۱) مقدار عبارت گویای $A=\frac{x^۳-۳\sqrt[۳]{۲}x^۲+۳\sqrt[۳]{۴}x-۱}{x^۳-۳\sqrt[۳]{۳}x^۲+۳\sqrt[۳]{۹}x}$ به‌ازای $x=\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}$ کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

$$A=\frac{x^۳-۳\sqrt[۳]{۲}x^۲+۳\sqrt[۳]{۴}x-۱\text{-}۲+۲}{x^۳-۳\sqrt[۳]{۳}x^۲+۳\sqrt[۳]{۹}x-۳+۳}=\frac{(x-\sqrt[۳]{۲})^۳+۱}{(x-\sqrt[۳]{۳})^۳+۳}$$

$$x=\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}\rightarrow A=\frac{(\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲})^۳+۱}{(\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۳})^۳+۳}=\frac{۳+۱}{۲+۳}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

توجه: قسمت‌های زرد رنگ اتحاد مکعب دو جمله‌ای یا اتحاد $(a-b)^۳$ را تشکیل می‌دهند.

گزینه صحیح: ۴

مبحث: اتحادها و عبارت‌های جبری

درجه سختی تست: آسان

۲) اگر $۳a+۲$ و ۱۱ و $a-۴$، به‌ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند. چند جمله از این الگو مثبت است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

$$__, __, __, ۳a+۲, __, __, ۱۱, __, a-۴$$

می‌دانیم که در الگوی خطی فاصله بین هر دو جمله متوالی برابر d است. بنابراین از $۳a+۲$ تا ۱۱، $۳d$ فاصله است. و از ۱۱ تا $a-۴$، $۲d$ فاصله است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} ۳a+۲+۳d=۱۱ \\ ۱۱+۲d=a-۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+d=۳ \\ -a+۲d=-۱۵ \end{cases} \rightarrow d=-۴$$

$$t_۷ = t_۱ + ۶d \rightarrow t_۱ + ۶(-۴) = ۱۱ \rightarrow t_۱ = ۳۵$$

$$t_n = -۴n + ۳۹ > ۰ \rightarrow n < \frac{۳۹}{۴} = ۹/۷۵ \rightarrow n \leq ۹$$

بنابراین ۹ جمله مثبت داریم.

گزینه صحیح: ۲

مبحث: الگوی خطی

درجه سختی تست: متوسط

۳) به‌ازای چند مقدار از a، معادله درجه دوم $(x-۲)^۲+۲a(x+۱)^۲=a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

به پرانتز اول ۱+ و ۱- را اضافه می‌کنیم:

$$(x-۲+۱-۱)^۲+۲a(x+۱)^۲=a$$

$$(x+۱-۳)^۲+۲a(x+۱)^۲=a$$

فرض می‌کنیم که $x+۱=t$ باشد.

$$(t-۳)^۲+۲at^۲=a\rightarrow(۲a+۱)t^۲-۶t+۹-a=۰\rightarrow$$

$$b'=-۳,\Delta'=۹-(۲a+۱)(۹-a)=۰\rightarrow ۲a^۲-۹-۱۷a+۹=۰\rightarrow a(۲a-۱۷)=۰\rightarrow\begin{cases}a=۰\\a=\frac{۱۷}{۲}\end{cases}$$

برای ۲ مقدار a عبارت دارای ریشه مضاعف است.

