

بنام خداوند جان و فرد



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

در زمینه مسائل علمی باید دنبال قله بود.
(رهبر شهید)

دفترچه شماره ۱

صبح جمعه

گروه آزمایشی
علوم ریاضی و فنی

آزمون اختصاصی سراسری و پذیرش دانشجو - معلم

سال ۱۴۰۵

(ورودی دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی)

مدت زمان پاسخ‌گویی: ۷۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۰

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت زمان پاسخ‌گویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
این آزمون، نمره منفی دارد.



حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز است و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

حسین شاسواری

❄️ مدرس ریاضیات دبیرستان و کنکور ❄️

۰۹۱۲۷۶۱۶۶۲۴

※ متقاضی گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ نامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالات تأیید می نمایم.

امضا:

۱- مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^2 - 3\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{4}x - 1}{x^2 - 3\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{9}x}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

- ۰٫۸ (۴) ✓ ○ ۰٫۶ (۳) ○ ۰٫۴ (۲) ○ ۰٫۲ (۱)

$$A = \frac{(2 - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(2 - \sqrt[3]{3})^3 + 3} = \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 + 1}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3})^3 + 3} = \frac{4}{2+3} = 0.8$$

۲- اگر $11, 3a+2$ و $a-4$ ، به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

- ۱۱ (۴) ○ ۱۰ (۳) ○ ۹ (۲) ✓ ○ ۸ (۱)

$$t_4 = 3a + 2$$

$$t_7 = 11$$

$$t_9 = a - 4$$

$$t_7 - t_4 = 3d = 9 - 3a \Rightarrow d = 3 - a$$

$$t_9 - t_7 = 2d = a - 15$$

$$\downarrow$$

$$2(3 - a) = a - 15 \Rightarrow 6 + 15 = 3a$$

$$3a = 21 \Rightarrow \underline{a = 7}$$

$$d = 3 - 7 \Rightarrow \underline{d = -4}$$

$$t_7 = t_1 + 6d$$

$$11 = t_1 - 24 \Rightarrow \underline{t_1 = 35}$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$t_n = 35 + (n-1)(-4)$$

$$t_n = 39 - 4n$$

$$t_n > 0 \Rightarrow 39 - 4n > 0$$

$$4n < 39 \Rightarrow \underline{n < \frac{39}{4}}$$

۳- به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $(x-2)^2 + 2a(x+1)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$x^2 - 4x + 4 + 2ax^2 + 4ax + 2a = a$$

$$(1+2a)x^2 + 4(a-1)x + a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4(a^2 - 2a + 1) - 4a(1+2a) = 0$$

$$4a^2 - 8a + 4 - 4a - 8a^2 = 0$$

$$-4a^2 - 12a + 4 = 0$$

$$\Delta = 81 - 32 > 0 \rightarrow \text{دو ریشه}$$

۴- به چند طریق می توان از بین ۳ ریاضی دان، ۳ فیزیک دان و ۳ شیمی دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد

به طوری که دو نفر انتخابی هم رشته نباشند؟

۶۶ (۴)

۵۴ (۳)

۳۳ (۲)

۲۷ (۱) ✓

هر دو نفری (۳) هر دو نفری (۲) هر دو نفری (۱)

$$\binom{9}{2} - \left(\binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} \right)$$

$$\frac{9!}{2! \times 7!} - 3 \times \frac{3!}{2! \times 1!} = \frac{8 \times 9}{2} - 3 \times 3 = 36 - 9 = 27$$

۵- نقیض گزاره سوری $\forall x \in \mathbb{R}; \sim (x \leq 0) \vee (x + \frac{1}{x} \leq 2)$ کدام است؟

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2) \quad (۲)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \vee (x + \frac{1}{x} \geq 2) \quad (۱)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2) \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \vee (x + \frac{1}{x} > 2) \quad (۳)$$

۶- اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha^2 = \alpha + 3$ و $\beta^2 = \beta + 3$ باشد، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

۷۹ (۴)

۷۳ (۳)

۶۷ (۲)

