

۱- اگر $x+1, x-1, 2x+1$ و x به ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنباله هندسی باشند، حاصل ضرب

مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

$$\begin{array}{l} 1 \quad (1) \\ -1 \quad (2) \\ 2 \quad (3) \\ -2 \quad (4) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1, q^2 = x+1 \\ a_3 = a_1, q^3 = x-1 \end{array} \right\} \rightarrow q = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_7 = a_1, q^7 = 2x+1 \\ a_8 = a_1, q^8 = x \end{array} \right\} \rightarrow q = \frac{x}{2x+1}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x}{2x+1}$$

$$(x-1)x(2x+1) = x(x+1) \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = x^2 + x$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 8 \rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$q = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-2}{2-2} = -1$$

$$\underline{\underline{-1}}$$

۳- اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $(-\infty, 2/5]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۲۴/۷۵ (۴)

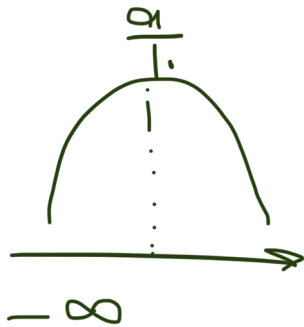
۲۳/۲۵ (۳) ✓

۱۴/۲۵ (۲)

۱۳/۷۵ (۱)

$$x_s = \frac{-a}{-10} = \frac{a}{10} = \frac{5}{1} \rightarrow a = 50$$

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(2500 - 1600)}{-40} = \frac{900}{40} = 22,5$$



۳ ۲ ۱

۴- اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $2-x^{14}$ بر x^2+x+1 باشد، مجموع ضرایب چند جمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ ($x \neq 1$)

۴ (۴)

-۲ (۳)

-۱ (۲)

(۱) صفر

$$2-x^{14} = (x^2+x+1)q(x) + r(x)$$

$$(x-1)(2-x^{14}) = (x^2-1)q(x) + (x-1)r(x)$$

$$(x-1)(2-x^7) = (x-1)r(x)$$

\downarrow

$$x^7-1$$

$$x^7-1$$

$$r(x) = 2-x^7 = 2-(-x-1) = 1+x^7$$

گزیده

۵- برای چند مقدار صحیح m هر دو ریشه معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ بزرگتر از -3 است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۲ ✓

(۱) ۴

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > -2 \\ \beta > -2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \alpha + 2 > 0 \\ \beta + 2 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha > 0 \rightarrow \alpha + \beta + 2 > 0 \\ \beta > 0 \rightarrow (\alpha + 2)(\beta + 2) > 0 \end{array}$$

$$4\beta + 2(\beta + \alpha) + 9 > 0$$

$$\frac{m}{2} + 2x + 9 > 0$$

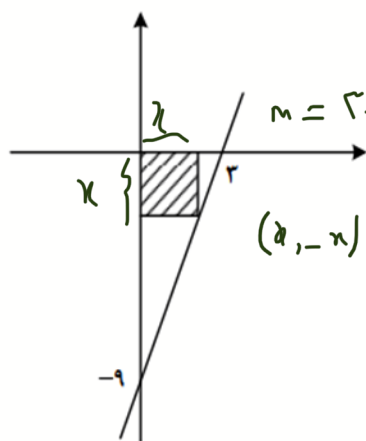
$$\Delta = 49 - 4m > 0 \rightarrow m < \frac{49}{4} = 12.25$$

$$2 < m < 12.25$$

$$m = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

لذا
۲

۶- در شکل زیر، قطر مربع هاشور خورده، کدام است؟



$$m = -3 \rightarrow y = -3x - 9$$

$$(a, -a) \rightarrow -a = -3a - 9$$

$$a = \frac{9}{2}$$

$$s = \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2} \times 9}{2} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

لین سز

$$2,5\sqrt{2} \quad (1)$$

$$3,5\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\frac{9}{2\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\frac{9}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

۷- در یک مستطیل، نقاط $A(5, 2)$ و $C(4, -1)$ دو رأس غیرمجاور و دو رأس B و D روی خط $x - 3y = 3$ واقع اند.

