB = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z & 0.5 & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xz - 2z & 0 & 2x + 4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz + 2z^2 & \frac{y+z}{2} & 2y - 4yz \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \rightarrow x = -2y \\ \frac{y+z}{2} = 0 \rightarrow z = -y \end{cases}$$

$$2y - 4yz = 2 \rightarrow 2y + 4y^2 = 2 \rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \text{ غقق} \rightarrow x = -2y = 2 \rightarrow xy = -2$$

گزینه ۳

سوال ۱۳۹

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 4 - 12) - (-6 + 2 - 12) = 3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6 \times \frac{2}{3} - 3 \times 1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \text{کوچکترین درایه قطر اصلی} = 6$$

گزینه ۱

سوال ۱۴۰

دو مقدار دلخواه برای m در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} m = 2 \rightarrow 3y = 6 \rightarrow y = 2 \\ m = -1 \rightarrow -3x = 6 \rightarrow x = -2 \end{cases} \rightarrow O(-2, 2)$$

$$r = |OA| = \sqrt{(-1 - (-2))^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{2} \rightarrow \text{محیط} = 2\pi r = 2\sqrt{2}\pi$$

گزینه ۲

سوال ۱۴۱

$$y^2 - ay + 4x + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow y^2 - ay + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 4x + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = -4x + \frac{a^2}{4} - \frac{b}{2}$$

$$\rightarrow \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = -4\left(x - \frac{a^2}{16} + \frac{b}{8}\right) \rightarrow S\left(\frac{a^2}{16} - \frac{b}{8}, \frac{a}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2 \\ \frac{a^2}{16} - \frac{b}{8} = -1 \rightarrow \frac{4}{16} - \frac{b}{8} = -1 \rightarrow b = 10 \end{cases} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۴

سوال ۱۴۲

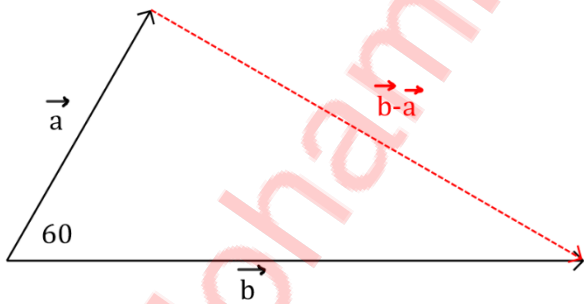
$$\begin{cases} \vec{a} = (1, 1, 0) \\ \vec{b} = (-1, 2, 0) \end{cases} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 3)$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{h} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \rightarrow \vec{c} = (x', y', 4)$$

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \rightarrow x' + y' = 1 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 5 \rightarrow -x' + 2y' = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 2 \end{cases} \rightarrow \vec{c} = (-1, 2, 4) \rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

گزینه ۱

سوال ۱۴۳



$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{a}|\cos 60 \\ &= (2|\vec{a}|)^2 + |\vec{a}|^2 - 2(2|\vec{a}|)|\vec{a}|\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 3|\vec{a}|^2 \rightarrow |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$$

اگر θ زاویه بین دو بردار $|\vec{b}|$ و $|\vec{b} - \vec{a}|$ باشد، داریم:

$$\cos \theta = \frac{\vec{b} \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{b}||\vec{b} - \vec{a}|} = \frac{|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{a}}{2|\vec{a}|(\sqrt{3}|\vec{a}|)} = \frac{4|\vec{a}|^2 - |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60}{2\sqrt{3}|\vec{a}|^2} = \frac{4|\vec{a}|^2 - |\vec{a}|(2|\vec{a}|)\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{3}|\vec{a}|^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \theta = 30$$

گزینه ۴

سوال ۱۴۴

$$\begin{cases} x+2 \mid 3x-1 \\ x+2 \mid 3(x+2) \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق}} x+2 \mid 7 \rightarrow \begin{cases} x+2 = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \rightarrow x = -1 \rightarrow A(-1, -4) \\ x+2 = -1 \rightarrow x = -3 \rightarrow B(-3, 10) \end{cases} \\ x+2 = \pm 7 \rightarrow \begin{cases} x+2 = 7 \rightarrow x = 5 \rightarrow C(5, 2) \\ x+2 = -7 \rightarrow x = -9 \rightarrow D(-9, 4) \end{cases} \end{cases}$$

