گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۳

(تیر ماه ۱۴۰۳)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(خارج کشور)

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۱، فصل ۱)

نکته: به‌طورکلی در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S=-\frac{b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

راه‌حل اول:

می‌دانیم قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر تقسیم دو جملهٔ متوالی است. پس اگر دنباله مورد نظر را a_n با قدرنسبت r بنامیم، داریم:

$$r=\frac{a_۵}{a_۴}=\frac{a_۲}{a_۱}\Rightarrow\frac{۲-x}{x-۱}=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow ۲x+۲-x^۲-x=x^۲-x\Rightarrow ۲x^۲-۲x-۲=۰\Rightarrow x^۲-x-۱=۰$$

از حل معادلهٔ فوق دو مقدار برای x به‌دست می‌آید. حاصل جمع و ضرب این دو مقدار برابر $S=x_۱+x_۲=۱$ و $P=x_۱x_۲=-۱$ است. از طرفی، قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{x}{x+۱}$$

از آنجا که x در معادله $x^۲-x-۱=۰$ صدق می‌کند، پس $x^۲=x+۱$ و داریم:

$$r=\frac{x}{x+۱}=\frac{x}{x^۲}=\frac{۱}{x}$$

بنابراین حاصل جمع مقادیر ممکن برای قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$r_۱+r_۲=\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=\frac{S}{P}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

راه‌حل دوم:

می‌دانیم قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر تقسیم دو جملهٔ متوالی است. پس اگر دنباله مورد نظر را a_n با قدرنسبت r بنامیم، داریم:

$$r=\frac{a_۵}{a_۴}=\frac{a_۲}{a_۱}\Rightarrow\frac{۲-x}{x-۱}=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow ۲x+۲-x^۲-x=x^۲-x\Rightarrow ۲x^۲-۲x-۲=۰\Rightarrow x^۲-x-۱=۰$$

از حل معادلهٔ فوق دو مقدار برای x به‌دست می‌آید. حاصل جمع و ضرب این دو مقدار برابر $S=x_۱+x_۲=۱$ و $P=x_۱x_۲=-۱$ است. از طرفی، قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{x}{x+۱}$$

پس برای مقادیر قدرنسبت یعنی $r=\frac{x}{x+۱}$ خواهیم داشت:

$$r_۱=\frac{x_۱}{x_۱+۱}\ ,\ r_۲=\frac{x_۲}{x_۲+۱}$$

بنابراین حاصل جمع مقادیر ممکن برای قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$r_۱+r_۲=\frac{x_۱}{x_۱+۱}+\frac{x_۲}{x_۲+۱}=\frac{x_۱x_۲+x_۱+x_۲x_۱+x_۲}{x_۱x_۲+x_۱+x_۲+۱}=\frac{۲P+S}{P+S+۱}=\frac{-۲+۱}{-۱+۱+۱}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۱، فصل ۱)

نکته: ترکیب عطفی، فصلی و شرطی دو گزاره به‌صورت زیر است:

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د

راه‌حل اول:

جدول ارزش گزارهٔ داده‌شده را تشکیل می‌دهیم:

p	q	r	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\Rightarrow r$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q\vee r$	$[(p\wedge q)\Rightarrow r]\Rightarrow(\sim p\sim q\vee r)$
د	د	د	د	د	ن	ن	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن	د
د	ن	د	ن	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د	د	د	د	د

همان‌طور که می‌بینید، گزارهٔ $[(p\wedge q)\Rightarrow r]\Rightarrow(\sim p\vee\sim q\vee r)$ همواره درست است.

راه‌حل دوم:

نکته: برای دو گزارهٔ p و q همواره داریم: $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

نکته: برای دو گزارهٔ p و q داریم:

قوانین دمورگان: $\begin{cases}\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q\\ \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q\end{cases}$

نکته: $p\vee\sim p\equiv T$

با توجه به نکات، گزارهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم.

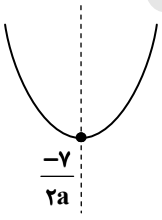
$$[(p\wedge q)\Rightarrow r]\Rightarrow(\sim p\vee\sim q\vee r)\equiv\sim[\sim(p\wedge q)\vee r]\vee(\sim p\vee\sim q\vee r)$$
$$\equiv[(p\wedge q)\wedge\sim r]\vee[\sim p\vee\sim q\vee r]\equiv[p\wedge q\wedge\sim r]\vee\sim[p\wedge q\wedge\sim r]$$

با فرض $p\wedge q\wedge\sim r\equiv s$ داریم: $s\vee\sim s\equiv T$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a<b$، آن‌گاه $f(a)<f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت.

می‌دانیم اگر $a>0$ سهمی $y=ax^2+bx+c$ در بازه $\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right)$ اکیداً صعودی و اگر $a<0$ این سهمی در بازه $\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right)$ اکیداً نزولی است و این بازه بزرگ‌ترین بازه با این خاصیت است؛ زیرا $\frac{-b}{2a}$ طول رأس سهمی است؛ بنابراین در سهمی $y=ax^2+7x-1$ که در بازه $[-0/7,+\infty)$ اکیداً صعودی است، a مقداری مثبت است و داریم:



$$\frac{-7}{2a}=-0/7\Rightarrow 2a=10\Rightarrow a=5$$

بنابراین عرض رأس سهمی $y=5x^2+7x-1$ برابر است با:

$$y_S=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=\frac{-(49-4\times5\times(-1))}{4\times5}=\frac{-69}{20}=\frac{-345}{100}=-3/45$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته (قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها): اگر $f(x)$ و $p(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجهٔ $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که: $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$

که در آن $r(x)=0$ یا درجهٔ $r(x)$ از درجهٔ $p(x)$ کمتر است.

برای یافتن باقی‌مانده تقسیم یک عبارت بر x^2-x+1 کافی است مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار دهیم، یعنی $x^2-x+1=0$

توجه کنید از هر نتیجه‌ای که این تساوی می‌دهد نیز می‌توان استفاده کرد.

$$\left.\begin{array}{l}x^2-x+1=0\Rightarrow x^2=x-1\Rightarrow x^3=x^2-x\\ x^2-x+1=0\Rightarrow x^2-x=-1\end{array}\right\}\Rightarrow x^3=-1$$

بنابراین برای یافتن باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^{17}-5$ بر x^2-x+1، به جای x^3، منفی یک قرار می‌دهیم:

$$x^{17}-5=(x^3)^5x^2-5 \Rightarrow r(x)\equiv(-1)^5x^2-5 \Rightarrow r(x)\equiv -x^2-5 \xrightarrow{x^2=x-1} r(x)\equiv -(x-1)-5$$
$$\Rightarrow r(x)=-x-4$$

حاصل‌ضرب ضرایب این باقی‌مانده برابر است با:

$$(-1)(-4)=4$$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۲، فصل ۱)

راه‌حل اول:

برای آنکه هر دو ریشه معادلهٔ $-x^2+5x+m=0$ کوچک‌تر از $\frac{9}{2}$ باشند، می‌توانیم از تغییر متغیر $x-\frac{9}{2}=t$ استفاده کنیم. در این صورت باید هر دو ریشهٔ t منفی باشند:

$$\left.\begin{array}{l}-x^2+5x+m=0\\ x-\frac{9}{2}=t \Rightarrow x=\frac{9}{2}+t\end{array}\right\} \Rightarrow -(t+\frac{9}{2})^2+5(t+\frac{9}{2})+m=0 \Rightarrow -t^2-9t-\frac{81}{4}+5t+\frac{45}{2}+m=0 \Rightarrow t^2+4t-(m+\frac{9}{4})=0$$

برای آنکه این معادله دو ریشهٔ منفی داشته باشد، باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases}\Delta>0 \Rightarrow 4^2+4(m+\frac{9}{4})>0 \Rightarrow 16+4m+9>0 \Rightarrow m>-\frac{25}{4}\\ S<0 \Rightarrow -4<0 \ \checkmark\\ P>0 \Rightarrow -(m+\frac{9}{4})>0 \Rightarrow m+\frac{9}{4}<0 \Rightarrow m<-\frac{9}{4}\end{cases}$$

با اشتراک محدوده‌های به‌دست آمده $-\frac{25}{4}<m<-\frac{9}{4}$ به‌دست می‌آید که شامل ۴ عدد صحیح $\{-6,-5,-4,-3\}$ است.

راه‌حل دوم:

با توجه به روش کلی حل معادلهٔ درجه دوم، جواب‌های معادله به‌صورت $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ خواهد بود؛ بنابراین کافی است این جواب‌ها از $\frac{9}{2}$ کوچک‌تر باشد:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4(-1)(m)}}{-2}<\frac{9}{2} \Rightarrow \pm\sqrt{25+4m}<4$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{25+4m}<4 \Rightarrow 0<25+4m<16 \Rightarrow -25<4m<-9 \Rightarrow \frac{-25}{4}<m<\frac{-9}{4}\\ -\sqrt{25+4m}<4 \text{ همواره درست است.}\end{cases}$$

در نتیجه جواب مسأله به‌صورت $-\frac{25}{4}<m<-\frac{9}{4}$ خواهد بود که شامل ۴ عدد صحیح $\{-6,-5,-4,-3\}$ می‌باشد.

۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۱)

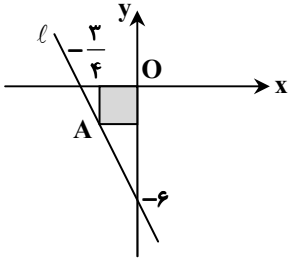
راه‌حل اول:

معادلهٔ خط ℓ گذرنده از دو نقطهٔ $(0,-6)$ و $(-\frac{3}{4},0)$ به‌صورت زیر است:

$$y=(\frac{-6-0}{0-(-\frac{3}{4})})x-6 \Rightarrow y=-8x-6$$

مختصات رأس A از مربع به‌صورت $A(a,a)$ است. (زیرا به‌دلیل مربع بودن شکل سؤال، A باید روی نیمساز ناحیه سوم باشد.)

نقطهٔ A روی خط ℓ است، پس:



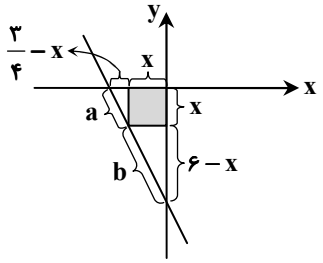
$$a=-8a-6 \Rightarrow 9a=-6 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

بنابراین طول قطر OA برابر فاصله نقطهٔ $O(0,0)$ از نقطهٔ $A(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ است:

$$OA=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(-\frac{2}{3})^2}=\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

راه‌حل دوم:

می‌توان به‌صورت هندسی به مسأله نگاه کرد. با استفاده از قضیهٔ تالس خواهیم داشت:



$$\left.\begin{array}{l}\frac{\frac{۳}{۴}-x}{x}=\frac{a}{b}\\ \frac{x}{۶-x}=\frac{a}{b}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\frac{۳}{۴}-x}{x}=\frac{x}{۶-x}\Rightarrow (۶-x)(\frac{۳}{۴}-x)=x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲-\frac{۲۷}{۴}x+\frac{۹}{۲}=x^۲\Rightarrow \frac{۲۷}{۴}x=\frac{۹}{۲}\Rightarrow x=\frac{\frac{۹}{۲}}{\frac{۲۷}{۴}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

طول قطر مربع $\sqrt{۲}$ برابر ضلع است، پس طول قطر برابر است با:

$$\sqrt{۲}x=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}=\frac{۴}{۳\sqrt{۲}}$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۱)

نکته: اگر خطوط $d_۱$ و $d_۲$ به‌ترتیب با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه $m_۱m_۲=-۱$ و برعکس.

فرض کنید رأس A و C از مستطیل $ABCD$ روی خط $x=۲y-۴$ هستند، پس مختصات آن‌ها به‌صورت $(۲k-۴,k)$ است. با توجه به دو نقطهٔ $B(۱,۴)$ و $D(-۱,۰)$ و اینکه می‌دانیم در مستطیل $ABCD$ دو ضلع AB و AD بر یکدیگر و دو ضلع BC و CD بر یکدیگر عمود هستند، پس:

$$m_{AB}\times m_{AD}=-۱\Rightarrow \frac{k-۴}{۲k-۴-۱}\times\frac{k-۰}{۲k-۴-(-۱)}=-۱\Rightarrow \frac{k(k-۴)}{(۲k-۵)(۲k-۳)}=-۱\Rightarrow -۴k^۲+۱۶k-۱۵=k^۲-۴k$$

$$\Rightarrow ۵k^۲-۲۰k+۱۵=۰\Rightarrow k^۲-۴k+۳=۰\Rightarrow k=۳,۱$$

پس مختصات دو نقطهٔ A و C به‌صورت $A(۲\times۱-۴,۱)$ و $C(۲\times۳-۴,۳)$ است.