۶۱ (۱) ✓

$$\alpha^2 - \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \text{معادله: } x^2 - x - 3 = 0$$

$$\beta^2 - \beta - 3 = 0$$

$$\alpha + \beta = +1$$

$$\alpha\beta = -3$$

$$\alpha^2 = \alpha + 3 \Rightarrow \alpha^3 = \alpha(\alpha + 3) = \alpha^2 + 3\alpha$$

$$\alpha^3 = 4\alpha + 3$$

$$\alpha^4 = \alpha \cdot \alpha^3 \Rightarrow \alpha^4 = \alpha(4\alpha + 3) = 4\alpha^2 + 3\alpha$$

$$\alpha^4 = 7\alpha + 12$$

$$\alpha^5 = \alpha(7\alpha + 12) = 7(\alpha + 3) + 12\alpha$$

$$19\alpha + 21$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = 19(\alpha + \beta) + 42 = 19 + 42 = 61$$

۷- نمودار تابع $y = mx^2 - 3x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x=2$ قطع می کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a, b) باشد، مقدار $a+2b$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۲

$$\Delta > 0 \Rightarrow 9 - 4(m)(4) > 0 \Rightarrow 16m < 9 \Rightarrow m < \frac{9}{16} \quad (1)$$



$$y = m(2)^2 - 3(2) + 4 = 4m - 2$$

$$m > 0 \Rightarrow 4m - 2 < 0 \Rightarrow 4m < 2 \Rightarrow m < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$m < 0 \Rightarrow 4m - 2 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{2} \quad \text{منفی}$$

$$\begin{aligned} (1) & \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{2} \Rightarrow a=0 \\ (2) & \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow a+2b=0+1=1 \end{aligned}$$

۸- برای $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اگر $f^{-1}(6-2x) \leq f^{-1}(2-x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \xrightarrow{\text{الگوریتم}} f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{الگوریتم}} \text{مباشه}$$

$$\Rightarrow 6-2x \geq 2-x$$

$$4 \geq x \quad (I)$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = (0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \\ 6-2x > 0 \Rightarrow 2x < 6 \\ \quad \quad \quad x < 3 \end{cases} \Rightarrow x < 2 \quad (II)$$

$$\begin{aligned} (I) & \Rightarrow x < 2 \\ (II) & \Rightarrow x < 2 \end{aligned} \longrightarrow \underline{x=1}$$

۹- اگر $75^x = 27^y$ باشد، حاصل $\frac{x}{2y-x}$ $125^{\frac{x}{2y-x}}$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

 $3\sqrt{3}$ (۴) $5\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

$$(3 \times 5^2)^x = 3^{3y} \Rightarrow 5^{2x} = \frac{3^{3y}}{3^x} = 3^{3y-x} = 5^{\frac{2x}{3y-x}} = 3$$

$$\left(5^{\frac{2}{3y-x}}\right)^2 = 3 \Rightarrow 5^{\frac{4}{3y-x}} = \sqrt{3} \Rightarrow 125^{\frac{x}{3y-x}} = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$$

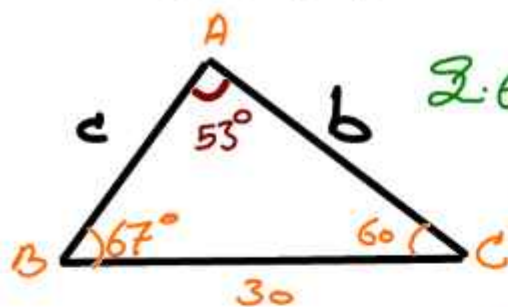
۱۰- اگر طول یک ضلع مثلثی ۳۰ و اندازه دو زاویه مجاور آن ضلع 60° و 67° باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

۴۵ + ۴۰√۳ (۴)

۴۵ + ۳۰√۳ (۳) ✓

۳۰ + ۴۰√۳ (۲)

۳۰ + ۳۰√۳ (۱)



$$2.67 = 2 \cdot (180 - 67) = 2 \cdot 113$$

$$2.113 = 2 \cdot (60 + 53)$$

$$2.60 \cos 53 + \cos 60 \cdot 2.53$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{4}{10}$$

$$\frac{30}{2.53} = \frac{b}{\frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{4}{10}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$c = \frac{15\sqrt{3} \times 10^5}{84}$$

$$b = \frac{3(3\sqrt{3} + 4) \times 10^5}{84}$$

$$L = 30 + \frac{75\sqrt{3} + 45\sqrt{3} + 60}{4}$$

$$30 + 30\sqrt{3} + 15 = 45 + 30\sqrt{3}$$

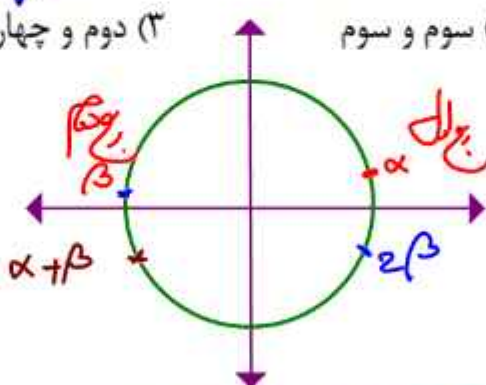
۱۱- اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد،