گزینه صحیح: ۲

مبحث: معادله درجه دوم و اتحادها و Δ

درجه سختی تست: آسان

۴) به چند طریق می‌توان از بین ۳ ریاضی‌دان، ۳ فیزیک‌دان و ۳ شیمی‌دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد به‌طوری‌که دو نفر انتخابی هم رشته نباشند؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۳ ۳) ۵۴ ۴) ۶۶

با استفاده از متمم

۲ نفر هم رشته باشند: $\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۳}{۲}=۹$

کل حالت‌ها: $\binom{۹}{۲}=۳۶$

۲ نفر هم رشته نباشند: $۳۶-۹=۲۷$

گزینه صحیح: ۱

مبحث:ترکیب

درجه سختی تست: آسان

۶) اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به‌طوری‌که $\alpha^۲ = \alpha + ۳$ و $\beta^۲ = \beta + ۳$ باشد، مقدار $\alpha^۵ + \beta^۵$ کدام است؟

۱) ۶۱ ۲) ۶۷ ۳) ۷۳ ۴) ۷۹

$x^۲ - x - ۳ = ۰ \rightarrow s = ۱, p = -۳, x^۲ = x + ۳$

$\alpha^۵ + \beta^۵ = (\alpha^۲)^۲ \alpha + (\beta^۲)^۲ \beta = (\alpha + ۳)^۲ \alpha + (\beta + ۳)^۲ \beta =$

$\alpha^۳ + \beta^۳ + ۶(\alpha^۲ + \beta^۲) + ۹(\alpha + \beta) = s^۳ - ۳ps + ۶(s^۲ - ۲p) + ۹s =$

$۱ - ۳(-۳)(۱) + ۶(۱ - ۲(-۳) + ۹(۱) = ۱ + ۹ + ۴۲ + ۹ = ۶۱$

گزینه صحیح: ۱

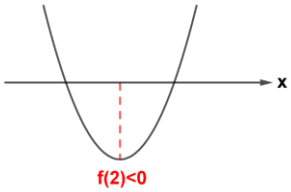
مبحث:جمع و ضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم

درجه سختی تست: متوسط

۷) نمودار تابع $y=mx^{۲}-۳x+۴$ محور x ها را در دو طرف $x=۲$ قطع می‌کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a,b) باشد، مقدار $a+۲b$ کدام است؟

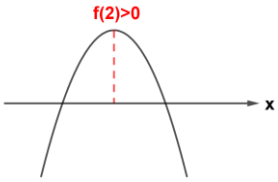
۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) صفر

اگر فرض کنیم $m>۰$ باشد در نتیجه سر سهمی رو به بالاست و مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases} m>۰ \\ f(۲)<۰ \rightarrow m<\frac{۱}{۲} \rightarrow ۰<m<\frac{۱}{۲} \rightarrow (a,b)=(۰,\frac{۱}{۲}) \rightarrow a+۲b=۰+۲(\frac{۱}{۲})=۱ \\ \Delta>۰ \rightarrow \rightarrow m<\frac{۹}{۱۶} \end{cases}$$

اگر فرض کنیم $m<۰$ باشد در نتیجه سر سهمی رو به پایین است و مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases} m<۰ \\ f(۲)>۰ \rightarrow ۴ \rightarrow m>\frac{۱}{۲} \\ \Delta>۰ \rightarrow ۹-۱۶m>۰ \rightarrow m<\frac{۹}{۱۶} \end{cases}$$

اشتراکی وجود ندارد.

در نتیجه همان ۱ به دست آمده صحیح است.

گزینه صحیح: ۳

مبحث: معادله درجه دوم و Δ

درجه سختی تست: متوسط

۸) برای $f(x)=(\frac{۱}{۳})^x$ ، اگر $f^{-۱}(۶-۲x)\le f^{-۱}(۲-x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

وقتی f نزولی است. $f^{-۱}$ هم نزولیست.

