بررسی نهایی از کنکور ارشد ریاضی ۱۴۰۲ (نوبت اول)*

کنکور اردیبهشت ۱۴۰۲ (نوبت اول)

۱) مقادیر a، $1+2a$ و $5-a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله اول (نخست) این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟!

۱) ۲/۷۵

۲) ۴/۲۵

۳) ۱۲/۲۵

۴) ۱۴/۷۵

a ، $\underbrace{1+2a}_{\text{واسطه عددی}}$ ، $5-a$

$2(1+2a) = a+(5-a) \Rightarrow 2+4a = 5 \Rightarrow \underline{a = 0/75}$

$0/75$ ، $1+2(0/75)$ ، $5-0/75 \Rightarrow \underbrace{0/75}_{t_1}$ ، $\underbrace{2/5}_{t_2}$ ، $\underbrace{4/25}_{t_3}$

تفاضل دو جمله متوالی : قدر نسبت دنباله عددی ؛ $t_2 - t_1 = 2/5 - 0/75$

$\Rightarrow d = 1/75$

جمله عمومی دنباله حسابی (عددی، خطی) : $a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow[d=1/75]{a_1=0/75} t_9 = t_1 + 8d$

$\longrightarrow t_9 = 0/75 + 8(1/75) = 14/75$ پاسخ گزینه ۴

۱- اختلاف ریشه های معادله $x^2+2kx+5=0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است

مقدار $\left[\frac{k^2}{2}\right]$ کدام است؟ (نمایش $[x]$: a ، $\Delta := b^2-4ac$

$ax^2+bx+c=0$

تفاضل دو ریشه معادله درجه

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۳

۴) ۴

با فرض $\Delta > 0$: $M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$\Delta = (2k)^2 - 4(1)(5) = 4k^2 - 20$

$: M = \frac{\sqrt{4k^2-20}}{|1|} = \frac{\sqrt{4(k^2-5)}}{1} = 2\sqrt{k^2-5} = \frac{4}{3}k$

$\Rightarrow 2\sqrt{k^2-5} - \frac{4}{3}k = 0 \xrightarrow[\text{رساندن طرفین}]{\text{به توان ۲}} \left(2\sqrt{k^2-5}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}k\right)^2$

معادله قبل

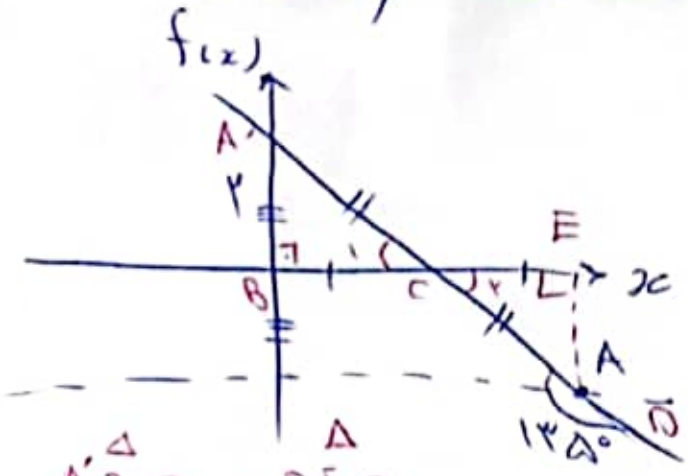
$\Rightarrow 4|k^2-5| = \frac{16}{9}k^2$

$\xrightarrow[\times \frac{1}{4}]{\text{با فرض } k>0 \text{ و تقسیم طرفین}} k^2-5 = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow k^2 = \frac{49}{9} \Rightarrow k = \pm\frac{7}{3}$

$: \left[\frac{k^2}{2}\right] = \left[\frac{\left(\pm\frac{7}{3}\right)^2}{2}\right] = \left[\frac{49}{18}\right] , 2 \leq \left[\frac{49}{18}\right] < 3$

۵) در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟!