۲β (۴) سوم و چهارم ✓

۲β (۳) دوم و چهارم

(۲) سوم و سوم

(۱) دوم و سوم



۱۲- معادله مثلثاتی $\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \tan 4x$ چند جواب در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ دارد؟

۱۳ (۴) $\tan x \neq \sqrt{3}$ و (۳)

$$\tan x \times \frac{\sqrt{3} + \tan x}{\tan x + \sqrt{3}} = \tan 4x = \tan 4x \Rightarrow 4x = k\pi + \alpha$$

$$3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

$k=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ✓

$k=-1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$ ✓

$\tan x = -\sqrt{3}$ ✓

$k=0 \Rightarrow x = 0$ ✓

$k=2 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ✓

$k=-2 \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3}$ ✓

$k=3 \Rightarrow x = \pi$ ✓

$k=-3 \Rightarrow x = -\pi$ ✓

$k=5 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ ✓

$k=-5 \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ ✓

$k=4 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ ✓

$k=-4 \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ✓

۱۳- اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = [1-x]$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a ، $\lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g(x) = 1+a$ است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a^+} f([1-x]) = f([1-a^+])$$

$$= f(1-a-1) = f(-a) = 1 - \sqrt{-a}$$

$$\Rightarrow 1+a = 1 - \sqrt{-a} \Rightarrow -\sqrt{-a} = a \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x-1}}$ کدام است؟

$8\pi^2$ (۴) ✓

$4\pi^2$ (۳)

$2\pi^2$ (۲)

صفر (۱)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x-1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2\pi \sin 2\pi x}{1 + 2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{-x-1}}} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2\pi \sin 2\pi x}{1 + \frac{-1}{\sqrt{-x-1}}} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4\pi^2 \cos 2\pi x}{0 - \frac{1}{2\sqrt{-x-1}}} = \frac{-4\pi^2}{-\frac{1}{2}} = 8\pi^2$$

۱۵- برای تابع $f(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x+a}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x-a|} \times f(x)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) وجود ندارد

از مخرج $f(x)$ $\Rightarrow 6x^2+x+a=0 \Rightarrow \frac{6}{4} + \frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow a = \frac{-6-2}{4} = -2$

$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x+2|} \times \frac{1-2x}{(3x+2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{-1}{|x+2|} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$

۱۶- اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) وجود ندارد

$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{xf(x)}{x+b} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x(a(1-x^2) - bx^2)}{x+b} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{((-a-b)x^2 + a)x}{x+b}$

$\Rightarrow -a-b=0 \Rightarrow a=-b$

$= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-bx}{x+b} = \lim_{x \rightarrow -b^-} \frac{-bx}{x+b} = \frac{(-b)(-b)}{-b+b} = \frac{b^2}{0^-} = -\infty$

نکته: $-3.1+3$

۱۷- اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+b|x|}$ در $x=a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

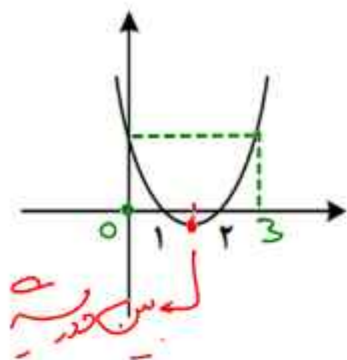
(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2+|x|}{x^2+b|x|} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|+b)} = -\infty$

$|x|+b=0 \Rightarrow |x|=-b$
 $x \rightarrow a^- \Rightarrow x = \pm(-b)$

۱۸- نمودار تابع $y = g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع f با ضابطه $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$, $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq a \\ g(0) & x = a \end{cases}$

است. اگر بازه (b, c) حدود تغییرات a باشد، $b + c$ کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(a^+) - g(0)}{a^+ - a} = -\infty$$

$$\Rightarrow g(a^+) < g(0)$$

$$b < a < c$$

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳) ✓

۴ (۴)

۱۹- اگر زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ها باشد، حاصل عبارت