بر اساس شرط نزولی بودن داریم:

$$۶-۲x\ge ۲-x\to x\le ۴$$

معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتم است که شرط محدودیت دامنه دارد پس شرط دامنه را هم اعمال می‌کنیم.

$$D_{f^{-۱}}=R_f>۰\to\begin{cases}۶-۲x>۰\to x<۳\\ ۲-x>۰\to x<۲\end{cases}$$

از اشتراک جواب‌ها داریم:

$$x<۲, x=\{۱\}$$

گزینه صحیح: ۱

مبحث: صعودی و نزولی

درجه سختی تست: متوسط

۹) اگر $۷۵^{x}=۲۷^{y}$، حاصل $۱۲۵^{\frac{x}{۳y-x}}$ کدام است؟ $(x\neq ۰)$

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۵\sqrt{۵}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

$$۷۵^{x}=۲۷^{y}\rightarrow(۵^{۲}\times ۳)^{x}=(۳^{۳})^{y}\rightarrow ۵^{۲x}\times ۳^{x}=۳^{۳y}\rightarrow ۵^{۲x}=\frac{۳^{۳y}}{۳^{x}}\rightarrow ۵^{۲x}=۳^{۳y-x}\rightarrow$$

$$\sqrt[۳y-x]{۵^{۲x}}=\sqrt[۳y-x]{۳^{۳y-x}}\rightarrow ۵^{\frac{۲x}{۳y-x}}=۳,۵^{\frac{x}{۳y-x}}=\sqrt{۳}\rightarrow$$

$$۱۲۵^{\frac{x}{۳y-x}}=(۵^{۲}\times ۵)^{\frac{x}{۳y-x}}=۵^{\frac{۲x}{۳y-x}}\times ۵^{\frac{x}{۳y-x}}=۳\times\sqrt{۳}$$

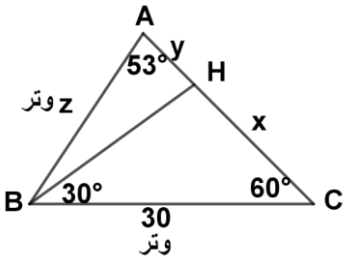
گزینه صحیح: ۴

مبحث: ترکیبی از تابع نمایی و ریشه و توان

درجه سختی تست: سخت

۱۰) اگر طول یک ضلع مثلثی ۳۰ و اندازه دو زاویه مجاور آن ۶۰° و ۶۷° باشد. محیط مثلث کدام است؟ ($(\cos ۵۳^\circ) = ۰/۶$)

۱) $۳۰+۳۰\sqrt{۳}$ ۲) $۳۰+۴۰\sqrt{۳}$ ۳) $۴۵+۳۰\sqrt{۳}$ ۴) $۴۵+۴۰\sqrt{۳}$



می‌دانیم ضلع روبه‌رو به زاویه ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

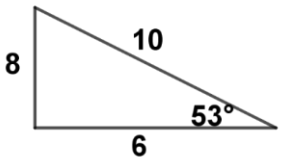
و ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر است.

پس در $\triangle BCH$ داریم:

$$BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۳۰) = ۱۵\sqrt{۳}$$

$$CH = ۳۰ \div ۲ = ۱۵$$

با توجه به اینکه $\cos ۵۳^\circ = ۰/۶$ است. می‌توان مثلث قائم‌الزاویه فرضی را به‌صورت مقابل رسم کرد و با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم:



$$\tan ۵۳^\circ = \frac{۸}{۶} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{y} \rightarrow y = \frac{۴۵\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\sin ۵۳^\circ = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{z} \rightarrow z = \frac{۷۵\sqrt{۳}}{۴}$$

در نتیجه محیط مثلث ABC برابر است با

$$p_{\Delta} = ۱۵ + ۳۰ \cdot \frac{۴۵\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۷۵\sqrt{۳}}{۴} = ۴۵ + ۳۰\sqrt{۳}$$

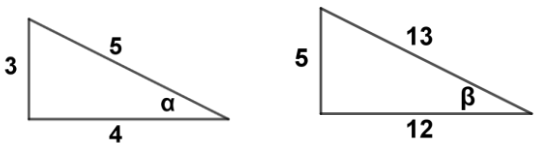
گزینه صحیح: ۳

مبحث: مثلثات و مثلث قائم‌الزاویه

درجه سختی تست: آسان

۱۱) اگر $\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta=-\frac{۱۲}{۱۳}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد، انتهای زاویه‌های $\alpha+\beta$ و ۲β به‌ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارد؟