گزینه ۱

سوال ۱۴۵

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &\equiv_{10} 14a + 6 \rightarrow a^2 - 14a - 7 \equiv_{10} 0 \\ a^2 - 14a - 7 + 10 \times 2a &\equiv_{10} 0 \rightarrow a^2 + 6a - 7 \equiv_{10} 0 \rightarrow (a-1)(a+7) \equiv_{10} 0 \\ a-1 &\equiv_{10} 0 \rightarrow a \equiv_{10} 1 \rightarrow a^2 + a \equiv_{10} 2 \\ a+7 &\equiv_{10} 0 \rightarrow a \equiv_{10} -7 \equiv_{10} 3 \rightarrow a^2 + a \equiv_{10} 2 \end{aligned}$$

گزینه ۳

سوال ۱۴۶

$$\begin{aligned} 12x + 11y = 759 &\rightarrow 12x \equiv_{11} 759 \rightarrow x \equiv_{11} 0 \rightarrow x = 11k \\ 12(11k) + 11y = 759 &\rightarrow 11y = -132k + 759 \rightarrow y = -12k + 69 \\ \begin{cases} x \in \mathbb{N} \rightarrow x \geq 1 \rightarrow 11k \geq 1 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \geq 1 \\ y \in \mathbb{N} \rightarrow y \geq 1 \rightarrow -12k + 69 \geq 1 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq 5 \end{cases} &\rightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

گزینه ۲

سوال ۱۴۷

$$\begin{cases} q = \Delta^2 - 2\delta \\ q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \\ \Delta = \delta = p-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = (p-1)^2 - 2(p-1) \xrightarrow{\div(p-1)} \frac{p}{2} = p-1-2 \rightarrow p = 2p-6 \rightarrow p = 6$$

گزینه ۱

سوال ۱۴۸

$$\frac{5 + 4 + 4 + 3 + a + b + c}{2} = 1.5(a + b + c) \rightarrow a + b + c = 8$$

گراف همبند است. بنابراین راس با درجه صفر ندارد. حالت‌های ممکن به صورت زیر است:

$$\{5, 2, 1\}, \{4, 3, 1\}, \{4, 2, 2\}, \{3, 3, 2\}$$

گزینه ۱

سوال ۱۴۹

عدد مورد نظر را به صورت \overline{abcd} نمایش می‌دهیم. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر، پاسخ سوال است.

$$a + b + c + d = 8 \quad (a \leq 5)$$

به این منظور از روش متمم استفاده می‌کنیم. به این صورت که تعداد پاسخ‌های معادله فوق را به شرط $a \geq 6$ محاسبه کرده و از کل پاسخ‌ها کم می‌کنیم.

$$a' + b + c + d = 8 - 6 = 2 \rightarrow \text{پاسخ‌های صحیح و نامنفی} = \binom{2 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{5}{3} = 10$$

$$a + b + c + d = 8 \rightarrow \text{پاسخ‌های صحیح و نامنفی} = \binom{8 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{11}{3} = 165$$

$$165 - 10 = 155$$

گزینه ۱

سوال ۱۵۰

مجموعه فوق دارای $2^7 = 128$ زیرمجموعه است که دوه‌دو باهم مکمل هستند، یعنی اجتماع آن‌ها برابر با مجموعه اصلی است (مانند $\{1, 2\}$ و $\{3, 4, 5, 6, 7\}$). بدیهی است که زیرمجموعه‌های مکمل اشتراکی ندارند. اگر زیرمجموعه‌هایی که مکمل هم هستند را باهم در یک گروه قرار دهیم، مجموعاً $\frac{128}{2} = 64$ گروه خواهیم داشت. حال اگر طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۶۵ زیرمجموعه انتخاب کنیم، دست‌کم یک گروه وجود دارد که هر دو عضو آن انتخاب شده است که اشتراک آن‌ها تهی است.