$A = 2\sin\alpha + 4\cos\alpha$ کدام است؟

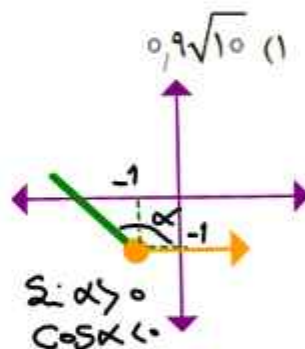
$-0,3\sqrt{10}$ (۴)

$-0,9\sqrt{10}$ (۳) ✓

$0,3\sqrt{10}$ (۲)

$0,9\sqrt{10}$ (۱)

$$y = \frac{1}{x^{1/3}} = x^{-1/3} \Rightarrow y' = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$$



$$x = -1 \Rightarrow y'(-1) = -\frac{1}{3}(-1)^{-4/3} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(-1)^4}} = -\frac{1}{3}$$

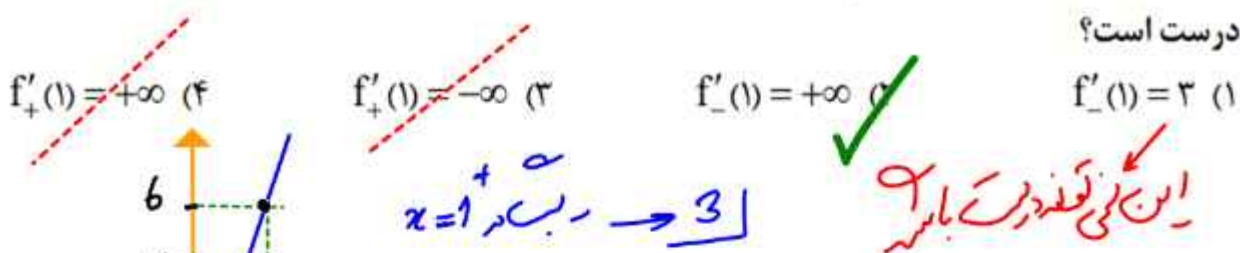
$$\Rightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{3} \quad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{10}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow A_1 = -\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

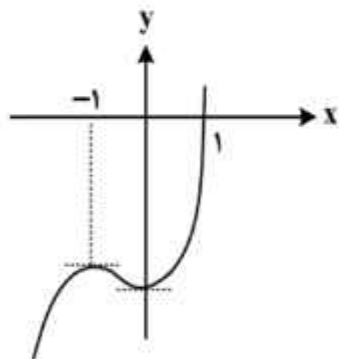
$$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \sin\alpha = +\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow A_2 = \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{12}{\sqrt{10}} = -\frac{9}{\sqrt{10}}$$

۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. کدام مورد در خصوص مشتقات یک طرفه f در $x=1$ ، درست است؟



پس نقطه درستی: $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2 - 4}{0^-} = +\infty$

۲۱- نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ در زیر رسم شده است. عرض نقطه ماکزیمم نسبی تابع f ، کدام است؟



$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(-1) = 0 \quad 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$$

$$f'(0) = 0 \quad 3a(0)^2 + 2b(0) + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$$

$$\Rightarrow \underline{3a - 2b = 0}$$

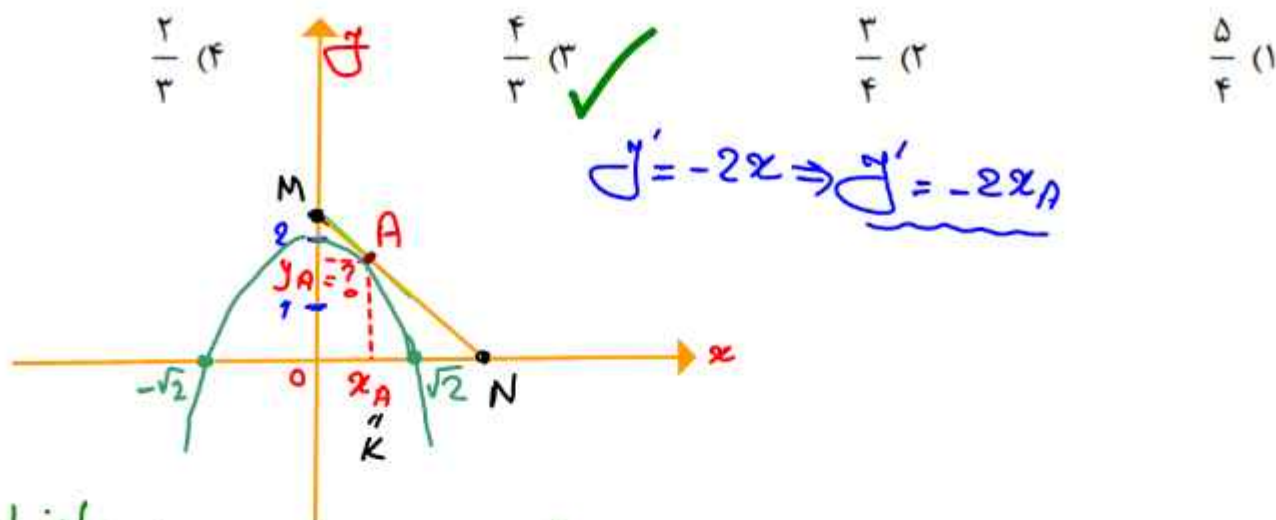
$$f(1) = 0 \Rightarrow a(1)^3 + b(1)^2 + 0(1) - 5 = 0 \Rightarrow a + b = 5$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ a + b = 5 \end{cases}$$