۱)دوم و سوم ۲)سوم و سوم ۳)دوم و چهارم ۴)سوم و چهارم



$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\sin\beta.\cos\alpha=(\frac{۳}{۵})(-\frac{۱۲}{۱۳})+(\frac{۵}{۱۳})(\frac{۴}{۵})=-\frac{۱۶}{۶۵}<۰$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta=(\frac{۴}{۵})(-\frac{۱۲}{۱۳})-(\frac{۳}{۵})(\frac{۵}{۱۳})=-\frac{۶۳}{۶۵}<۰$$

با توجه به اینکه sin و cos هردو منفی شدند. پس $\alpha+\beta$ در ناحیه سوم است.

$$\sin۲\beta=۲\sin\beta.\cos\alpha=۲(\frac{۵}{۱۳})(-\frac{۱۲}{۱۳})<۰$$

$$\cos۲\beta=۲\cos^{۲}\beta-۱=۲(-\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}-۱=\frac{۲۸۸}{۱۶۹}-۱>۰$$

با توجه به اینکه $\sin<۰$ و $\cos>۰$ به‌دست آمد پس ۲β در ناحیه چهارم است.

گزینه صحیح: ۴

مبحث: مثلثات و روابط مثلثاتی

درجه سختی تست: سخت

۱۲) معادله مثلثاتی $\frac{\sqrt{۳}+\tan x}{۱+\sqrt{۳}\cot x}=\tan ۴x$ چند جواب در بازه $[-۲\pi,۲\pi]$ دارد؟

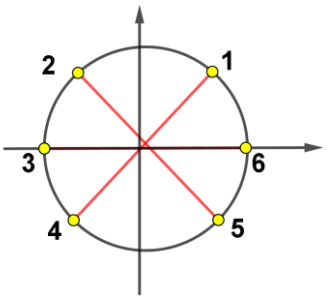
۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۳

می‌دانیم $\cot x=\frac{۱}{\tan x}$ است. پس با جایگذاری در معادله سمت چپ و مخرج مشترک گرفتن داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}+\tan x}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{\tan x}}=\frac{\tan x+\sqrt{۳}}{\frac{\tan x+\sqrt{۳}}{\tan x}}=\tan x$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\tan ۴x=\tan x\rightarrow ۴x=k\pi=x\rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}$$



با توجه به شکل، ۶ نقطه از مضارب $\frac{\pi}{۳}$ در یک دوره مثلثاتی داریم. ولی می‌دانیم $\cot$ و $\tan x$ باید مخالف صفر باشند. درنتیجه نقاط شماره ۳ و ۶ حذف می‌شوند.

از طرف دیگر مخرج باید مخالف صفر باشد، یعنی: $\cot x\neq -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

درنتیجه گزینه‌های ۲ و ۵ نیز حذف می‌شوند. در نهایت جواب شماره‌های ۱ و ۴ می‌شود. پس در یک دور مثلثاتی ۲ جواب و در دو دور ۴ جواب خواهیم داشت.

گزینه صحیح: ۱

مبحث: مثلثات و معادلات مثلثاتی

درجه سختی تست: سخت

۱۳) اگر $f(x)=۱-\sqrt{x}$ و $g(x)=[۱-x]$ باشد، به‌ازای چند مقدار صحیح a، $fog(x)=۱+a$ $\lim\limits_{x\to a^+}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\left.\begin{matrix} fg(x)=۱+a \\ fg(x)=۱-\sqrt{g(x)} \end{matrix}\right\}\to ۱+a=۱-\sqrt{g(x)}\to a=-\sqrt{g(x)}, a\le ۰\to$$

$$a^۲=g(x)\to a^۲=[-x]+۱\to a^۲=[-a^+]+۱\to a^۲=-a-۱+۱\to a^۲+a=۰\to \begin{cases} a=۰ \\ a=-۱ \end{cases}$$

که هر دو مقدار قابل قبول هستند.