($۲\sqrt{۵}$

($۳\sqrt{۶}$

($۴\sqrt{۳}$

($۵\sqrt{۲}$

$\overset{\triangle}{A'BC_1} \equiv \overset{\triangle}{DEC_2}$

$۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ = ۴۵^\circ$

$m = \tan(-۴۵^\circ) = -۱$

شیب خط AD

چون زوایای شیب همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود

$\tan ۴۵^\circ = ۱ \Rightarrow \frac{A'B}{BC} = ۱ \Rightarrow BC = ۲$

و $A'B = ۲$

$\overline{BC} = \overline{CE} = ۲$ واحد

مختصات نقطه A : $(۴, -۲)$

مختصات مبدأ (نقطه B) : $(۰, ۰)$

فاصله A از B : $= \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{(۴-۰)^۲ + (۰-(-$

$\Rightarrow |AB| = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$

۶) اگر $f(x)=x^2-[x]$ و $f(af(\sqrt{5}))=2$ باشد، کدام میتواند مقدار a باشد؟!

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{-1}{3}$

۳) $\frac{1}{5}$

۴) $\frac{-1}{5}$

$f(x)=x^2-[x]$

$f(af(\sqrt{5}))=2$

$f(\sqrt{5})=(\sqrt{5})^2-\underbrace{[\sqrt{5}]}_{\sim 2,\dots}=5-2=3$

$\Rightarrow f(3a)=2 \longrightarrow (3a)^2-[3a]=2$

$\Rightarrow \underbrace{9a^2}_{=1}-\underbrace{[3a]}_{=-1}=2$

$3a=-1 \Rightarrow a=\frac{-1}{3}$. گزینه ۲

بطور حدسی

$9\left(\frac{-1}{3}\right)^2-\left[3\left(\frac{-1}{3}\right)\right]=1-(-1)=2$

۸) به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+6x^2+ax+1$ خط $10y-x=-10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟!

۱) ۱۵

۲) ۱۲

۳) ۹

۴) ۵

$10y-x=-10 \xrightarrow[y=1]{\text{به عرض ۱ واحد}} 10(1)-x=-10$

$\Rightarrow x=20$

$f^{-1}(20)=1 \Longrightarrow f(1)=20$

$f(x)=x^3+6x^2+ax+1 \xrightarrow{x=1} 1^3+6(1)^2+a(1)+1=20$

$\Rightarrow 1+6+a+1=20 \Longrightarrow a=12$ گزینه ۲

۹) اگر $\log_2(x^2+2x+4)+\log_2(x-2)=3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt[3]{2}} x$ کدام است؟!!

۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{4}{3}$

۳) 3

۴) 4

طبق رابطه جمع دو تابع لگاریتمی داریم: $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$

$$\Rightarrow \log_2(x^2+2x+4)+\log_2(x-2)=3$$

$$\Rightarrow \log_2(x^2+2x+4)(x-2)=3$$

$$\Rightarrow (x^2+2x+4)(x-2)=8 \Rightarrow x^3-8=8 \Rightarrow x^3=16$$

اتحاد چاق و لاغر

$$(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$$

مطلوب است: $\log_{\sqrt[3]{2}} x \xrightarrow{x=2^{\frac{4}{3}}} \log_{2^{\frac{1}{3}}} 2^{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\times 3\times 1=4$$

گزینه ۴

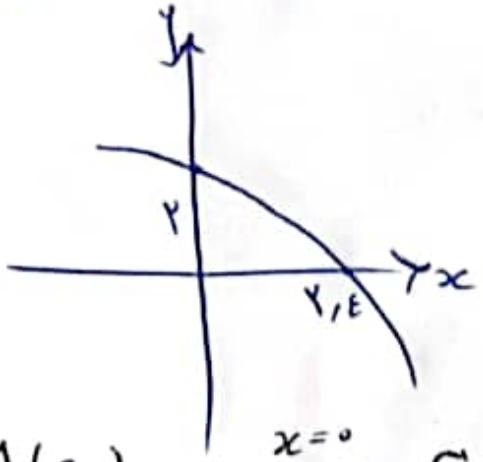
۱۰) نمودار تابع $y = c + \log_{5}^{(ax+b)}$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$