$$5a = 10 \Rightarrow \underline{a = 2, b = 3}$$

$$f(-1) = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 + 0(-1) - 5 = -2 + 3 - 5 = \underline{-4}$$

۲۲- در نقطه A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیه اول، مماسی رسم می‌کنیم که مماس رسم شده همراه با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟



معادله فاصله:

$$y - y_A = -2x_A(x - x_A)$$

$$y - (2 - x_A^2) = -2x_A x + 2x_A^2$$

$$y = -2x_A x + 2x_A^2 + 2 - x_A^2$$

$$y = -2x_A x + x_A^2 + 2 \Rightarrow y = -2kx + k^2 + 2$$

$$M = k^2 + 2$$

$$0 = -2k(N) + k^2 + 2$$

$$N = \frac{k^2 + 2}{2k}$$

$$S = \frac{1}{2} M \times N = \frac{1}{2} (k^2 + 2) \left(\frac{k^2 + 2}{2k} \right)$$

$$S = \frac{(k^2 + 2)^2}{4k} \quad S_{\min} = 8 \quad S' = \frac{2(k^2 + 2)(2k)(4k) - 4(k^2 + 2)^2}{(4k)^2} = 0$$

$$2(\cancel{k^2 + 2})(\cancel{8}k^2) = \cancel{4}(k^2 + 2)^2$$

$$4k^2 = k^2 + 2 \Rightarrow 3k^2 = 2 \Rightarrow k^2 = \frac{2}{3}$$

$$y_A = 2 - x_A^2$$

$$y_A = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6 - 2}{3} = \frac{4}{3}$$

۲۳- از کارگران مشغول به کار در کارگاهی یک نمونه ۷ نفره انتخاب شده است. اگر داده‌های ۲۱، ۲۱، ۲۲، ۲۴، ۲۵، ۲۷ و ۳۵ درآمد ماهیانه آنها برحسب میلیون تومان باشد، خط فقر در این کارگاه چند میلیون تومان برآورد می‌شود؟

$$\begin{aligned} & \text{۱۰,۵ (۱)} \quad \text{۱۲,۵ (۲)} \quad \text{۲۱ (۳)} \quad \text{۲۵ (۴)} \\ & \Rightarrow \text{فقره} = \frac{21 \times 2 + 22 + 24 + 25 + 27 + 35}{2 \times 7} \\ & \text{فقره} = \frac{42}{14} + \frac{21}{14} + \frac{25}{14} + \frac{87}{14} \\ & \quad \frac{6}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{13}{2} \\ & \quad 3 + 3 + 6.5 = 12.5 \end{aligned}$$

۲۴- در یک خانواده k فرزند، می‌دانیم تمام فرزندان از یک جنس نیستند. به ازای کدام مقدار از k ، احتمال اینکه دقیقاً

۳- k فرزند از این خانواده پسر باشد، $\frac{5}{18}$ است؟

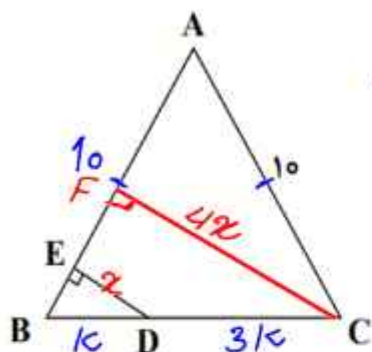
$$\begin{aligned} & \text{۵ (۱)} \quad \text{۶ (۲)} \quad \text{۷ (۳)} \quad \text{۸ (۴)} \\ & \Rightarrow \frac{\binom{k}{3}}{2^k - 2} = \frac{\binom{7}{3}}{2^7 - 2} \Rightarrow k = 7 \end{aligned}$$