پس در مستطیل $ABCD$ با مختصات رئوس $A(-۲,۱)$، $B(۱,۴)$، $C(۲,۳)$ و $D(-۱,۰)$، طول اضلاع برابر است با:

$$AB=\sqrt{(-۲-۱)^۲+(۱-۴)^۲}=۳\sqrt{۲}$$

$$AD=\sqrt{(-۲+۱)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}$$

پس طول مستطیل برابر $۳\sqrt{۲}$ است.

۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (درس ۲، فصل ۵)

با توجه به اینکه $a^۲\geq ۰$، پس $۱+a^۲\geq ۱$، یعنی:

$$f(۱+a^۲)=۷-۳(۱+a^۲)=۴-۳a^۲$$

(توجه کنید اگر $a=۰$ باشد، آن‌گاه $f(۱+a^۲)$ تعریف نشده است.)

ضمناً برای پیدا کردن محدودهٔ $\left|\frac{-a^۲}{۱+a^۲}\right|$، داریم:

$$a^۲>۰\Rightarrow \frac{۱}{a^۲}>۰\Rightarrow ۱+\frac{۱}{a^۲}>۱\Rightarrow \frac{a^۲+۱}{a^۲}>۱\Rightarrow ۰<\frac{a^۲}{۱+a^۲}<۱\Rightarrow -۱<\frac{-a^۲}{۱+a^۲}<۰\Rightarrow ۰<\left|\frac{-a^۲}{۱+a^۲}\right|<۱$$

بنابراین:

$$f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})=-۲(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})=\frac{۲a^۲}{۱+a^۲}$$

اکنون به حل معادلهٔ $f(۱+a^۲)=f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})$ می‌پردازیم:

$$۴-۳a^۲=\frac{۲a^۲}{۱+a^۲}\Rightarrow ۴+۴a^۲-۳a^۲-۳a^۴=۲a^۲\Rightarrow ۳a^۴+a^۲-۴=۰\Rightarrow (a^۲-۱)(۳a^۲+۴)=۰\xrightarrow{a^۲>۰} a^۲=۱$$

$$\Rightarrow a=\pm ۱$$

اختلاف این دو مقدار به‌دست آمده برابر $۲=(-۱)-۱$ است.

۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: تابع f را در یک مجموعه، اکیداً صعودی می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این مجموعه که $a < b$، آن‌گاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت.

تابع f اکیداً صعودی است. (زیرا تابع $y = ۱+\sqrt{۱+x}$ اکیداً صعودی است.) می‌دانیم تابع اکیداً صعودی وارون خود را فقط می‌تواند روی خط $y = x$ قطع کند. پس برای یافتن محل تقاطع تابع f با $f^{-۱}$، می‌توانیم معادلهٔ $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$f(x) = x \Rightarrow \sqrt{۱+\sqrt{۱+x}} = x \xrightarrow{x \geq ۰} ۱+\sqrt{۱+x} = x^۲ \Rightarrow \sqrt{۱+x} = x^۲ - ۱ \xrightarrow{x \geq ۱} ۱+x = ((x-۱)(x+۱))^۲$$

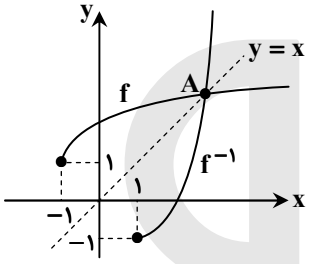
$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \xrightarrow{x \geq ۰} \text{غ‌ق‌ق} \\ ۱ = (x-۱)^۲(x+۱) \Rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱)(x+۱) = ۱ \Rightarrow x^۳ - x^۲ - x = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(x^۲ - x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ غ‌ق‌ق} \ , \ x = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \ , \ x = \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \text{ غ‌ق‌ق}$$

توجه کنید با توجه به اینکه $x \geq ۰$ و $x^۲ - ۱ \geq ۰$، پس دامنهٔ معادله به‌صورت $x \geq ۱$ است؛ بنابراین سه جواب $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$، -۱ و $۰ = x$ غیرقابل‌قبول هستند و تنها جواب $x = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ قابل‌قبول است.

پس تابع f و $f^{-۱}$ نیز یکدیگر را فقط در یک نقطه $A(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})$ قطع می‌کنند.

نمودار تقریبی دو تابع f و $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است:



۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۳)

نکته: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

نکته: قانون توان لگاریتم: $\log_a b^n = n \log_a b$

ابتدا دامنه معادله را تعیین می‌کنیم:

$$۱-x > ۰ \Rightarrow x < ۱$$

$$x^۲ - ۲x + ۱ > ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ > ۰ \Rightarrow x \neq ۱$$

بنابراین دامنهٔ معادله به‌صورت $(-\infty, ۱)$ است. اکنون به حل معادله می‌پردازیم:

$$\log(x^۲ - ۲x + ۱) + ۳\log(۱-x) = ۵ \Rightarrow \log(x-۱)^۲ + ۳\log(۱-x) = ۵ \Rightarrow ۲\log|x-۱| + ۳\log(۱-x) = ۵$$

$$\xrightarrow{x<۱} ۲\log(۱-x) + ۳\log(۱-x) = ۵ \Rightarrow ۵\log(۱-x) = ۵ \Rightarrow \log(۱-x) = ۱ \Rightarrow ۱-x = ۱۰ \Rightarrow x = -۹$$

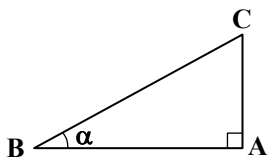
جواب به‌دست آمده قابل‌قبول است. مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\log_۳(-x) = \log_۳ ۹ = \log_۳ ۳^۲ = ۲\log_۳ ۳ = ۲ \times ۱ = ۲$$

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

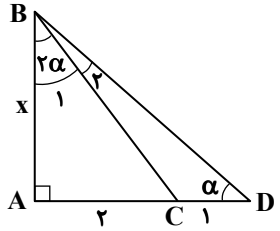
نکته: مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زوایای حادّهٔ آن α باشد را در نظر بگیرید. نسبت مثلثاتی کتانژانت زاویهٔ α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{کتانژانت} : \cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AB}{AC}$$



در مثلث روبه‌رو طول ضلع AB را x می‌نامیم؛ بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه ABC، داریم:

$$\tan \hat{B}_۱ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan ۲\alpha = \frac{۲}{x}$$



همچنین در مثلث قائم‌الزاویه ABD، داریم:

$$\tan \hat{D} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{x}{۳}$$

با توجه به فرمول $\tan ۲\alpha$، داریم:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{۲\times\frac{x}{۳}}{۱-(\frac{x}{۳})^۲} \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{\frac{۲x}{۳}}{\frac{۹-x^۲}{۹}} \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{۶x}{۹-x^۲} \Rightarrow ۱۸-۲x^۲ = ۶x^۲ \Rightarrow ۸x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x^۲ = \frac{۹}{۴}$$

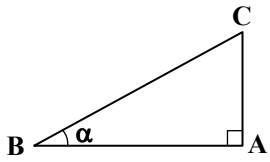
$$\Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\cot\alpha = \cot\hat{D} = \frac{AD}{AB} = \frac{۳}{x} = \frac{۳}{\frac{۳}{۲}} = ۲$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۳، فصل ۲)

نکته: مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زوایای حادّهٔ آن α باشد را در نظر بگیرید. نسبت مثلثاتی کتانژانت زاویهٔ α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\text{کتانژانت}: \cot\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

راه‌حل اول:

از آنجا که مقدار $\cot x$ مشخص است، برای پیدا کردن کسر مورد نظر کافی است صورت و مخرج کسر را بر $\sin x$ تقسیم کنیم:

$$\frac{۳\cos x-\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}{\sin x}} = \frac{۳\cot x-۱}{\cot x+۱} = \frac{۳\times۴-۱}{۴+۱} = \frac{۱۱}{۵} = ۲/۲$$

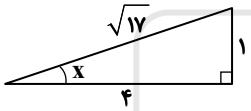
راه‌حل دوم:

با توجه به اینکه $\cot x = ۴$، یعنی $\cos x = ۴\sin x$، پس:

$$\frac{۳\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} = \frac{۳\times۴\sin x-\sin x}{۴\sin x+\sin x} = \frac{۱۱\sin x}{۵\sin x} = ۲/۲$$

راه‌حل سوم:

زاویهٔ $\hat{x}$ را در یک مثلث فرض می‌کنیم: (با توجه به اینکه $\cot\hat{x} = ۴$، ضلع روبه‌رو را ۱ و ضلع مجاور را ۴ در نظر می‌گیریم، پس وتر نیز $\sqrt{۱۷}$ می‌شود.)



$$\sin x = \frac{۱}{\sqrt{۱۷}} \ , \ \cos x = \frac{۴}{\sqrt{۱۷}} \Rightarrow \frac{۳\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} = \frac{۳\times\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}-\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}}{\frac{۴}{\sqrt{۱۷}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}} = \frac{۱۲-۱}{۴+۱} = \frac{۱۱}{۵} = ۲/۲$$

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۴)

نکته:

$$\tan^۲\alpha+۱ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \quad (\cos\alpha\neq۰)$$

نکته (نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا):

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

راه‌حل اول:

ابتدا مقدار $\cos(B-C)$ را پیدا می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲(B-C) = \frac{۱}{\cos^۲(B-C)} \Rightarrow ۱+(\sqrt{۳})^۲ = \frac{۱}{\cos^۲(B-C)} \Rightarrow \cos^۲(B-C) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos(B-C) = \pm\frac{۱}{۲}$$

B و C زوایای مثلث هستند، پس $B-C$ زاویه‌ای در ربع اول یا چهارم است و $\cos(B-C)$ مثبت است، پس $\cos(B-C) = \frac{۱}{۲}$

اکنون عبارت مورد نظر را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۲\cos(B+C)+۱}{۴\sin B\cos C} = \frac{۲(\cos(B+C)+\frac{۱}{۲})}{۴\sin B\cos C} = \frac{\cos(B+C)+\cos(B-C)}{۲\sin B\cos C}$$
$$= \frac{\cos B\cos C-\sin B\sin C+\cos B\cos C+\sin B\sin C}{۲\sin B\cos C} = \frac{۲\cos B\cos C}{۲\sin B\cos C} = \frac{\cos B}{\sin B} = \cot B$$

راه‌حل دوم:

استفاده از حالت خاص: با توجه به اینکه $\cot ۶۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$، B و C را زوایایی فرض کنیم که $\hat{B} - \hat{C} = ۶۰^\circ$ باشد، مـثلاً $\hat{C} = ۳۰^\circ$ و $\hat{B} = ۹۰^\circ$؛ بنابراین برای محاسبه عبارت مورد نظر، داریم:

$$\frac{۲\cos(۹۰^\circ + ۳۰^\circ) + ۱}{۴\sin ۹۰^\circ \cos ۳۰^\circ} = \frac{۲\times(-\frac{۱}{۲}) + ۱}{۴\times ۱\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۰ = \cot ۹۰^\circ = \cot B$$

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x = \cos \alpha$ به‌صورت $x = ۲k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

ابتدا معادله را در حالت کلی حل می‌کنیم:

$$\cos(x - \frac{\pi}{۳}) = -\cos(\frac{\pi}{۶} - x) \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \cos(\pi - (\frac{\pi}{۶} - x)) \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \cos(\frac{۵\pi}{۶} + x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} + x & \text{غ ق ق} \\ x - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi - (\frac{۵\pi}{۶} + x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{۵\pi}{۶} + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$$

بنابراین جواب کلی معادلهٔ $x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$ بوده که جواب‌های $\left\{\frac{۳\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}\right\}$ در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$ قرار دارند و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{۳\pi}{۴} + \frac{۷\pi}{۴} = \frac{۱۰\pi}{۴} = \frac{۵\pi}{۲}$$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۵)

نکته: برای رفع ابهام حالت $\frac{۰}{۰}$ رادیکالی، ابتدا مزدوج رادیکال را در آن ضرب می‌کنیم، سپس با تبدیل به چندجمله‌ای، آن را تجزیه می‌کنیم.