اختلاف طول نقاط B و D کدام است؟

$3/5$ (۲)

3 (۱)

$1/5$ (۴)

$$y = \frac{x-3}{3}$$



$A(5, 2)$

$B(x, \frac{x-3}{3})$

$C(4, -1)$

$$\begin{aligned} m_{AD} &= \frac{2-(-1)}{5-4} = 3 \\ m_{BC} &= \frac{-1-2}{4-x} = -3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x-9}{3(x-4)} \times \frac{x}{3(x-5)} &= -1 \\ x^2 - 9x &= -9(x^2 - 9x + 20) \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow 10x^2 - 90x + 180 = -$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$x = 2, 4 \leftarrow (x-2)(x-4) = 0$$

نتیجه

۸- ضابطه تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 7 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ است. برای چند مقدار a $f(1-a) = f(2+a)$ است؟

$$a = 0 \rightarrow f(1) = f(2) \Rightarrow -7 \neq -5$$

$$a \neq 0$$

$$\rightarrow 2(1-a) - 1 = (2+a)^2 - (2+a) - 7$$

$$1 - 2a = 4 + a^2 + 4a - 2 - a - 7 - 7$$

$$\rightarrow 0 = a^2 + 6a - 7 \rightarrow |a| = 1, -7$$

$$\rightarrow a = \pm 1$$

۱

۹- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1+x}}$ در چند نقطه تابع وارون خود را قطع می کند؟

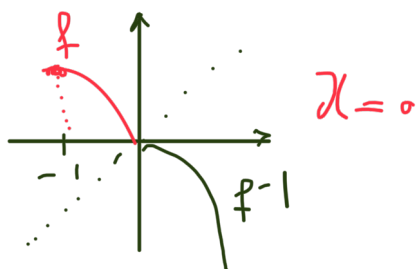
۱ (✓)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

$$D_f = [-1, 0]$$



۱۰. اگر $\log(2-x) - \log \frac{1}{(x-2)^2} = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}}(-x)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$-6 \quad (1)$$

$$\log(2-x) + 2 \log(2-x) = 3$$

↓

$$\log(2-x) = 1 \rightarrow 2-x=10$$

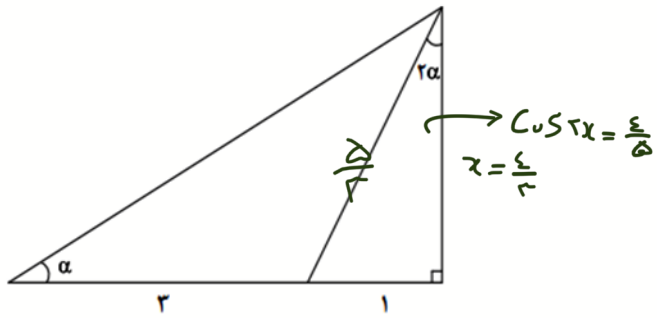
$$\boxed{x=-8}$$

↓

$$\log_{\sqrt{2}} 10 = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 2$$

۲

۱۱- در شکل زیر، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟



- $\frac{1}{4}$ (۱)
- $\frac{3}{4}$ (۲)
- $\frac{3}{5}$ (۳)
- $\frac{4}{5}$ (۴) ✓
- $\frac{4}{5}$ (۵)

$$\tan x = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2 \times \frac{4}{5}}{1 - (\frac{4}{5})^2} \Rightarrow \frac{x^2}{1} = 1 - \frac{x^2}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} = 1 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

نتیجه

۱۲- اگر $3\sin^2 x + a\cos^2 x = 4$ باشد، $\cot^2 x$ با کدام مورد برابر است؟

$$\frac{1}{3-a} \quad (4)$$

$$\frac{1}{a-3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4-a} \quad (2)$$

$$\frac{1}{a-4} \quad (1) \checkmark$$

$$3(1-\cos^2 x) + a(\cos^2 x) = 4$$

$$\cos^2 x (a-3) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{a-3} \\ \sin^2 x = 1 - \frac{1}{a-3} = \frac{a-4}{a-3} \end{cases}$$

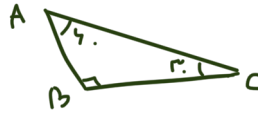
$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{a-4}$$

۱۲

۱۳- در مثلث ABC، اگر $\tan(B-C) = \sqrt{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1-2\cos(B+C)}{4\sin B \cos C}$ کدام است؟

$\tan C$ (۴) $\tan B$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$$\frac{1-2\cos 120^\circ}{4\sin 90^\circ \cos 30^\circ} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



۱۴- تعداد جواب های معادله $\cos(\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\cos(\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}) = -\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{x} - \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow \sqrt{x} = x + 2k\pi$$



$$\sqrt{x} - \frac{\pi}{4} = -x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow \sqrt{x} = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$$



۳

۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} = 2$ باشد، مقدار $\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ کدام است؟

$-\frac{1}{4}$ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

-2 (۱)

$\frac{b+c}{a} = -\frac{1}{2}$

$x=0 \rightarrow \frac{a+1}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow a = -1$

$\frac{-1 + (1 + \frac{bx}{r})(1 + \frac{cx}{r})}{x} = \frac{b+c}{r} = 2$

$\Rightarrow b+c = 2$

۱۶- برای چند مقدار a تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{ax^2 + (1-a)x + a+1}$ یک مجانب قائم دارد؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۷ (۴) ۵ (۵)

۱ حالت $a = 0$

I- $\Delta = 0 \rightarrow a^2 - 7a + 1 - 4(1-a) = 0$

$-7a^2 - 7a + 1 = 0$, $\Delta = 7^2 + 28 = 85$

$a = \frac{7 \pm \sqrt{85}}{-7} = \frac{-7 \pm \sqrt{85}}{7}$

II- حالت $x = 2$ $\rightarrow 9a + (1-a)x^2 - a + 1 = 0 \rightarrow 7a + 3 = 0 \rightarrow a = -\frac{3}{7}$

$x = -\frac{1}{7} \rightarrow \frac{1}{49}a + (1-a)x^2 - a + 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{49}a + \frac{1}{49} = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{49}$

۳ نتیجه

۱۷- به ازای مقادیر طبیعی c ، تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} & |x| \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & |x| > c \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. کدام

می تواند مقدار $\left[\frac{a}{b}\right]$ باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$\begin{aligned} x=c &\rightarrow \sqrt{c^2 - 2c + 1} = ac^2 + bc + 2 \\ x=-c &\rightarrow \sqrt{c^2 + 2c + 1} = ac^2 - bc + 2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} &\ominus \Rightarrow -2 = 2bc \\ &\Rightarrow bc = -1 \end{aligned}$$

$$b = -\frac{1}{c}$$

$$\oplus \quad 2c = 2ac^2 + 2 \Rightarrow a = \frac{c-2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left[\frac{-2-c}{c}\right] = \left[\frac{2}{c} - 1\right]$$

$$[1, 0, -1]$$

لزینه ۱

۱۸- اگر $f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{1 - \cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'(\frac{7\pi}{6}) - 2g'(\frac{7\pi}{6})$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$



$$f(x) = \frac{(1 + \cos^2 x)(1 + \cos^2 x - 2\cos x)}{(1 + \cos^2 x)(1 - \cos^2 x)}$$

$$f - 2g = \frac{1 + \cos^2 x - 2\cos x}{1 - \cos^2 x} - \frac{2}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos(\cos x - 1)}{1 - \cos^2 x} = -\cos x$$

$$\xrightarrow{\text{مستقيم}} \sin 11 = \sin \frac{7\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

نتیجه

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^{m-1} & x \geq a \end{cases}$ دارای نقطه گوشه‌ای است؟

(۱) صفر (۲) بیش از ۲ (۳) ۲ (۴) ۱ ✓

$$m = 1$$

$$f'(a) = .$$

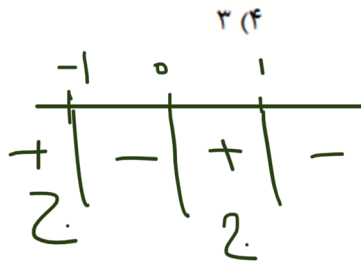
$$m > .$$

$$f'(a) = \begin{cases} 0 & m \geq 2 \\ 1 & m = 1 \end{cases}$$

نتیجه:

۲۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و

k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m+n+k$ کدام است؟



۴ (۳) ۵ (۲) ۶ (۱)

$$\begin{aligned} x > 0 &: \sqrt{x(1-x)} \\ x < 0 &: \sqrt{x(1+x)} \end{aligned}$$