۲۵- داوطلبی به هر ۵ سؤال یک آزمون پنج گزینه‌ای به‌طور تصادفی پاسخ می‌دهد. احتمال آنکه تنها به ۳ سؤال پاسخ صحیح داده باشد، کدام است؟

$$\frac{32}{625} \text{ (۴)} \quad \frac{64}{625} \text{ (۳)} \quad \frac{16}{625} \text{ (۲)} \quad \frac{4}{625} \text{ (۱)}$$

$$\frac{\binom{5}{3} \times 2^4}{5^5} = \frac{\frac{5!}{3! \times 2!}}{5^5} = \frac{2 \times 5 \times 16}{5^4 \times 5} = \frac{32}{625}$$

۲۶- در شکل زیر، $AB = AC$ و $BD = \frac{1}{4}BC$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۰ باشد، طول ED کدام است؟



$$S_{ABC} = \frac{4x \times 10}{2} = 40 \Rightarrow x = 2$$

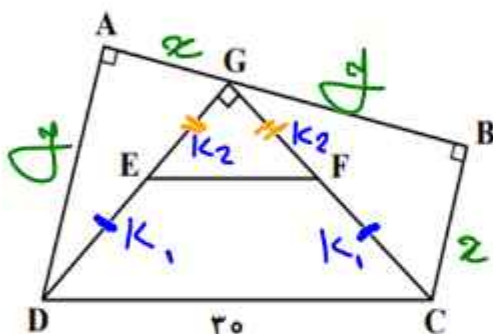
$$\sqrt{5} \quad (1)$$

$$\sqrt{6} \quad (2)$$

$$2 \quad (3) \quad \checkmark$$

$$3 \quad (4)$$

۲۷- در شکل زیر، چهارضلعی های $EFCD$ دوزنقه متساوی الساقین است. اگر طول اضلاع $ABCD$ دوزنقه اعداد صحیح مثبت باشند، طول ضلع AB کدام است؟



$$BC \parallel AD \Rightarrow \begin{cases} AG = BC \\ BG = AD \end{cases}$$

$$EF \parallel DC \Rightarrow DG = CG$$

$$2(k_1 + k_2)^2 = 30^2 \Rightarrow (k_1 + k_2)^2 = 450$$

$$x^2 + y^2 = (k_1 + k_2)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 450$$

$$(x + y)^2 - 2xy = 450 \Rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=21 \end{matrix}$$

$$24^2 - 2(3 \times 21) = 576 - 126 = 450$$

$$\Rightarrow x + y = 24$$

$$24 \quad (1) \quad \checkmark$$

$$25 \quad (2)$$

$$23 \quad (3)$$

$$26 \quad (4)$$

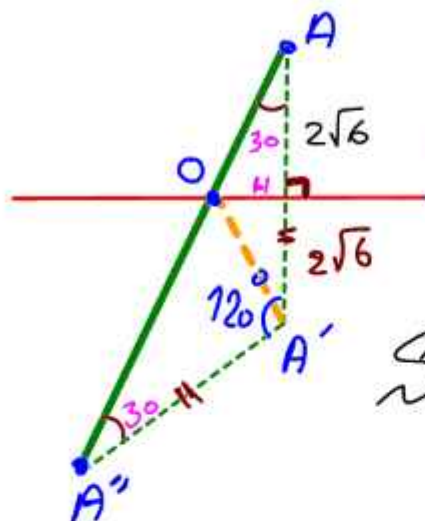
۲۸- نقطه A' که تصویر نقطه A تحت بازتاب نسبت به خط d و نقطه A'' تصویر نقطه A تحت دوران حول نقطه A' به اندازه 120° است. اگر فاصله نقطه A از خط d برابر $2\sqrt{6}$ و نقطه برخورد پاره خط AA'' با خط d باشد، مساحت مثلث OAA' کدام است؟

$1\sqrt{3}$ (۴) ✓

$6\sqrt{3}$ (۳)