وقتی $x \to ۰$ حد مخرج کسر $\frac{a + \sqrt{bx + c}}{x}$ برابر صفر است. پس برای آنکه حاصل حد $\lim_{x \to ۰} \frac{a + \sqrt{bx + c}}{x}$ متناهی باشد، باید حـد صـورت کسر نیز برابر صفر باشد:

$$\lim_{x \to ۰} a + \sqrt{bx + c} = ۰ \Rightarrow a + \sqrt{c} = ۰ \Rightarrow \underbrace{a = -\sqrt{c}}_{\text{پس a عددی منفی است.}} \Rightarrow c = a^۲$$

اکنون به محاسبه حد می‌پردازیم: ($c = a^۲$ را جای‌گذاری می‌کنیم.)

$$\lim_{x \to ۰} \frac{a + \sqrt{bx + c}}{x} = \lim_{x \to ۰} \frac{a + \sqrt{bx + a^۲}}{x} \times \frac{a - \sqrt{bx + a^۲}}{a - \sqrt{bx + a^۲}} = \lim_{x \to ۰} \frac{a^۲ - (bx + a^۲)}{x(a - \sqrt{bx + a^۲})} = \lim_{x \to ۰} \frac{-b}{a - \sqrt{bx + a^۲}} = \frac{-b}{a - \sqrt{a^۲}}$$

$$= \frac{-b}{a - |a|} = \frac{-b}{۲a}$$

حاصل حد برابر $\frac{۱}{۴}$ است، پس:

$$\frac{-b}{۲a} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow -۴b = ۲a \Rightarrow a = -۲b \Rightarrow b = \frac{-a}{۲}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{a \times (-\frac{a}{۲})}{a^۲} = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۳)

برای آنکه تابع f یک مجانب قائم داشته باشد، سه حالت زیر قابل تصور است:

حالت اول: معادلهٔ مخرج درجه اول بوده و فقط یک ریشه داشته باشد: (ریشه مضاعف)

$$a = ۰ \Rightarrow -۲x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$ تنها مجانب قائم:

حالت دوم: معادلهٔ مخرج درجه دوم بوده ولی فقط یک ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (a - ۲)^۲ - ۴ \times ۴ \times a = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ - ۱۶a = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۲۰a + ۴ = ۰$$

معادلهٔ فوق دو جواب دارد که به‌ازای هرکدام از آن‌ها تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

حالت سوم: معادلهٔ مخرج، درجه دوم بوده و دو ریشه داشته باشد، ولی یکی از ریشه‌های آن، ریشهٔ صورت کسر نیز باشد. در این حالت فقط ریشهٔ غیرمشترک مخرج و صورت، مجانب قائم است. صورت کسر دو ریشه دارد و به‌ازای هرکدام از آن‌ها یک مقدار قابل‌قبول برای a به‌دست می‌آید:

$$۲x^۲+x-۶=۰ \Rightarrow (۲x-۳)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=-۲,\frac{۳}{۲}$$

$$\begin{cases} x=-۲ \Rightarrow ۴a-۲(a-۲)+۴=۰ \Rightarrow ۲a=-۸ \Rightarrow a=-۴ \\ x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۹}{۴}a+\frac{۳}{۲}(a-۲)+۴=۰ \Rightarrow \frac{۱۵}{۴}a=-۱ \Rightarrow a=-\frac{۴}{۱۵} \end{cases}$$

بنابراین برای a، ۵ مقدار مختلف وجود دارد که به‌ازای هرکدام از آن‌ها تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

نکته (پیوستگی در نقطه):

تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است، هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

این تابع دو ضابطه‌ای باید در نقاط تغییر ضابطه پیوسته باشد. این نقاط از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|x-۲|=c \Rightarrow x-۲=\pm c \Rightarrow x=۲\pm c$$

پس تابع f باید در این دو نقطه پیوسته باشد:

$$f(x)=\begin{cases} |x-۲| & ۲-c\le x\le ۲+c \\ a(x-۲)^۲+b(x-۲) & x>۲+c \text{ یا } x<۲-c \end{cases}$$

ابتدا پیوستگی در نقطهٔ $x=۲+c$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(۲+c)^+} f(x)=\lim_{x\to(۲+c)^-} f(x) \Rightarrow |۲+c-۲|=a(c)^۲+b(c)$$

$$\Rightarrow |c|=ac^۲+bc \xrightarrow{c\ge ۰} c=c(ac+b) \Rightarrow \begin{cases} c=۰ \\ ac+b=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=۰ \\ ac=-b+۱ \end{cases} \quad (۱)$$

اکنون پیوستگی در نقطه $x=۲-c$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(۲-c)^+} = \lim_{x\to(۲-c)^-} f(x) \Rightarrow |۲-c-۲|=a(-c)^۲+b(-c)$$

$$\Rightarrow |-c|=ac^۲-bc \xrightarrow{c\ge ۰} c=c(ac-b) \Rightarrow \begin{cases} c=۰ \\ ac-b=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=۰ \\ ac=b+۱ \end{cases} \quad (۲)$$

با توجه به معادلات (۱) و (۲)، پس:

$$\left.\begin{matrix} ac=-b+۱ \\ ac=b+۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow -b+۱=b+۱ \Rightarrow b=۰ \Rightarrow ac=۱$$

اگر $c=۰$، آن‌گاه $[ac]=۰$ و اگر $ac=۱$، آن‌گاه $[ac]=۱$ پس برای $[ac]$ دو مقدار صفر و یک وجود دارد.

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ مشتق‌پذیر هستند و داریم:

$$f'(x)=\cos x \quad \text{و} \quad g'(x)=-\sin x$$

مقدار خواسته شده یعنی $۳g'(\frac{۵\pi}{۳})-f'(\frac{۵\pi}{۳})$ برابر مشتق تابع $۳g-f$ در $x=\frac{۵\pi}{۳}$ است، پس ابتدا تابع $۳g-f$ را ساده می‌کنیم:

$$(۳g-f)(x)=۳\times\frac{۳}{۳+\sin x}-\frac{۲۷-\sin^۳x}{۹-\sin^۲x}=\frac{۹}{۳+\sin x}-\frac{(۳-\sin x)(۹+۳\sin x+\sin^۲x)}{(۳-\sin x)(۳+\sin x)}=\frac{۹-۹-۳\sin x-\sin^۲x}{۳+\sin x}$$

$$=\frac{-\sin x(۳+\sin x)}{۳+\sin x}=-\sin x$$

مشتق تابع $y=-\sin x$ برابر $y'=-\cos x$ است. مقدار مشتق به‌ازای $x=\frac{۵\pi}{۳}$ برابر است با:

$$(۳g-f)'(\frac{۵\pi}{۳})=-\cos(\frac{۵\pi}{۳})=-\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos(-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۴)

نکته: f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).

ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} b & x<a \\ b+(x-a)^m & x\geq a \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ m(x-a)^{m-1} & x>a \end{cases}$$

تابع f فقط می‌تواند در $x=a$ نقطه گوشه‌ای داشته باشد، پس باید مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ نابرابر باشد:

$$f'_-(a)=0 \Rightarrow f'_+(a)\neq 0$$

اگر $m>1$، مشتق راست تابع f در $x=a$ برابر صفر است و تابع نقطه گوشه‌ای ندارد.

اگر $m=1$، آن‌گاه، $f'_+(a)=m$ و تابع f در $x=a$ نقطه گوشه‌ای دارد.

اگر $m=0$، آن‌گاه $f'_+(a)=0$، پس تابع f نقطه گوشه‌ای ندارد.

بنابراین فقط به‌ازای $m=1$ تابع نقطه گوشه‌ای دارد.

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۵)

نکته (تعریف): اگر f یک تابع و $I\subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که

الف) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x)\leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به‌ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x)\geq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

نکته (تعریف): فرض کنیم $c\in D_f$. نقطهٔ به طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

راه‌حل اول:

ابتدا دامنه تابع f را محاسبه می‌کنیم:

$$x|x|-x\geq 0 \Rightarrow x(|x|-1)\geq 0$$

x		-1		0		$+1$	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\lvert x\rvert-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x(\lvert x\rvert-1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$D_f=[-1,0]\cup[1,+\infty)$$

تابع در نقاط مرزی دامنه یعنی $x=-1,0,1$ مشتق‌ناپذیر است، پس $x=-1,0,1$ طول نقاط بحرانی تابع f است.

از آنجا که تابع در همسایگی این سه نقطه تعریف نشده است، پس این سه نقطه اکسترمم نسبی محسوب نمی‌شود.

برای یافتن سایر نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی، مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x|x|-x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x^2-x} & -1\leq x\leq 0 \\ \sqrt{x^2-x} & x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x}} & -1\leq x\leq 0 \\ \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & x\geq 1 \end{cases}$$

باید ریشه‌های f' را مشخص کنیم:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} & -\leq x\leq 0 \\ x=\dfrac{1}{2} \text{ غ‌ق‌ق} & x\geq 1 \end{cases}$$

$x=-\dfrac{1}{2}$ تنها ریشه مشتق است.

جدول تعیین علامت مشتق به‌صورت روبه‌رو است:

x		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1	
f'		$+$	0	$-$				$+$	
f		↗		↘				↗	

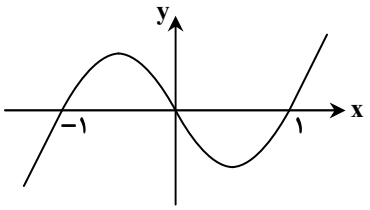
$\max$ نسبی

با توجه به جدول فوق، $x=-\dfrac{1}{2}$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است یعنی $m=1$ و تابع، مینیمم نسبی ندارد، پس $n=0$ همچنین تابع ۴ نقطه بحرانی دارد، یعنی $k=4$ پس مقدار خواسته شده برابر است با:

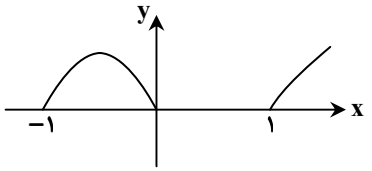
$$\frac{km+n}{k-n}=\frac{4\times 1+0}{4-0}=\frac{4}{4}=1$$

راه‌حل دوم:

سعی می‌کنیم شمای کلی نمودار را رسم کنیم. ابتدا نمودار تابع $y = x(|x| - 1)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل فوق، پس از اعمال رادیکال $f(x) = \sqrt{x(|x| - 1)}$ نمودار به‌صورت حدودی به‌دست می‌آید، پس مطابق شکل، ۴ نقطهٔ بحرانی $(k = 4)$، صفر مینیمم نسبی $(n = 0)$ یک ماکزیمم نسبی $(m = 1)$ داریم، پس مقدار خواسته شده برابر است با:



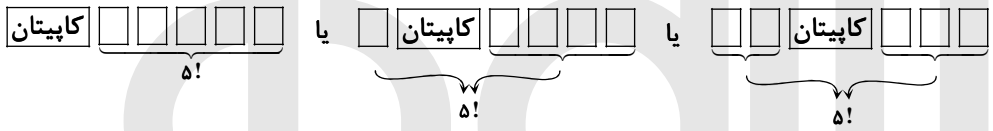
$$\frac{km + n}{k - n} = \frac{4 \times 1 + 0}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$$

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۲، فصل ۶)

نکته: اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آن‌ها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیا می‌گوییم.

تعداد جایگشت‌های n شیء برابر $n!$ است.