۱) $\frac{-2}{5}$

۲) $\frac{-3}{5}$

۳) $\frac{-1}{10}$

۴) $\frac{-3}{10}$



$$y(0) = 2 \xrightarrow{x=0} c + \log_{5}^{(a(0)+b)} = 2$$

$$\Rightarrow c + \log_{5}^{b} = 2$$

و

$$y(2,4) = 0 \xrightarrow{x=2,4} c + \log_{5}^{a(2,4)+b} = 0$$

$$\begin{cases} c + \log_{5}^{b} = 2 \\ c + \log_{5}^{(2,4a+b)} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)}$$

حل دستگاه:

$$\begin{cases} c + \log_{5}^{b} = 2 \\ -c - \log_{5}^{(2,4a+b)} = \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{5}^{b} - \log_{5}^{2,4a+b} = 2 \Rightarrow \log_{5}^{\frac{b}{2,4a+b}} = 2$$

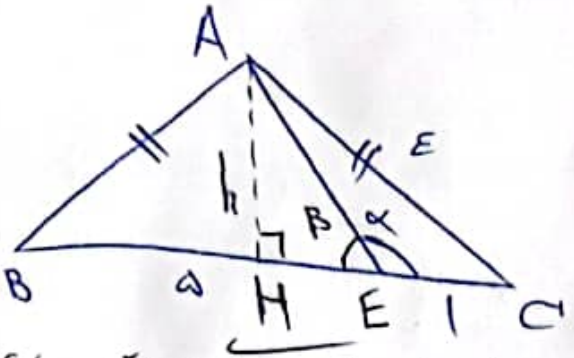
$$\Rightarrow \frac{b}{2,4a+b} = 25 \Rightarrow b = 25(2,4a+b)$$

$$\Rightarrow b = 60a + 25b \Rightarrow -24b = 60a \xrightarrow{\div(12)} -2b = 5$$

$$\Rightarrow b = \frac{5a}{-2} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{-5a}{2}} = a \times \frac{-2}{5a} = \frac{-2}{5}$$

گزینه ۱

۱۱) در شکل زیر مثلث ABC متساوی الساقین است. $tg\,\alpha$ ؟؟



۱) $\frac{-۲}{۵}$

۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{-\sqrt{۷}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

توضیحات) طبق این قضیه که ارتفاع مثلث متساوی الساقین، عمود منصف می باشد، داریم:

$\overline{BC} = BH + \overline{CH} = ۵ + ۱ = ۶$, $\overline{BH} = \overline{CH}$

$\Rightarrow \overline{CH} = ۳$ واحد , $\overline{HE} = ۲$, $tg\beta = \frac{\sqrt{۷}}{-۲}$

$h^۲ = \overline{\quad}^۲ - \overline{CH}^۲ \Rightarrow h^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ \Rightarrow h = \pm\sqrt{۷}$

$\alpha = \pi - \beta$; $\tan\alpha = \tan(\pi - \beta) = \frac{\tan\pi - \tan\beta}{1 + \tan\pi \cdot \tan\beta}$

$= -\tan\beta \Longrightarrow \tan\alpha = -\left(\frac{\sqrt{۷}}{۲}\right) = \frac{-\sqrt{۷}}{۲}$ گزینه ۳

۱۱) حاصل عبارت $3\cos 4x + \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$

$* \ \sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2} \cdot \cos\frac{x \mp y}{2}$

۱۲) حاصل عبارت $3\cos 4x + \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟!

$3\cos 4x + \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}}$

$\Rightarrow 3\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow ; \ \cos\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{5\pi}{12}$

$\Rightarrow = 3 \times \frac{1}{2} + \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\right)$ *

$= \frac{3}{2} + \sqrt{2}\left(2\sin\frac{-\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{2 \times 2}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}\left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{3}{2} + \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$

۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

گزینه ۲