$4\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)



$$\tan 30 = \frac{OH}{2\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{OH}{2\sqrt{6}}$$

$$OH = \frac{2\sqrt{18}}{3} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle OAA'} = \frac{4\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$$

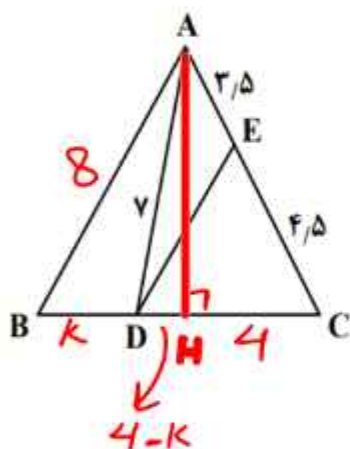
۲۹- در مثلث متساوی الاضلاع ABC شکل زیر، طول ضلع BD کدام می تواند باشد؟

۲ (۱)

$2\sqrt{5}$ (۲)

۳ (۳) ✓

$3\sqrt{5}$ (۴)



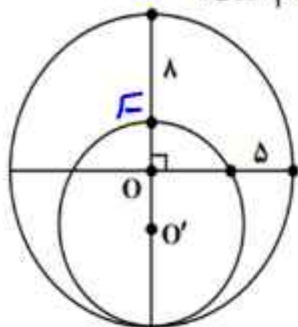
$$AH^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

$$AH = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$(4-k)^2 = 7^2 - AH^2 = 49 - 48 = 1$$

$$4-k=1 \Rightarrow k=3$$

۳۰- در شکل زیر، دو دایره به مرکزهای O و O' مماس درون هستند. طول خط‌المركزین کدام است؟ ϵ



$$OO' = R - R'$$

$$2R - 2R' = 8 \Rightarrow \underline{R - R' = 4}$$

۳ (۱)

۴ (۲)

۳, ۵ (۳) ✓

۴, ۵ (۴)

۳۱- اگر $\vec{a} = (1, -1, -1)$ باشد، حاصل $\vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i}$ کدام است؟

 $-\vec{i} + \vec{k}$ (۴)

 $\vec{i} + \vec{k}$ (۳)

 $-\vec{i} - \vec{k}$ (۲)

 $\vec{i} - \vec{k}$ (۱) ✓

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{a} \times \vec{i} &= \vec{k} - \vec{j} \end{aligned} \right\} \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) = \vec{k} \times (\vec{k} - \vec{j}) = \underline{\vec{i}}$$

$$\vec{k} \times \vec{a} = \vec{k} \times (\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = \vec{j} + \vec{i}$$

$$(\vec{j} + \vec{i}) \times \vec{i} = \underline{-\vec{k}}$$

۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 20 & x & -1 \\ -3 & y & 3 & 4 \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

 -3 (۴) ✓

 -5 (۳)

 3 (۲)

 5 (۱)

$$A = \begin{bmatrix} 2+2-3-3 & 3-4+y-4 \\ -2-40-3x-3 & -3+80+xy-4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y-5=0 \Rightarrow y=5 \\ -3x-45=0 \Rightarrow x=-15 \end{cases}$$

$\frac{x}{y} = -3$

۳۳- برای ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B، اگر $(AB)^{-1}A^TB = \begin{bmatrix} 5|A| & 4 \\ |A| & 2|A| \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $3A$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱) ✓

$$\frac{|A|^3|B|}{|A||B|} = 10|A|^2 - 4|A|$$

$$\Rightarrow |A|^2 = 10|A|^2 - 4|A| \Rightarrow 9|A|^2 = 4|A|$$

$$|A| = \frac{4}{9} \rightarrow |3A| = 9|A|$$

$$|3A| = 9\left(\frac{4}{9}\right) = \underline{4}$$

۳۴- دایره C بر خط $y = \frac{3}{4}x$ مماس است. اگر معادلات دو وتر مساوی و منصف هم از دایره C، خطوط $2x + y = 3$ و

$2x - 3y = 7$ باشند، شعاع دایره کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲) ✓

۱ (۱)

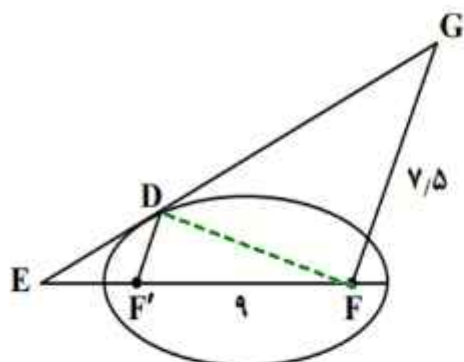
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow 4y = -4 \Rightarrow y = -1 \quad O = (2, -1)$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$4y = 3x \Rightarrow d: 3x - 4y = 0$$

$$R = \frac{|3(2) - 4(-1) + 0|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = \underline{2}$$

۳۵- در مثلث EFG شکل زیر، ضلع EG در نقطه D بر بیضی مماس بوده و F و F' کانون‌های بیضی هستند. اگر دو مثلث EF'D و EFG متشابه با نسبت تشابه $\frac{1}{3}$ باشند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



$$F'D = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} = \frac{15}{6}$$

$$2c = 9 \Rightarrow c = \frac{9}{2}$$

$$2a = F'D + DF = \frac{15}{6} + \frac{15}{2} = \frac{15+45}{6} = 10$$

$$a = 5$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\frac{9}{2}}{5} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{6} \quad (3)$$

$$\frac{9}{10} \quad (4) \quad \checkmark$$

۳۶- اگر $A = 0! + 1! + 2! + 3! + \dots + 600!$ باشد، باقیمانده تقسیم عدد $\frac{A+2!}{3!}$ بر عدد ۸، کدام است؟

$$2 \quad (4) \quad \checkmark$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

$$\frac{A+2!}{3!} \equiv \frac{1+1+2+6+2}{6} \equiv \underline{2}$$

۳۷- آزمون ورودی مؤسسه‌ای شامل ۲۵ سؤال زبان انگلیسی و ۲۰ سؤال ریاضی است و پاسخ کاملاً درست به هر سؤال زبان انگلیسی، ۷ امتیاز و هر سؤال ریاضی ۱۲ امتیاز دارد و پاسخ ناقص بدون امتیاز است. اگر آخرین داوطلب پذیرفته شده، ۲۹۷ امتیاز کسب کرده باشد، او در مجموع به چند سؤال پاسخ کاملاً درست داده است؟

۲۶ (۴)

۳۱ (۳) ✓

۳۶ (۲)

۴۱ (۱)

$$\begin{aligned} 7x + 12y &= 297 \\ 7(x+y) + 5y &= 297 \Rightarrow \begin{cases} x+y = 1+5k \\ y = 58-7k \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 12k - 58 \\ y &= 58 - 7k \end{aligned} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 25 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{matrix} \Rightarrow k = 6$$

$$x+y = 1+5k = \underline{31}$$

۳۸- چند عدد چهار رقمی با ارقام ۳، ۴ و ۶ می‌توان نوشت که بر ۶ بخش پذیر باشند؟

۲۳ (۴)

۱۹ (۳)

۱۵ (۲) ✓

۱۳ (۱)

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 4 \quad 4 \quad 4 \quad 6 \\ \hline 9 \quad 13 \rightarrow 2^3 \end{array} = 9$$

$$6+9 = \underline{15}$$

$$\begin{array}{r} ۳ \text{ مکعبه} + ۴۶۲ \\ \hline ۹ \text{ مکعبه} \quad ۴۶۲ \end{array} \quad \frac{4}{2 \times \frac{3!}{2!}} = \underline{6}$$

۳۹- بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد، کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱) ✓

$$3! = 6$$

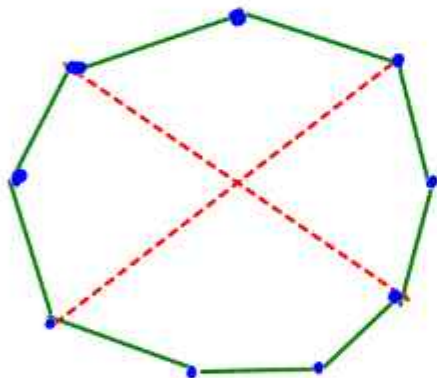
۴۰- گراف ۹ رأسی G ، فقط دارای دورهایی به طول ۵، ۶، ۷ و ۹ است. تعداد دورهای به طول کدام عدد در گراف G ، بیشتر است؟

۵ (۴)

۶ (۳) ✓

۷ (۲)

۹ (۱)



$1 \rightarrow 4$
 $7 \rightarrow 1$
 $6 \rightarrow 3$
 $5 \rightarrow 2$

حسین شاسواری

✱ مدرس ریاضیات دبیرستان و کنکور ✱

۰۹۱۲۷۶۱۶۶۲۴