حالاتی که در آن‌ها بازیکنان بیشتری بعد از کاپیتان وارد زمین می‌شوند به‌صورت زیر است:



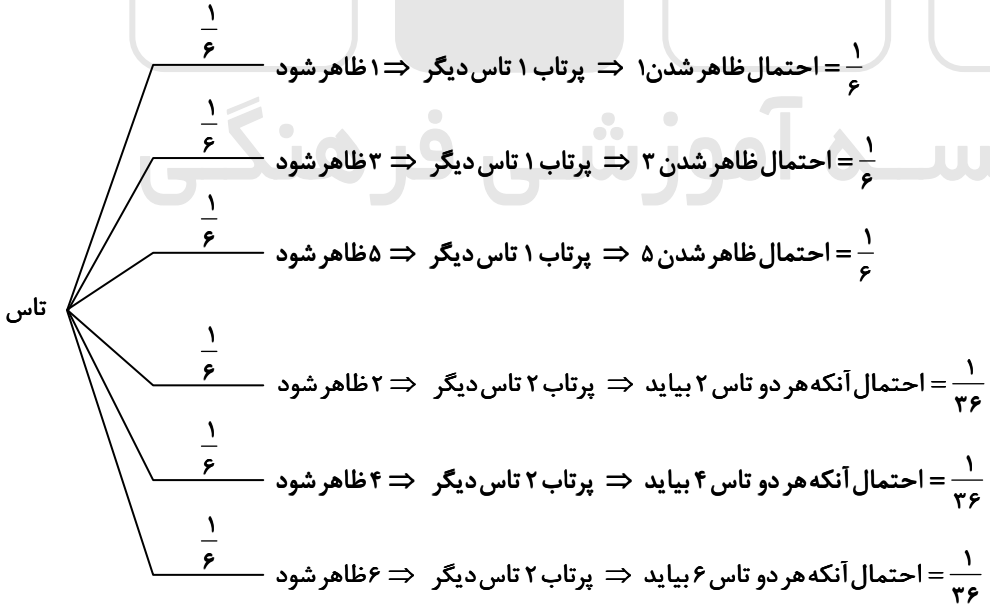
$$\text{تعداد کل حالات} = ۳ \times ۵! = ۳ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۳۶۰$$

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۲)

نکته: فرض کنید $B_1, B_2, \cdots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A|B_k)$$

نمودار درختی زیر را در نظر بگیرید:



طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{36}$$

$$P = 3 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{6 \times 36} = \frac{1}{12} + \frac{1}{72} = \frac{6 + 1}{72} = \frac{7}{72}$$

۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۳)

نکته (میانگین یا متوسط داده‌ها): میانگین یا متوسط n دادهٔ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

نکته (انحراف معیار داده‌ها): اگر n داده از جامعه به‌صورت $x_1, x_2, \cdots, x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

که در آن $x_i - \bar{x}$، را انحراف داده i ام از میانگین داده‌ها می‌گویند.

نکته (واریانس داده‌ها): توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

دستهٔ اول با ۴ داده را به‌صورت داده‌های b,c,d,e و دستهٔ دوم با ۵ داده را به‌صورت داده‌های a,b,c,d,e در نظر می‌گیریم. میانگین هر دو دسته را $\bar{x}$ در نظر گرفته و داریم:

$$b,c,d,e \Rightarrow \bar{x} = \frac{b+c+d+e}{4} \Rightarrow b+c+d+e = 4\bar{x} \quad (1)$$

$$a,b,c,d,e \Rightarrow \bar{x} = \frac{a+b+c+d+e}{5} \Rightarrow a+b+c+d+e = 5\bar{x} \xrightarrow{(1)} a + 4\bar{x} = 5\bar{x} \Rightarrow a = \bar{x}$$

واریانس دستهٔ اول را σ_1^2 و واریانس دستهٔ دوم را σ_2^2 در نظر گرفته و داریم:

$$\sigma_1^2 = \frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2}{4}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(a-a)^2 + (b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2}{5} = \frac{(b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2}{5}$$

فرض می‌کنیم $A = (b-a)^2 + (c-a)^2 + (d-a)^2 + (e-a)^2$ و طبق فرض سؤال داریم:

$$\sigma_1^2 = 1 + \sigma_2^2 \Rightarrow \frac{A}{4} = 1 + \frac{A}{5} \Rightarrow \frac{A}{4} - \frac{A}{5} = 1 \Rightarrow \frac{A}{20} = 1 \Rightarrow A = 20$$

بنابراین انحراف معیار دستهٔ اول برابر است با:

$$\sigma_1^2 = \frac{A}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{5}$$

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۲)

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

نکته: در صورتی که B پیشامدی باشد که $P(B) > 0$، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ دادن B» (که آن را «P ی A به شرط B» نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

راه‌حل اول:

احتمال آنکه بازیکن A پنالتی اول را گل کند، با $P(A_1)$ و احتمال آنکه پنالتی دوم را گل کند، با $P(A_2)$ نشان می‌دهیم. طبق مفروضات سؤال داریم:

$$P(A_1) = \frac{80}{100} = 0/8 \ , \ P(A_2 \mid A_1) = \frac{60}{100} = 0/6 \ , \ P(A_2 \mid A_1') = \frac{50}{100} = 0/5$$

با استفاده از نکات، داریم:

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = 0/6 \Rightarrow \frac{P(A_2 \cap A_1)}{0/8} = 0/6 \Rightarrow P(A_2 \cap A_1) = 0/48$$

$$P(A_2 \mid A_1') = \frac{P(A_2 \cap A_1')}{P(A_1')} = 0/5 \Rightarrow \frac{P(A_2 - A_1)}{1 - P(A_1)} = 0/5 \Rightarrow \frac{P(A_2) - P(A_2 \cap A_1)}{1 - 0/8} = 0/5$$

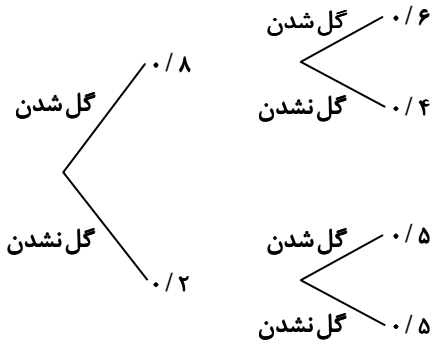
$$\Rightarrow P(A_2) - P(A_2 \cap A_1) = 0/1 \Rightarrow P(A_2) - 0/48 = 0/1 \Rightarrow P(A_2) = 0/58$$

احتمال آنکه حداقل یک پنالتی گل شود، همان $P(A_1 \cup A_2)$ است، پس:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0/8 + 0/58 - 0/48 = 0/9$$

راه‌حل دوم:

این سؤال را می‌توان به‌روشِ نمودار درختی نیز حل کرد:

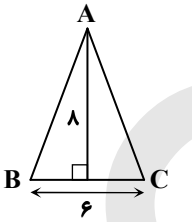


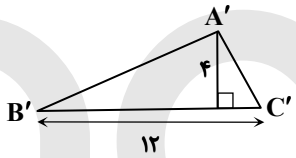
احتمال آنکه حداقل یک پنالتی گل شود به صورت زیر است:

$$۰/۸\times۰/۶+۰/۸\times۰/۴+۰/۲\times۰/۵=۰/۴۸+۰/۳۲+۰/۱=۰/۹$$

۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۱)

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:





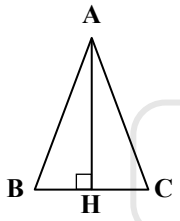
گزینهٔ ۱: مثال نقض دارد. یعنی ممکن است دو مثلث مساحت برابر داشته باشند ولی همنهشت نباشند، مانند مثلث‌های روبه‌رو:

$$S_{ABC}=\frac{۸\times۶}{۲}=۲۴$$

$$S_{A'B'C'}=\frac{۴\times۱۲}{۲}=۲۴$$

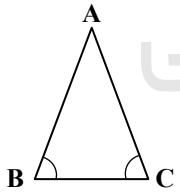
مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ همنهشت نیستند.

گزینهٔ ۲: مثال نقض دارد. در مثلث زیر، ارتفاع وارد بر ضلع BC از خود ضلع BC بزرگ‌تر است.



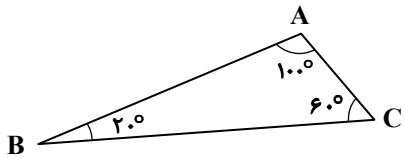
$$AH > BC$$

گزینهٔ ۳: مثال نقض ندارد و حکم کلی است.



$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

گزینهٔ ۴: مثال نقض دارد. در مثلث ABC زیر زاویهٔ $\hat{A}$ از ۴ برابر زاویهٔ B بزرگ‌تر است.

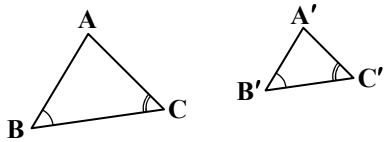


$$\hat{A} > ۴\hat{B} \Rightarrow ۱۰۰^\circ > ۴\times۲۰^\circ$$

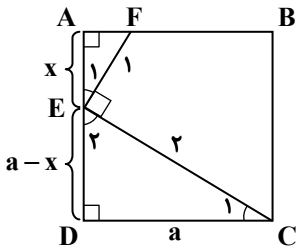
۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (درس ۳، فصل ۲)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{B}=\hat{B}', \hat{C}=\hat{C}' \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'})$$



با توجه به شکل مقابل، مثلث‌های AEF و ECD متشابه هستند؛ زیرا:



$$\left.\begin{matrix}\hat{E}_1+\hat{E}_2=90^\circ\\ \hat{E}_2+\hat{C}_1=90^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{E}_1+\hat{E}_2=\hat{E}_2+\hat{C}_1\Rightarrow \hat{E}_1=\hat{C}_1$$

$$\left.\begin{matrix}\hat{E}_1=\hat{C}_1\\ \hat{A}=\hat{D}=90^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overset{\triangle}{AEF}\sim\overset{\triangle}{ECD}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{EC}=\frac{AF}{ED}=\frac{AE}{CD}$$

فرض می‌کنیم، ضلع مربع برابر a و $AE=x$ باشد، پس $ED=a-x$ و داریم:

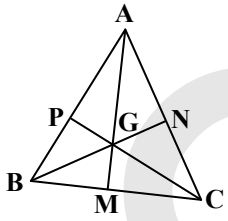
$$\frac{EF}{EC}=\frac{AE}{CD}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{x}{a}\Rightarrow a=2x\Rightarrow x=\frac{1}{2}a \qquad ED=a-x=a-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a$$

در مثلث EDC طبق رابطهٔ فیثاغورس، داریم:

$$ED^2+DC^2=EC^2\Rightarrow (\frac{1}{2}a)^2+a^2=2^2\Rightarrow \frac{5}{4}a^2=4\Rightarrow a^2=\frac{16}{5}\Rightarrow S_{ABCD}=a^2=\frac{16}{5}=3/2$$

۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: سه میانهٔ هر مثلث در یک نقطه درون آن مثلث همرس‌اند، به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر این ضلع است و فاصله‌اش تا هر رأس، $\frac{2}{3}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.

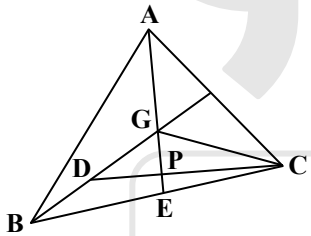


$$AG=2GM=\frac{2}{3}AM \qquad GM=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{3}AM$$

مشابه روابط فوق برای میانه‌های دیگر نیز برقرار است.

طبق نکتهٔ فوق، نقطهٔ G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است و داریم:

$$AG=2GE \quad (1)$$



در مثلث GBC، GE میانهٔ وارد بر ضلع BC و چون $BD=DG$، CD نیز میانهٔ وارد بر ضلع BG است، پس در مثلث GBC نقطهٔ P، محل همرسی میانه‌های مثلث است و داریم:

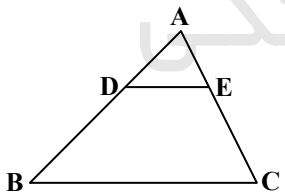
$$GP=\frac{2}{3}GE \quad (2)$$

حال با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{AG}{GP}=\frac{2GE}{\frac{2}{3}GE}=3$$

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۲)

نکته (تعمیم قضیهٔ تالس): اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:



$$DE\parallel BC\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

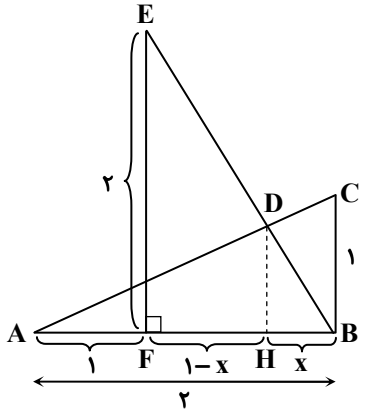
با توجه به اینکه مثلث‌های ABC و BEF همنهشت هستند، داریم:

$$FB=BC=1,\ EF=AB=2$$

فرض می‌کنیم $BH=x$، پس:

$$FH=FB-BH=1-x$$

طبق تالس در مثلث‌های ABC و BEF داریم:



$$\overset{\triangle}{ABC}: DH\parallel BC\Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{DH}{BC}\Rightarrow \frac{2-x}{2}=\frac{DH}{1}\Rightarrow DH=\frac{2-x}{2} \quad (1)$$

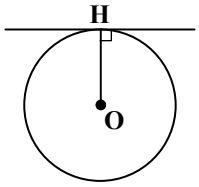
$$\overset{\triangle}{BEF}: DH\parallel EF\Rightarrow \frac{BH}{BF}=\frac{DH}{EF}\Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{DH}{2}\Rightarrow DH=2x \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow 2x=\frac{2-x}{2}\Rightarrow 4x=2-x\Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

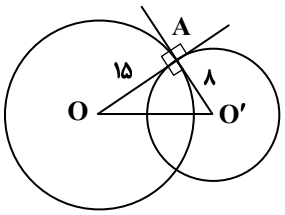
بنابراین اندازهٔ DH برابر است با: $(2): DH=2x=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}=0/8$

۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند. اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.



طبق شکل مقابل، در نقطهٔ A مماس‌های مرسوم بر دو دایره برهم عمودند و طبق نکتهٔ فوق، این خط‌های مماس از مرکز دایره‌ها گذشته و مثلث OAO' قائم‌الزاویه است و داریم:

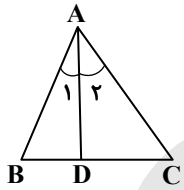


$$OO'^{۲} = OA^{۲} + O'A^{۲} \Rightarrow OO'^{۲} = ۱۵^{۲} + ۸^{۲} = ۲۲۵ + ۶۴ = ۲۸۹$$

$$\Rightarrow OO' = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷$$

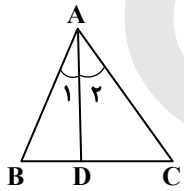
۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۳)

نکته: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.



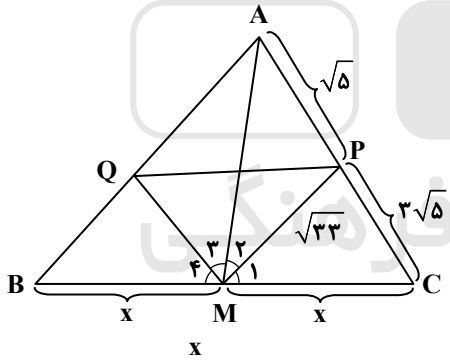
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

نکته: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



$$AD^{۲} = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

فرض می‌کنیم $BM = CM = x$، با استفاده از نکات فوق، ابتدا در مثلث AMC داریم:



$$\text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۵}} = \frac{AM}{x} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{AM}{x}$$

$$\Rightarrow x = ۳AM \Rightarrow AM = \frac{۱}{۳}x$$

$$MP^{۲} = AM \cdot MC - AP \cdot PC$$

$$\Rightarrow (\sqrt{۳۳})^{۲} = \frac{۱}{۳}x \times x - \sqrt{۵} \times ۳\sqrt{۵} \Rightarrow ۳۳ = \frac{۱}{۳}x^{۲} - ۱۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}x^{۲} = ۴۸ \Rightarrow x^{۲} = ۱۴۴ \Rightarrow x = ۱۲ \Rightarrow AM = \frac{۱}{۳} \times ۱۲ = ۴$$

$$BC = ۲x = ۲ \times ۱۲ = ۲۴$$

PQ و BC موازی هستند؛ زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AMC}: \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \\ \overset{\triangle}{AMB}: \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AM}{MB} \end{array}\right\} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۵}}{۴\sqrt{۵}} = \frac{PQ}{۲۴} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{PQ}{۲۴} \Rightarrow PQ = ۶$$

MP و MQ برهم عمودند؛ زیرا:

$$\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ + \hat{M}_۳ + \hat{M}_۴ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow[\hat{M}_۳ = \hat{M}_۴]{\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲} ۲(\hat{M}_۲ + \hat{M}_۳) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow P\hat{M}Q = ۹۰^\circ$$

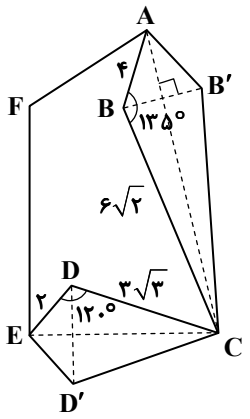
$$\overset{\triangle}{PMQ}: MQ^{۲} + MP^{۲} = PQ^{۲} \Rightarrow MQ^{۲} + ۳۳ = ۳۶ \Rightarrow MQ^{۲} = ۳ \Rightarrow MQ = \sqrt{۳}$$

۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (درس ۲، فصل ۲)

نکته: یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی معروف است. در این‌گونه مسائل، هدف این است که بدون این‌که محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چندضلعی را تغییر دهیم.

بازتاب B را نسبت به AC یافته و B' می‌نامیم. همچنین بازتاب D را نسبت به EC یافته و D' می‌نامیم.

میزان افزایش مساحت برابر است با:



$$S = ۲S_{ABC} + ۲S_{EDC}$$

$$\Rightarrow S = ۲\times\frac{۱}{۲}AB\cdot BC\cdot\sin ۱۳۵^\circ + ۲\times\frac{۱}{۲}DE\cdot DC\cdot\sin ۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow S = AB\cdot BC\cdot\sin ۴۵^\circ + DE\cdot DC\cdot\sin ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow S = ۴\times۶\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۲\times۳\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۴ + ۹ = ۳۳$$

۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، در این صورت وارون ماتریس A یعنی $A^{-۱}$ از تساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

طبق نکته، ابتدا وارون ماتریس B را می‌یابیم.

$$B = \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{(-۲)(-۱)-(-۳)(-۱)}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{۲-۳}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حال طرفین رابطهٔ $۳I - ۲A^{-۱}B = \begin{bmatrix} ۷ & ۵ \\ -۱۲ & -۱۱ \end{bmatrix}$ را از سمت راست در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم.

$$(۳I - ۲A^{-۱}B)\cdot B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۷ & ۵ \\ -۱۲ & -۱۱ \end{bmatrix}\cdot B^{-۱}$$

$$\Rightarrow ۳IB^{-۱} - ۲A^{-۱}\underbrace{B\cdot B^{-۱}}_{I} = \begin{bmatrix} ۷ & ۵ \\ -۱۲ & -۱۱ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳B^{-۱} - ۲A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۷-۵ & -۲۱+۱۰ \\ -۱۲+۱۱ & ۳۶-۲۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱۱ \\ -۱ & ۱۴ \end{bmatrix}$$

کوچک‌ترین درایهٔ ماتریس فوق، برابر ۱۱- است.

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۱)

حاصل‌ضرب درایه‌های ماتریس A برابر ۱- است.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب درایه‌ها} = -۱$$

حال $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^۲ = A\cdot A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$A^۲$ حاصل‌ضرب درایه‌های $= -۱$

بنابراین خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{-۱}{-۱} = ۱$$

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)

نکته: معادلهٔ سهمی افقی یا قائم با رأس $S(h,k)$ به‌صورت زیر است.

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی
روبه راست	خط $y=k$	$x=-a+h$	$(a+h,k)$	$(y-k)^2=4a(x-h)$
روبه چپ	خط $y=k$	$x=a+h$	$(-a+h,k)$	$(y-k)^2=-4a(x-h)$
روبه بالا	خط $x=h$	$y=-a+k$	$(h,a+k)$	$(x-h)^2=4a(y-k)$
روبه پایین	خط $x=h$	$y=a+k$	$(h,-a+k)$	$(x-h)^2=-4a(y-k)$

معادلهٔ سهمی $y^2-2y+4x=a$ را به‌صورت متعارف می‌نویسیم.

$$y^2-2y=-4x+a \xrightarrow{+1} y^2-2y+1=-4x+a+1 \Rightarrow (y-1)^2=-4(x-\frac{a+1}{4}) \Rightarrow \text{رأس سهمی } S(\frac{a+1}{4},1)$$

سهمی افقی و روبه چپ است، اگر فاصلهٔ کانونی سهمی را با a' نشان دهیم، داریم:

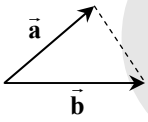
$$4a'=4 \Rightarrow a'=1$$

معادلهٔ خط هادی سهمی به‌صورت زیر است:

$$x=\frac{a+1}{4}+1=3 \Rightarrow \frac{a+1}{4}=2 \Rightarrow a+1=8 \Rightarrow a=7$$

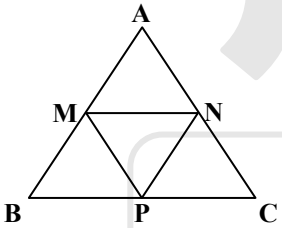
۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: مساحت مثلث ساخته‌شده بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.



$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

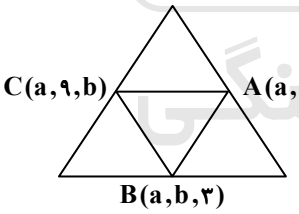
نکته: اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می‌آید.



$$\triangle AMN \cong \triangle BMP \cong \triangle PCN \cong \triangle MNP$$

$$S_{\triangle AMN}=S_{\triangle BMP}=S_{\triangle PCN}=S_{\triangle MNP}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

وسط اضلاع مثلث را نقاط A، B و C نامیده و طبق نکات فوق، داریم:



$$S_{ABC}=\frac{1}{4}\times 16=4$$

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(a,4,1)-(a,b,3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}=(0,4-b,-2)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(a,9,b)-(a,b,3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}=(0,9-b,b-3)$$

حاصل‌ضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4-b & -2\\ 0 & 9-b & b-3\end{vmatrix}=\vec{i}((4-b)(b-3)-(-2)(9-b))$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(4b-12-b^2+3b+18-2b)\vec{i}=(5b-b^2+6)\vec{i}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}|5b-b^2+6|=4 \Rightarrow |b^2-5b-6|=8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2-5b-6=8 \Rightarrow b^2-5b-14=0 \xrightarrow{\Delta>0} S=5 \\ b^2-5b-6=-8 \Rightarrow b^2-5b+2=0 \xrightarrow{\Delta>0} S=5 \end{cases}$$

بنابراین، مجموع مقادیر ممکن برای b برابر است با:

$$5+5=10$$

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس‌های ۲ و ۳، فصل ۱)

نکته (قضیهٔ تقسیم): اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به‌قسمی که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

نکته: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

a مضرب ۶ است، پس $a = 6k$. از طرفی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۷ برابر ۱۱ است، بنابراین داریم:

$$a \overset{17}{\equiv} 11 \Rightarrow 6k \overset{17}{\equiv} 11 \Rightarrow 6k \overset{17}{\equiv} 11 - 17 \overset{17}{\equiv} -6 \Rightarrow 6k \overset{17}{\equiv} -6 \xrightarrow[\div 6]{(6,17)=1} k \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow k \overset{17}{\equiv} -1 + 17 \overset{17}{\equiv} 16 \Rightarrow k \overset{17}{\equiv} 16 \Rightarrow k = 17q + 16$$

حال در رابطهٔ $a = 6k$ داریم:

$$a = 6(17q + 16) \Rightarrow \frac{a}{3} = 2(17q + 16) = 2 \times 17q + 32 \Rightarrow \frac{a}{3} = 2 \times 17q + 17 + 15 = 17\underbrace{(2q + 1)}_{q'} + 15$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = 17q' + 15 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = 15$$

۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۲، فصل ۱)

میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه بر ۳ بخش‌پذیر است، پس: $\frac{\text{Min} + \text{Max}}{2} = 3k \Rightarrow \text{Min} + \text{max} = 6k$

بنابراین مجموع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه باید مضرب ۶ باشد.

حالات زیر را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که پس از مشخص کردن کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو زیرمجموعه، اعضای بین آن‌ها هر کدام دو حالت دارند. یا در زیرمجموعه حضور دارند یا حضور ندارند، پس داریم: $A = \{13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23\}$

min max
۱۳ , ۱۴ , ۱۶ , ۱۷
↓ ↓
۲ × ۲ = ۴

min max
۱۳ , ۱۴ , ۱۶ , ۱۷ , ۱۹ , ۲۰ , ۲۲ , ۲۳
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۶۴

min max
۱۴ , ۱۶ ⇒ ۱ حالت

min max
۱۴ , ۱۶ , ۱۷ , ۱۹ , ۲۰ , ۲۲
↓ ↓ ↓ ↓
۲ × ۲ × ۲ × ۲ = ۱۶

min max
۱۶ , ۱۷ , ۱۹ , ۲۰
↓ ↓
۲ × ۲ = ۴

min max
۱۷ , ۱۹ ⇒ ۱ حالت

min max
۱۹ , ۲۰ , ۲۲ , ۲۳
↓ ↓
۲ × ۲ = ۴

min max
۲۰ , ۲۲ ⇒ ۱ حالت

کل حالات $= 4 + 64 + 1 + 16 + 4 + 1 + 4 + 1 = 95$

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

نکته: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc, (c,m) = d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax + by = c$ دارای جواب باشد، آن است که: $(a,b) \mid c$

طبق نکتهٔ فوق، داریم:

$$51 = 3 \times 17 \ , \ 85 = 5 \times 17 \Rightarrow (51, 85) = 17$$

$$51x + 85y = 7a - 1 \Rightarrow (51, 85) \mid 7a - 1$$

بنابراین:

$$۱۷ \mid ۷a-۱ \Rightarrow ۷a-۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷a \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷a \overset{۱۷}{\equiv} ۱+۲\times ۱۷ \Rightarrow ۷a \overset{۱۷}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow[(۷,۱۷)=۱]{\div ۷} a \overset{۱۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow a = ۱۷q+۵$$

$$q = ۲ \Rightarrow a = ۱۷\times ۲+۵ = ۳۴+۵ = ۳۹$$

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۳)

$$\boxed{۱},\boxed{۲},۳,\boxed{۴},\boxed{۵},۶,\boxed{۷},\boxed{۸},۹,\boxed{۱۰},\boxed{۱۲},\boxed{۱۳},۱۴,\boxed{۱۵},\boxed{۱۶},۱۷,\boxed{۱۸},\boxed{۱۹},۲۰$$

بدترین حالت زمانی است که تمام اعداد مشخص‌شده انتخاب شوند که تعداد آن‌ها برابر ۱۳ است. با انتخاب یک عدد دیگر، قطعاً حداقل ۳ عدد متوالی خواهیم داشت، پس حداقل اعضا برابر $۱۴ = ۱ + ۱۳$ است.

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

نکته: اگر G یک گراف با n رأس و u یک رأسِ آن باشد و $d_G(u)$ و $d_{\bar{G}}(u)$ به‌ترتیب درجهٔ رأس u در گراف‌های G و $\bar{G}$ باشند، داریم:

$$d_G(u)+d_{\bar{G}}(u) = n-۱$$

نکته: اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\bar{G})$ برابر است با:

$$q(G)+q(\bar{G}) = \binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

نکته: اگر گراف G از مرتبهٔ p یک رأس با ماکزیمم درجهٔ $\Delta = p-۱$ داشته باشد، آن‌گاه گراف G قطعاً همبند است؛ زیرا یک رأس به تمام رئوس دیگر متصل است.

نکته: همبندی و ناهمبندی یک گراف: گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را ناهمبند می‌نامیم.

فرض می‌کنیم تعداد رئوس گراف G برابر P باشد. با توجه به اینکه رأسی با درجهٔ مینیمم در G، رأسی با درجهٔ ماکزیمم در $\bar{G}$ و بالعکس است، داریم:

$$\Delta(G)+\delta(\bar{G}) = P-۱ \Rightarrow \delta(\bar{G}) = P-۱-\Delta(G)$$
$$\delta(G)+\Delta(\bar{G}) = P-۱ \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = P-۱-\delta(G)$$

با جای‌گذاری روابط فوق، در فرض $\Delta(\bar{G})-\delta(\bar{G}) = ۲$ داریم:

$$P-۱-\delta(G)-P+۱+\Delta(G) = ۲ \Rightarrow \Delta(G)-\delta(G) = ۲$$

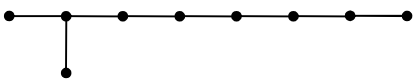
از فرض دیگر سؤال یعنی $\Delta(G)+\delta(G) = ۱۲$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\Delta(G)+\delta(G) = ۱۲\\ \Delta(G)-\delta(G) = ۲\end{cases} \Rightarrow ۲\Delta(G) = ۱۴ \Rightarrow \Delta(G) = ۷ \Rightarrow \delta(G) = ۵$$

چون $\Delta(G) = ۷$، پس گراف G حداقل باید ۸ رأس داشته باشد ولی در این حالت چون ماکزیمم درجه برابر $۷ = ۱-۸ = P-۱$ است، پس در گراف مکمل یعنی $\bar{G}$ رأس منفرد خواهیم داشت و $\bar{G}$ ناهمبند است. چون $\bar{G}$ همبند است. پس حداقل رئوس گراف G برابر ۹ است و داریم:

$$P = ۹$$
$$\delta(\bar{G}) = P-۱-\Delta(G) = ۹-۱-۷ = ۱$$
$$\Delta(\bar{G})-\delta(\bar{G}) = ۲ \Rightarrow \Delta(\bar{G})-۱ = ۲ \Rightarrow \Delta(\bar{G}) = ۳$$

گراف $\bar{G}$ با شرایط فوق و کمترین یال به‌صورت زیر است:



$$q_{min}(\bar{G}) = ۸$$

فیزیک

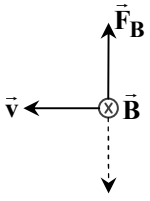
۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

طبق متن کتاب درسی گزینهٔ ۱ درست است.

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

طبق قاعدهٔ دست راست در سیم حامل جریان، چون جریان بالای سیم درون‌سو و در قسمت پایین آن برون‌سو است، جریان به‌سمت چپ (←) است.

قاعدهٔ دست راست را برای الکترون می‌نویسیم (فقط حواستون باشه بار الکترون منفی است و جهت نیرو در نهایت باید برعکس بشه)



۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

معادلهٔ واپاشی را می‌نویسیم:

$$^{15}_{8}O \longrightarrow {}^{0}_{+1}e + {}^{A}_{Z}X \Rightarrow \begin{cases} 15 = A \\ 8 = +1 + Z \Rightarrow Z = 7 \end{cases}$$

پس هستهٔ دختر $8(7-15)$ نوترون دارد.

۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

طبق متن کتاب درسی هنگام عبور جریان الکتریکی پایا (ثابت) از القاگر آرمانی، انرژی به آن وارد یا از آن خارج نمی‌شود.

۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

طبق قضیهٔ کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_f = K_2 - K_1 \Rightarrow \underbrace{mgh}_{W} + W_f = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 \Rightarrow 8 \times 22 - 16 = \frac{1}{2}(0/8)v_2^2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{160 \times 2}{0/8} = 400 \Rightarrow v_2 = 20\frac{m}{s}$$

۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۲)

ابتدا چگالی مخلوط را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{400 + 600} = \frac{400 + 720}{1000} = \frac{1120}{1000} = 1/12\frac{g}{cm^3}$$

حال فشار پیمانه‌ای ناشی از مایع را محاسبه می‌کنیم:

$$P_g = P - P_0 = \rho gh = 1/12 \times 10^3 \times 10 \times 0/5 = 5600Pa = 5/6kPa$$

۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا زمان کل حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 80 = \frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow t = 4s$$

پس $0/6s$ قبل از رسیدن یعنی زمان $t' = 3/4s$، مکان گلوله در این لحظه را حساب کرده و از ۸۰ متر کم می‌کنیم:

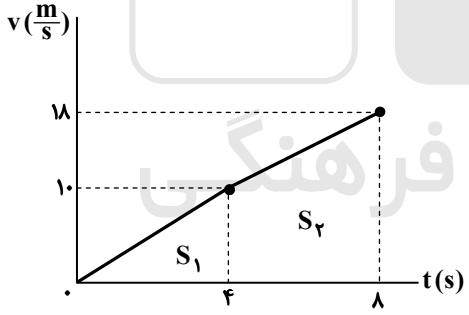
$$\Delta y = \frac{1}{2}g(t')^2 \Rightarrow 80 = \frac{1}{2}(10)(3/4)^2 = 57/8m$$

$$80 - 57/8 = 22/2m$$

۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

برای محاسبهٔ سرعت متوسط دو متحرک ابتدا نمودار سرعت- زمان را رسم کرده پس نسبت جابه‌جایی آن‌ها در $8s$ اول حرکت را مقایسه می‌کنیم:

متحرک A:



$$v = at + v_0$$

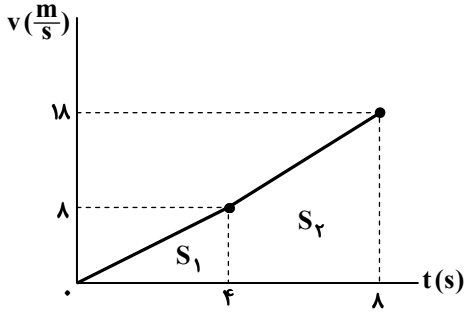
$$\Rightarrow v_{4s} = 2/5 \times 4 + 0 = 10\frac{m}{s}$$

$$v_{8s} = 2 \times 4 + 10 = 18\frac{m}{s}$$

$$\Delta x_A = S_1 + S_2 = (\frac{4 \times 10}{2}) + (\frac{10 + 18}{2} \times 4)$$

$$\Rightarrow \Delta x_A = 20 + 56 = 76m$$

متحرک B:



$$v = at + v_0$$

$$\Rightarrow v_{4s} = 2 \times 4 + 0 = 8\frac{m}{s}$$

$$v_{8s} = 2/5 \times 4 + 8 = 18\frac{m}{s}$$

$$\Delta x_B = S_1 + S_2 = (\frac{8 \times 4}{2}) + (\frac{8 + 18}{2} \times 4)$$

$$\Rightarrow \Delta x_B = 16 + 52 = 68m$$

حال خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{v_{av,B}}{v_{av,A}} = \frac{\Delta x_B}{\Delta x_A} = \frac{68}{76} = \frac{17}{19}$$

۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا مکان و سرعت اتومبیل A را در $t = ۳\,s$ محاسبه می‌کنیم:

$$v_A = at + v_۰ = ۲\times ۳ + ۰ = ۶\frac{m}{s}\ ,\ x_A = \frac{۱}{۲}(۲)(۹) + ۰ = ۹\,m$$

لحظهٔ $t = ۳\,s$ را به‌عنوان مبدأ زمان در نظر می‌گیریم و معادلهٔ مکان- زمان دو اتومبیل را می‌نویسیم:

$$x_A = \frac{۱}{۲}(۲)t^۲ + ۶t + ۹ = t^۲ + ۶t + ۹$$

$$x_B = v_B t = ۱۶t$$

چون $t = ۳\,s$ را مبدأ حرکت در نظر گرفتیم پس بازهٔ موردنظر سؤال $t = ۴\,s$ تا $t = ۶\,s$ است. حال در هر لحظه مکان دو اتومبیل را به‌دست می‌آوریم:

$$t = ۴s: \begin{cases} x_A = ۱۶ + ۲۴ + ۹ = ۴۹\,m \\ x_B = ۱۶\times ۴ = ۶۴\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۱۵\,m$$

$$t = ۵s: \begin{cases} x_A = ۲۵ + ۳۰ + ۹ = ۶۴\,m \\ x_B = ۱۶\times ۵ = ۸۰\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۱۶\,m$$

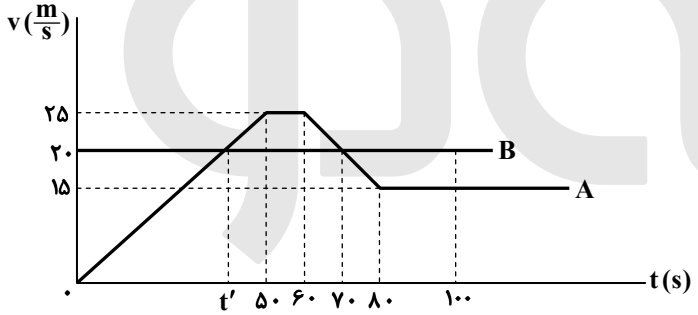
$$t = ۶s: \begin{cases} x_A = ۳۶ + ۳۶ + ۹ = ۸۱\,m \\ x_B = ۱۶\times ۶ = ۹۶ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۱۵\,m$$

پس فاصلهٔ دو اتومبیل ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش پیدا کرده است.

۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

باید نشان دهیم مکان هر متحرک در هر لحظه چگونه تغییر می‌کند تا با کمک مکان‌های آن‌ها دور یا نزدیک شدن دو متحرک را تشخیص دهیم:

هر دو متحرک در $t = ۰$ در $x = ۰$ قرار دارند.



با توجه به اینکه شتاب متحرک A در بازهٔ زمانی $(۰,۵۰s)$ ثابت است، پس $t' = ۴۰\,s$ است.

در $t' = ۴۰\,s$ مکان دو متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$x_B = vt + x_۰ = ۲۰\times ۴۰ + ۰ = ۸۰۰\,m$$

$$x_A = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})(۴۰)^۲ + ۰ = ۴۰۰\,m$$

در $t = ۵۰\,s$ داریم:

$$x_B = ۲۰\times ۵۰ = ۱۰۰۰\,m$$

$$x_A = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})(۵۰)^۲ = ۶۲۵\,m$$

در $t = ۶۰\,s$:

$$x_B = ۲۰\times ۶۰ = ۱۲۰۰\,m\ ,\ x_A = v_A t + x'_۰ = ۲۵\times ۱۰ + ۶۲۵ = ۸۷۵\,m$$

در $t = ۷۰\,s$:

$$x_B = ۲۰\times ۷۰ = ۱۴۰۰\,m\ ,\ x_A = \frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲})(۱۰)^۲ + ۲۵۰ + ۸۷۵ = ۱۱۰۰\,m$$

در $t = ۸۰\,s$:

$$x_B = ۲۰\times ۸۰ = ۱۶۰۰\,m\ ,\ x_A = \frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲})(۱۰)^۲ + ۲۰۰ + ۱۱۰۰ = ۱۲۷۵\,m$$

و در آخر در $t = ۹۰\,s$:

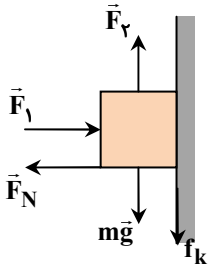
$$x_B = ۲۰\times ۹۰ = ۱۸۰۰\,m\ ,\ x_A = v_A t + x''_۰ = ۱۵\times ۱۰ + ۱۲۷۵ = ۱۴۲۵\,m$$

مشخص است در هر بازهٔ زمانی ۱۰ ثانیه‌ای متحرک B، ۲۰۰ متر جابه‌جا می‌شود ولی جابه‌جایی متحرک A بیشتر یا کمتر از این مقدار است، پس این دو متحرک هرگز به هم نمی‌رسند.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم:



چون نیروی $F_۲ > mg$ است، پس جسم رو به بالا حرکت می‌کند. پس داریم:

$$F_۱ = F_N \Rightarrow F_N = ۴۰N$$
$$f_k = \mu_k F_N = ۰/۴ \times ۴۰ = ۱۶N$$
$$R = \sqrt{F_N^۲ + f_k^۲} = \sqrt{۴۰^۲ + ۱۶^۲}$$
$$= \sqrt{۸^۲(۵^۲ + ۲^۲)} = ۸\sqrt{۲۹}N$$

۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۲)

حداقل نیرو برابر است با $f_{s,max}$، پس:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s mg = ۰/۵ \times ۵ \times ۱۰ = ۲۵N$$

برای اینکه جسم متوقف نشود و چون حداکثر نیرو مدنظر است پس باید مجموعه با سرعت ثابت حرکت کند، پس:

$$F - f_k = ma = ۰ \Rightarrow F = f_k \Rightarrow F = \mu_k(m+m')g \Rightarrow ۲۵ = ۰/۴(۵+m')۱۰ \Rightarrow m' = ۱/۲۵kg$$

۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

طبق رابطهٔ $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ داریم:

$$F_{av} = ma = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow ۰/۲a = \frac{۷-۱}{۱۰-۰} \Rightarrow a = ۳\frac{m}{s^۲}$$

چون نمودار یک خط راست با شیب ثابت است، پس شتاب لحظه‌ای با شتاب متوسط برابر است.

۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

ابتدا سرعت را به $\frac{m}{s}$ تبدیل می‌کنیم:

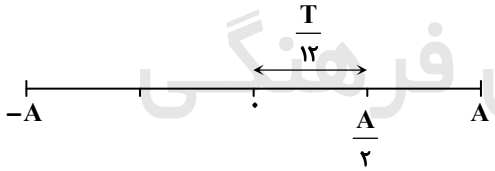
$$v = ۳۶\frac{km}{h} \div ۳/۶ = ۱۰\frac{m}{s}$$

نیروی مرکزگرای خودرو در پیچ جاده را نیروی اصطکاک تأمین می‌کند، پس:

$$f_{s,max} = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow \mu_s mg = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow \mu_s = \frac{v^۲}{gr} \Rightarrow \mu_s = \frac{۱۰^۲}{۱۰ \times ۲۵} = ۰/۴$$

۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

طبق شکل مقابل می‌دانیم نوسانگر فاصلهٔ زمانی نقطهٔ تعادل تا $\frac{A}{۲}$ را در $\frac{T}{۱۲}$ طی می‌کند.



$$\frac{T}{۱۲} = \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow T = ۰/۲s$$

حال که دورهٔ تناوب را داریم به‌راحتی تعداد نوسان در ۶۰s را محاسبه می‌کنیم:

$$n = \frac{\Delta t}{T} = \frac{۶۰}{۰/۲} = ۳۰۰$$

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

این سؤال عیناً از پرسش کتاب درسی مطرح شده است. سه شکل را بررسی می‌کنیم:

در شکل ۱: تندی صوت بیشتر از تندی چشمه است.

در شکل ۲: تندی چشمه از تندی صوت بیشتر است.

در شکل ۳: تندی صوت بزرگ‌تر از تندی چشمه است.

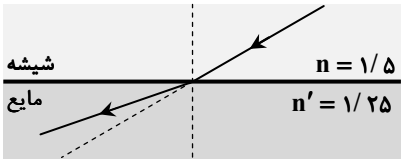
۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

می‌دانیم دورهٔ حرکت نوسانگر جرم- فنر از رابطهٔ $T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ محاسبه می‌شود. پس از رابطهٔ نسبتی داریم:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{m_۲}{m_۱}} \Rightarrow \frac{۰/۶T_۱}{T_۱} = \sqrt{\frac{m_۱ - ۳۲۰}{m_۱}} \Rightarrow \frac{۳۶}{۱۰۰} = \frac{m_۱ - ۳۲۰}{m_۱} \Rightarrow ۳۶m_۱ = ۱۰۰m_۱ - ۳۲۰۰۰ \Rightarrow m_۱ = ۵۰۰g$$

۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

چون محیط دوم ضریب شکست کمتری دارد، سرعت بیشتر می‌شود و پرتو از خط عمود دور می‌شود.



$$\frac{v}{v'}=\frac{n'}{n}=\frac{۱/۲۵}{۱/۵}=\frac{۵}{۶} \Rightarrow v'=\frac{۶}{۵}v$$

۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

طبق رابطهٔ $f=\frac{v}{۲L}$، بسامد صوت اصلی با سرعت رابطهٔ مستقیم دارد. همچنین رابطهٔ سرعت با نیروی کشش تار هم طبق رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ مستقیم است، پس:

$$f=\frac{۱}{۲L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow{\text{رابطهٔ مقایسه‌ای بسامد}} \frac{f_۱}{f_۲}=\sqrt{\frac{F_۱}{F_۲}} \Rightarrow \frac{f_۱}{۱/۲f_۱}=\sqrt{\frac{۵۰}{F_۲}} \Rightarrow \frac{۱۰۰}{۱۴۴}=\frac{۵۰}{F_۲} \Rightarrow F_۲=۷۲\,N$$

در نهایت خواستهٔ سؤال:

$$\Delta F=F_۲-F_۱=۷۲-۵۰=۲۲\,N$$

۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۵)

۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

$$K_{max}=hf-hf_۰=۵hf_۰-hf_۰=۴hf_۰=۴W_۰=۴\times ۱/۷۵=۷\,eV=۷\times ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\,J=۱/۱۲\times ۱۰^{-۱۸}\,J$$

۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

بررسی عبارت‌های نادرست:

طبق متن کتاب درسی در پرتوزایی طبیعی تعداد نوکلئون‌ها همواره ثابت و برابر است. («الف» و «ب» نادرست) فقط مورد «پ» درست است.

۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

در هر دو حالت E_t را محاسبه می‌کنیم:

حالت اول: $E_۱=\frac{kq_۱}{r_۱^۲}=\frac{k(۱۰)}{(۲۰)^۲}=\frac{k}{۴۰}$, $E_۲=\frac{k(۲۰)}{(۴۰)^۲}=\frac{k}{۸۰}$

$$E_t=\sqrt{E_۱^۲+E_۲^۲}=\sqrt{(\frac{k}{۴۰})^۲+(\frac{k}{۲\times ۴۰})^۲}=\frac{k}{۴۰}\sqrt{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{k}{۴۰}\sqrt{\frac{۵}{۴}}$$

حالت دوم: $E'_۱=\frac{k}{۴۰}$, $E_۲=\frac{k(۲۰)}{(۲۰)^۲}=\frac{k}{۲۰}$

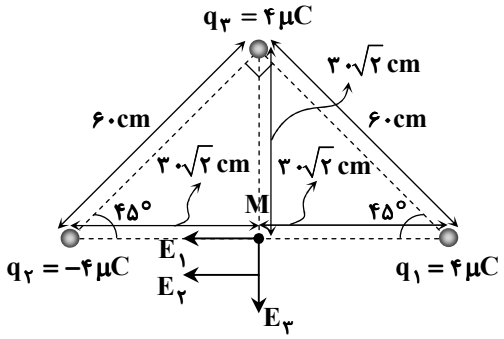
$$E'_t=\sqrt{(\frac{k}{۴۰})^۲+(\frac{k}{۲۰})^۲}=\frac{k}{۲۰}\sqrt{\frac{۱}{۴}+۱}=\frac{k}{۲۰}\sqrt{\frac{۵}{۴}}$$

$$\frac{E'_t}{E_t}=\frac{\frac{k}{۲۰}\sqrt{\frac{۵}{۴}}}{\frac{k}{۴۰}\sqrt{\frac{۵}{۴}}}=۲$$

۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

ابتدا میدان‌های ناشی از هر بار را در نقطهٔ M رسم می‌کنیم:

چون مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، اندازهٔ فاصله‌ها به‌راحتی مطابق شکل روبه‌رو قابل محاسبه است.



حال تک‌تک میدان‌ها را محاسبه کرده و در نهایت برایند می‌گیریم: $E=\frac{k|q|}{r^۲}$

$$E_۱=\frac{۹\times ۱۰^۹\times ۴\times ۱۰^{-۶}}{(۳۰\sqrt{۲}\times ۱۰^{-۲})^۲}=۲\times ۱۰^۵\,\frac{N}{C}\ ,\ E_۲=E_۱=۲\times ۱۰^۵\,\frac{N}{C}$$

$$E_۳=\frac{۹\times ۱۰^۹\times ۴\times ۱۰^{-۶}}{(۳۰\sqrt{۲}\times ۱۰^{-۲})^۲}=۲\times ۱۰^۵\,\frac{N}{C}$$

در راستای محور x: $E_۱+E_۲=E_x \Rightarrow E_x=۴\times ۱۰^۵\,\frac{N}{C}$, $E_y=۲\times ۱۰^۵\,\frac{N}{C}$

$$E_t=\sqrt{E_x^۲+E_y^۲}=\sqrt{(۴\times ۱۰^۵)^۲+(۲\times ۱۰^۵)^۲}=۱۰^۵\sqrt{۱۶+۴}=۲\times ۱۰^۵\sqrt{۵}\,\frac{N}{C}$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

طبق صورت سؤال $\Delta V = ۲\times ۱۰^{۳}\ V$ ، $\Delta U = ۸\times ۱۰^{۳}\ W\cdot h$، پس:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{ne} \Rightarrow n = \frac{\Delta U}{e\times \Delta V} = \frac{۸\times ۱۰^{۳}\times ۳۶۰۰}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}\times ۲۰۰۰} = ۹\times ۱۰^{۲۲}$$

۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)

$$۵۰۰mA = ۰/۵\ A$$

$$P_۱ = VI_۱ \Rightarrow P_۱ = ۸\times ۰/۵ = ۴\ W$$

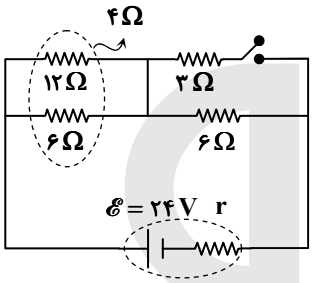
$$R_۱ = \frac{V}{I_۱} \Rightarrow R_۱ = \frac{۸}{۰/۵} = ۱۶\Omega$$

$$P_۲ = P_۱ + ۰/۶P_۱ = ۱/۶P_۱ = ۱/۶\times ۴ = ۶/۴\ W$$

$$P_۲ = \frac{V^{۲}}{R_۲} \Rightarrow ۶/۴ = \frac{۶۴}{R_۲} \Rightarrow R_۲ = ۱۰\Omega$$

$$R_۲ - R_۱ = -۶ \Rightarrow \text{کاهش } ۶\Omega$$

۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۲)



در حالت اول دو مقاومت ۶ و ۱۲ اهمی مطابق شکل موازی‌اند و مقاومت معادل آن‌ها ۴Ω است و این مقاومت با دیگر مقاومت ۶ اهمی متوالی است که مقاومت کل مقدار ۱۰Ω را پیدا می‌کند. پس داریم:

$$I_۱ = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq} + r} = \frac{۲۴}{۱۰ + r} \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

در حالت دوم در شاخهٔ سوم مقاومت ۳اهمی اضافه شده که با مقاومت ۶ اهمی پایین موازی است و مقاومت معادل آن‌ها ۲Ω است پس مقاومت کل $R_{eq} = ۴ + ۲ = ۶\Omega$. پس داریم:

$$I_۲ = \frac{۲۴}{۶ + r} \xrightarrow{I_۲ = I_۱ + ۱,\ (۱)\text{رابطهٔ}} \frac{۲۴}{۶ + r} = \frac{۲۴}{۱۰ + r} + ۱$$

با جایگذاری گزینه‌ها $r = ۲$ پاسخ درست می‌باشد.

۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

پس از وصل کلید، دو مقاومت موازی اتصال کوتاه کرده و از مدار خارج می‌شوند و مقاومت معادل کاهش می‌یابد؛ پس حتماً جریان افزایش می‌یابد. از طرفی داریم:

$$V_۱ = IR \ ,\ V_۲ = \mathscr{E} - Ir$$

همان‌طور که واضح است با افزایش جریان $V_۲$ کاهش و $V_۱$ افزایش می‌یابد.

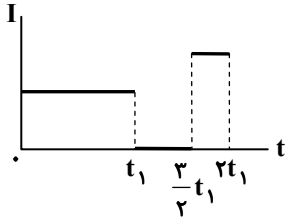
۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۳)

در شکل حوزه‌های مغناطیسی ایجاد شده اما همچنان جهت‌گیری‌ها چندان هم‌سو نیست که این حالت بیانگر قرارگرفتن یک مادهٔ فرومغناطیسی در معرض یک میدان مغناطیسی خارجی ضعیف است.

۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

بازهٔ $(۰, t_۱)$: شیب نمودار $(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t})$ منفی است، پس طبق رابطهٔ $\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ مقدار ε_{av} مثبت و ثابت است پس با توجه به $I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$ جریان هم مقداری ثابت و مثبت دارد (رد گزینه‌های ۱ و ۲)

در بازهٔ $(t_۱, \frac{۳}{۲}t_۱)$: شیب نمودار صفر $\leftarrow \varepsilon_{av} = ۰ \leftarrow I_{av} = ۰$



در بازهٔ $(\frac{۳}{۲}t_۱, ۲t_۱)$: شیب نمودار منفی $\leftarrow \varepsilon_{av} > ۰\ ,\ I_{av} > ۰$ اما باید توجه کرد که طبق نمودار سؤال، شیب این قسمت اندازهٔ بیشتری دارد؛ پس مقدار ε_{av} و I_{av} در این بازه بیشتر از بازهٔ اول است.

۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

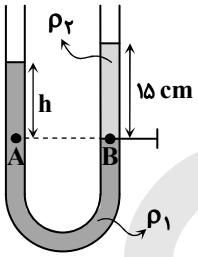
طبق داده‌های مسئله:
$$R_A = ۲R_B \quad R_B = ۲r_B \quad m_A = ۳m_B \quad h_A = ۳h_B$$

از رابطهٔ نسبتی چگالی کمک می‌گیریم:

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{\pi(R_B^۲ - r_B^۲)h_B}{\pi R_A^۲ h_A} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{۳m_B}{m_B} \times \frac{(R_B^۲ - \frac{R_B^۲}{۴})h_B}{۴R_B^۲ \times (۳h_B)} = ۳ \times \frac{\frac{۳}{۴}}{۴ \times ۳} = \frac{۳}{۱۶}$$

۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

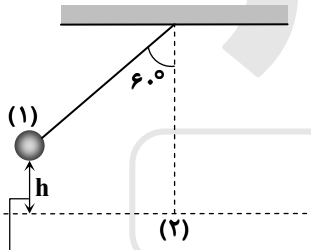
با بازکردن شیر رابط، سطح آزاد دو مایع جابه‌جا می‌شوند تا به حالت تعادل برسند؛ یعنی شکل مقابل:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_۱ g h_۱ = \rho_۲ g h_۲$$
$$\Rightarrow \rho_۱ h_۱ = \rho_۲ h_۲ \Rightarrow ۱۰^۳ \times h = ۸۰۰ \times ۰/۱۵$$
$$\Rightarrow h = ۰/۱۲ m = ۱۲ cm$$
$$\Rightarrow \Delta h = ۱۵ - ۱۲ = ۳ cm$$

۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

می‌دانیم بیشینهٔ انرژی جنبشی وزنه در نقطه‌ای است که از حالت تعادل عبور می‌کند، چون مقاومت هوا ناچیز است، طبق پایستگی انرژی داریم:



$$E_۱ = E_۲$$
$$\Rightarrow \cancel{K_۱}^{۰} + U_۱ = K_۲ + \cancel{U_۲}^{۰}$$
$$\Rightarrow mgh = K_۲ \Rightarrow ۰/۲ \times ۱۰ \times ۱ = K_۲$$
$$\Rightarrow K_۲ = ۲J$$

$$h = l(۱ - Cos۶۰^\circ) \Rightarrow h = ۲(۱ - \frac{۱}{۲}) = ۱m$$

۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۵)

چون حجم ثابت است پس:
$$\frac{P_۱}{n_۱ T_۱} = \frac{P_۲}{n_۲ T_۲}$$

(سؤال به ما فشار پیمانه‌ای را داده اما در معادلهٔ حالت باید فشار مطلق را قرار دهیم، پس $P_{\text{مطلق}} = P_{\text{پیمانه‌ای}} + P_۰$)

$$\frac{۴}{n_۱(۳۲۰)} = \frac{۳}{n_۲(۳۰۰)} \Rightarrow \frac{n_۲}{n_۱} = ۰/۸ \xrightarrow[\text{M:ثابت}]{n=\frac{m}{M}} \frac{m_۲}{m_۱} = ۰/۸$$

پس ۲۰٪ خارج شده است.

۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

می‌دانیم در فرایند بی‌دررو گرما مبادله نمی‌شود، پس:

$$Q_۲ = ۰ \ , \ \Delta U_۲ = W_۲$$

در فرایند هم‌دما، انرژی درونی صفر است، پس:

$$\Delta U_۱ = ۰ \Rightarrow Q_۱ = -W_۱$$

در فرایندها حجم کاهش یافته است، پس داریم:

$$W_۱ > ۰ \Rightarrow Q_۱ < ۰$$

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

اولاً دقت کنیم که عنصر A می‌تواند هر عنصری از عدد اتمی ۲۰ (Ca) تا ۳۰ (Zn) را شامل شود، به غیر از دو عنصر ${}_{۲۴}Cr$ و ${}_{۲۹}Cu$ که آرایش الکترونی لایه ظرفیت آن‌ها به $۴s^{۱}$ پایان می‌یابد.

۱) درست

$$۳s^{۱} \Rightarrow {}_{۱۱}Na$$

$${}_{۲۰}Ca = ۲۰-۱۱=۹ \ , \ {}_{۳۰}Zn = ۳۰-۱۱=۱۹$$

۲) نادرست؛ چون عنصر A نمی‌تواند Cr یا Cu باشد، پس می‌توان آن را به ۸ عنصر دستهٔ d در دورهٔ ۴ نسبت داد.

۳) نادرست؛ همگی این عناصر فلز هستند و امکان تشکیل ترکیب مولکولی ندارند.

۴) نادرست؛ در میان این ۹ فلز فقط فلز کلسیم می‌تواند یون پایدار «+۲» تشکیل دهد، که این یون به آرایش $[{}_{۱۸}Ar]$ می‌رسد.

۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۱) درست؛ سه فلز و یک شبه فلز: Na, Mg, Al, Si

۲) درست؛ آرایش الکترون لایهٔ ظرفیت عناصر واسطه به‌جز Cr و Cu به $۴s^{۲}$ پایان می‌یابد.

۳) نادرست؛ پانزدهمین عنصر دستهٔ d، همان پنجمین عنصر دستهٔ d در دورهٔ ۵ است. پس عدد اتمی آن برابر است با:

$$۳۶+۲+۵=۴۳$$

سیزدهمین عنصر دستهٔ p همان اولین عنصر دستهٔ p در دورهٔ ۴ است. پس عدد اتمی آن برابر است با:

$$۱۸+۲+۱۰+۱=۳۱$$

اختلاف عدد اتمی دو عنصر : $۴۳-۳۱=۱۲$

دومین فلز قلیایی: ${}_{۱۱}Na$

۴) درست؛

$$A^{۳+}: ۳p^{۶} \Rightarrow A: [Ar]۳d^{۱}۴s^{۲} \Rightarrow {}_{۲۱}Sc$$

$$M^{۲+}: ۴s^{۲} \Rightarrow M: [Ar]۳d^{۱۰}۴s^{۲}۴p^{۲} \Rightarrow {}_{۳۲}Ge$$

اختلاف عدد اتمی دو A و M : $۳۲-۲۱=۱۱$

شعلهٔ ${}_{۱۱}Na$ زرد است.دقت کنیم که Ge شبه فلز است و یون پایدار ندارد. در صورت سؤال هم نگفته یون پایدار $M^{۲+}$، پس ایرادی وارد نیست.

۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱) و شیمی ۳ (فصل ۳)

الف) نادرست؛ He آرایش هشت‌تایی ندارد.

ب) نادرست؛ در جدول تناوبی جرم اتمی میانگین عناصر گزارش می‌شود. (نه عدد جرمی!)

پ) درست؛ عناصر ${}_{۲۹}Cu$ تا ${}_{۳۶}Kr$، دارای زیرلایهٔ $۳d^{۱۰}$ هستند.

ت) درست؛ چون یون‌های پایدار هم‌الکترون هستند، اما مقدار بار که با افزایش عدد اتمی کاهش می‌یابد بر شعاع یونی اولویت دارد.

$$\frac{|q|}{r}: N^{۳-} > O^{۲-} > F^{-}$$

۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۲)

۱) نادرست؛ نقطه جوش هلیم $-۲۶۹^{\circ}C$ است و در دمای $-۱۸۵^{\circ}C$ همچنان گاز است.

۲) نادرست؛ با افزایش دما از ۲۰۰- به‌ترتیب ابتدا $N_۲$، سپس Ar و $O_۲$ جدا می‌شوند.

۳) نادرست؛

نقطه ذوب یخ : $۰^{\circ}C$

نقطه تصعید یخ خشک : $-۷۸^{\circ}C$

۴) درست؛

گاز	$N_۲$	Ar	$O_۲$
نقطه جوش	-۱۹۶	-۱۸۶	-۱۸۳

۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

ابتدا دو واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$

$$CH_3OH + \frac{3}{2}O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$

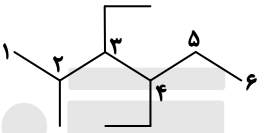
دقت کنیم که در هر دو واکنش نسبت ضریب مولی سوخت (متان و متانول) به CO_2 ۱ به ۱ است، پس میزان CO_2 برابر نشان‌دهندهٔ برابری مقدار مول CH_4 و CH_3OH است.

$$\frac{x\,mol\,CH_3OH \times \frac{32\,g\,CH_3OH}{1\,mol\,CH_3OH}}{x\,mol\,CH_4 \times \frac{16\,g\,CH_4}{1\,mol\,CH_4}} = 2$$

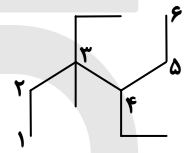
۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

برای سهولت ابتدا همهٔ ترکیب‌ها را شماره‌گذاری و نام‌گذاری می‌کنیم. ترکیب‌های هم‌نام یکسان خواهند بود.

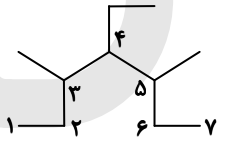
الف) ۳ و ۴- دی اتیل، ۲- متیل هگزان



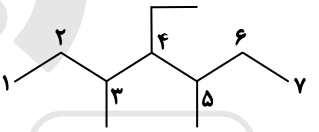
ب) ۳ و ۴- دی اتیل، ۳- متیل هگزان



پ) ۴- اتیل، ۳ و ۵- دی متیل هپتان



ت) ۴- اتیل، ۳ و ۵- دی متیل هپتان



پس ترکیب‌های «پ» و «ت» یکسان هستند.

حالا مجموع شمارهٔ شاخه‌های فرعی:

الف) $۹ = ۲ + ۴ + ۳$ ب) $۱۰ = ