

$n = n \in \mathbb{Z}$

روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کداه

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (2a^2-1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
 تابع

$$\lim_{n \rightarrow n^+} f(n) = (1-a)n + (2a^2-1)(-n-1) = (-2a^2-a+2)n + (1-2a^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow n^-} f(n) = (-2a^2-a+2)n + (a-1)$$

$$\Rightarrow 1-2a^2 = a-1 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{a}{b} = 2$$

اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) \times g(1) = 0$$

$$\frac{f}{g} = 1 \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = 0 \rightarrow f'(1)g(1) - g'(1)f(1) = 0$$

بمابزای چند مقدار صحیح m تابع $y = \frac{mx+2}{x-1+m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)

$$y' = \frac{m^2 - m - 2}{(x-1+m)^2} \leq 0$$

$$\rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \rightarrow m = -1, 2 \rightarrow 0 \leq m < 2 \rightarrow m = 0, 1$$

بمابزای هر مقدار حقیقی و ناصفر a تابع $f(x) = \begin{cases} bx+c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی \mathbb{R} مشتق پذیر است. مقدار ac کدام است؟

$$f'(a) = \begin{cases} b & x < a \\ -\frac{1}{x^2} & x > a \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{پیوسته است} & \rightarrow ab+c = \frac{1}{a} \rightarrow a^2b+ac=1 \\ \text{مشتق پذیر است} & \rightarrow b = -\frac{1}{a^2} \rightarrow a^2b = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow -1+ac=1 \rightarrow ac=2$$

خط مماس بر منحنی $y = x^2 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

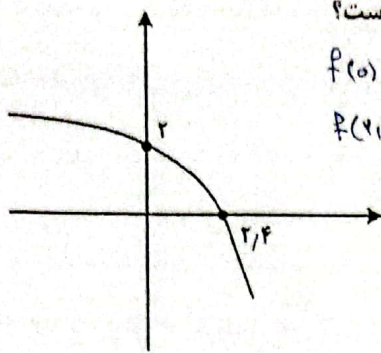
$$\left. \begin{aligned} \text{نقطه} & \rightarrow \frac{-b}{4a} = -1 \rightarrow \frac{-a}{4} = -1 \rightarrow a=4 \\ \text{مماس} & \rightarrow f(-1) = -4 \rightarrow b = 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{4} = 1$$

اگر $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x - 2) = 2$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}} x$ کدام است؟

$$\log_2((x-2)(x^2+2x+4)) = 2 \rightarrow \log_2(x^3-8) = 2$$

$$\rightarrow x^3 - 8 = 8 \rightarrow x^3 = 16$$

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{16} = \log_{\sqrt{2}} 16 = 4$$



نمودار تابع $y = c + \log_b(ax+b)$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

$$f(0) = 2 \rightarrow \log_b b + c = 2$$

$$f(2, 0) = 0 \rightarrow \log_b(2(a+b)) + c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2(a+b)} = 2d \rightarrow b = 4a + 2db$$

$$\Rightarrow -2 \leq b = 4a \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-2 \leq}{4a} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

حاصل عبارت $(3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$$3 \cos 4x + \sqrt{2} (\sin x - \cos x)$$

$$= 3 \cos 4x + \sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$= 3 \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})$$

$$= 3 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حاصل عبارت $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

$$\frac{1 + \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} = 0$$

مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ در بازه $[-2\pi, \pi]$ کدام است؟

$$\cos 2x + 1 - \cos^2 x = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x = -1$$

مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - [x^2]}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0} = 0$$

اگر $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

$$f-g = \frac{4}{(x-1)(x+3)} - \frac{1}{x-1}$$

$$f-g = \frac{1-x}{(x-1)(x+3)} = \frac{-1}{x+3}$$