گزینه صحیح: ۲

مبحث: حد تابع مرکب

درجه سختی تست: سخت

۱۴) حاصل $\lim_{x\to -۱}\frac{\cos ۲\pi x-۱}{x+۲\sqrt{-x}-۱}$ کدام است؟

۱)صفر ۲) $۲\pi^۲$ ۳) $۴\pi^۲$ ۴) $۸\pi^۲$

حد $\frac{۰}{۰}$ است و با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$H_۱=\frac{-۲\pi\sin(۲\pi x)}{۱-\frac{۲}{۲\sqrt{-x}}}=\frac{-۲\pi\sin(۲\pi x)}{۱-(-x)^{-\frac{۱}{۲}}}$$

دوباره حد $\frac{۰}{۰}$ است و با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$H_۲=\frac{-۴\pi^۲\cos(۲\pi x)}{\frac{۱}{۲}(-x)^{\frac{-۱}{۲}}(-۱)}\to x=-۱, H_۲=\frac{-۴\pi^۲}{-\frac{۱}{۲}}=۸\pi^۲$$

گزینه صحیح: ۴

مبحث: حد مبهم $\frac{۰}{۰}$

درجه سختی تست: متوسط

۱۵) برای تابع $f(x)=\frac{۱-۲x}{۶x^۲+x+a}$ اگر $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to-\frac{۲}{۳}} \frac{۳x+۲}{|x+a|}\times f(x)$ کدام است؟

۱)صفر ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴)وجود ندارد

حد $\frac{۰}{۰}$ است. ولی وجود دارد پس $x=\frac{۱}{۲}$ هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج است. که با جایگذاری $x=\frac{۱}{۲}$ در مخرج داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}\to\frac{۶}{۴}+\frac{۱}{۲}+a=۰\to a=-۲$$

با جایگذاری $a=-۲$ در تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x)=\frac{۱-۲x}{۶x^۲+x-۲}=\frac{۱-۲x}{(۲x-۱)(۳x+۲)}=\frac{-۱}{۳x+۲}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\frac{۲}{۳}}\frac{۳x+۲}{|x-۲|}\times f(x)=\frac{۳x+۲}{-x+۲}\times\frac{-۱}{۳x+۲}=\frac{-۱}{-\frac{۲}{۳}+۲}=-\frac{۳}{۴}$$

گزینه صحیح: ۳

مبحث: حد مبهم $\frac{۰}{۰}$

درجه سختی تست: متوسط

۱۶) اگر $f(x)=a(1-x)(x+1)-bx^2$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x\to a^-}\frac{xf(x)}{x+b}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳)صفر ۴)وجود ندارد

$$f(x)=a(1-x^2)-bx^2=-(a+b)x^2+a$$

تابع چند جمله‌ای از درجه صفر است پس ضریب x^2 باید صفر باشد. در نتیجه:

$$a+b=0\to a=-b\to f(x)=a=-b$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a^-}\frac{xf(x)}{x+b}=\lim_{x\to a^-}\frac{ax^2}{x-a}=\frac{a^2}{0^-}=-\infty$$

گزینه صحیح: ۱

مبحث: حد عدد بر صفر

درجه سختی تست: آسان

۱۷) اگر حد چپ تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^۲+|x|}{x^۲+|x|}$ در $x=a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

می‌دانیم که $|x^۲|=x^۲$ پس رابطه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{|x^۲|+|x|}{|x^۲|+b|x|}=\frac{|x|(|x|+۱)}{|x|(|x|+b)}$$

می‌دانیم $x=a$ ریشه مخرج است پس $b<۰$ و مخرج دارای ریشه است. در نتیجه:

$$|x|+b=۰\rightarrow|x|=-b\rightarrow x=\pm b$$

۲ مجانب قائم دارد.و

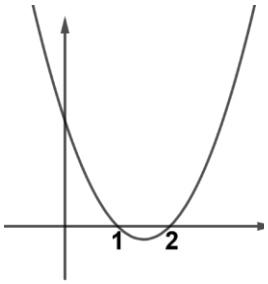
گزینه صحیح: ۲

مبحث: ترکیب مجانب قائم و حد

درجه سختی تست: سخت

۱۸) نمودار تابع $y=g(x)$ در زیر رسم شده است. برای تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a \\ g(۰) & x=a \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ است. اگر بازه (b,c) حدود تغییرات a باشد، $b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



با توجه به نمودار می‌توان رابطه $g(x)$ را به صورت زیر نوشت:

$$g(x)=(x-۱)(x-۲)=x^۲-۳x+۲\rightarrow$$
$$g(۰)=۲$$

که با جایگذاری در فرمول خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty\rightarrow\lim_{x\to a^+}\frac{x^۲-۳x+۲-۲}{x-a}=-\infty\rightarrow\lim_{x\to a^+}\frac{x(x-۳)}{x-a}=\frac{x(x-۳)}{۰^+}=-\infty\rightarrow$$

$$x(x-۳)<۰\rightarrow ۰<x<۳\rightarrow(b,c)=(۰,۳)\rightarrow b+c=۰+۳=۳$$

گزینه صحیح:۳

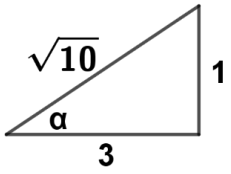
مبحث: حد

درجه سختی تست: سخت

۱۹) اگر α زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$ در نقطه $(-۱,-۱)$ با جهت مثبت محور xها باشد، حاصل عبارت $A=۳sin\alpha+۴\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $۰/۹\sqrt{۱۰}$ ۲) $۰/۳\sqrt{۱۰}$ ۳) $-۰/۹\sqrt{۱۰}$ ۴) $-۰/۳\sqrt{۱۰}$

$$y=(\frac{۱}{x})^{\frac{۱}{۳}}=x^{-\frac{۱}{۳}}\rightarrow y'=-\frac{۱}{۳}(x)^{-\frac{۴}{۳}}\rightarrow y'_{(-۱)}=-\frac{۱}{۳}\rightarrow \tan\alpha=-\frac{۱}{۳}$$



شیب منفی است. پس زاویه باز و α در ناحیه دوم است. یعنی $\sin>۰$ و $\cos<۰$ است.

با توجه به مثلث قائم الزاویه و نسبت‌های مثلثاتی داریم:

$$A=۳(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}})+۴(\frac{-۳}{\sqrt{۱۰}})=\frac{-۹}{\sqrt{۱۰}}=\frac{-۹\sqrt{۱۰}}{۱۰}=-۰/۹\sqrt{۱۰}$$

گزینه صحیح:۳

مبحث: مشتق و شیب خط و $\tan\alpha$ و نسبت‌های مثلثاتی

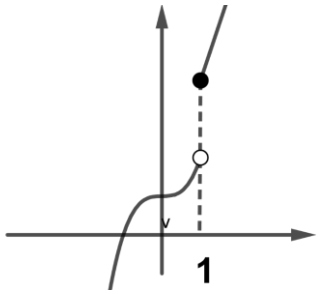
درجه سختی تست: متوسط

۲۰) تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}۳x+۱ & x\geq ۱\\ x^{۳}+۱ & x<۱\end{cases}$ داده شده است. کدام مورد در خصوص مشتقات یک طرفه f در $x=۱$ درست است؟

۱) $f'_{-}(۱)=۳$ ۲) $f'_{-}(۱)=+\infty$ ۳) $f'_{+}(۱)=-\infty$ ۴) $f'_{+}(۱)=+\infty$

تابع در $x=۱$ تنها از راست پیوسته است. پس مشتق راست آن موجود و برابر ۳ است. در نتیجه گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

اما تابع از سمت چپ پیوسته نیست پس مشتق چپ وجود ندارد پس گزینه ۱ نیز حذف می‌شود و گزینه ۲ صحیح است.



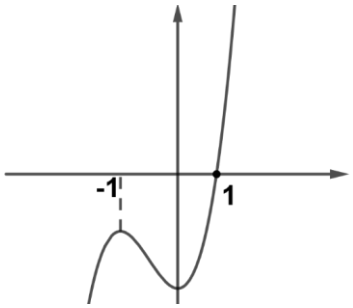
گزینه صحیح:۲

مبحث: پیوستگی مشتق‌پذیری

درجه سختی تست: سخت

۲۱) نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx-۵$ در زیر رسم شده است. عرض نقطه ماکسیمم نسبی تابع f ، کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۷}{۲}$



با توجه به نمودار، می‌توان نوشت:

$$f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx+c$$

$$\begin{cases} f(۱)=۰\rightarrow a+b+c-۵=۰ \\ f'(۰)=۰\rightarrow c=۰ \\ f'(-۱)=۰\rightarrow ۳a-۲b=۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=۵ \\ ۳a-۲b=۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۳ \end{cases}$$

با جایگذاری a و b در معادله $f(x)$ داریم:

$$f(x)=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۵$$
$$f(-۱)=-۲+۳-۵=-۴$$

گزینه صحیح:۱

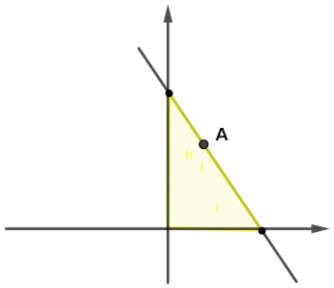
مبحث: کاربرد مشتق ماکزیمم و مینیمم نسبی

درجه سختی تست: آسان

۰۹۰۱۶۷۴۱۲۶
t.me/hamidehgha
hamidehghasem

۲۲) در نقطه A از نمودار سهمی $y=۲-x^۲$ واقع در ناحیه اول، مماس رسم می‌کنیم که مماس رسم شده همراه با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطه A کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$



$$A(\alpha, ۲-\alpha^۲)$$

$$y'=-۲x \rightarrow y'=m=-۲\alpha$$

برای محاسبه مساحت مثلث معادله خط را می‌نویسیم و محل تقاطع خط را با محورهای مختصات به دست می‌آوریم، که همان ارتفاع و قاعده مثلث هستند.

$$y=mx+b \rightarrow ۲-\alpha^۲=-۲\alpha^۲+b \rightarrow b=\alpha^۲+۲$$

$$y=-۲\alpha x+\alpha^۲+۲ \rightarrow \begin{cases} x=۰ \rightarrow y=\alpha^۲+۲ \\ y=۰ \rightarrow x=\frac{\alpha^۲+۲}{۲\alpha} \end{cases}$$

$$S_{\triangle}=\frac{۱}{۲}(\alpha^۲+۲)(\frac{\alpha^۲+۲}{۲\alpha})=\frac{(\alpha^۲+۲)^۲}{۴\alpha}$$

$$S'=۰ \rightarrow \frac{۲(\alpha^۲+۲)(۲\alpha)(۴\alpha)-۴(\alpha^۲+۲)^۲}{۱۶\alpha^۲}=۰ \rightarrow ۴(\alpha^۲+۲)\left[۴\alpha^۲-\alpha^۲-۲\right]=۰ \rightarrow ۳\alpha^۲-۲=۰ \rightarrow \alpha=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

در نتیجه عرض نقطه A برابر است با:

$$۲-\alpha^۲=۲-\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

گزینه صحیح: ۳

مبحث: کاربرد مشتق

درجه سختی تست: سخت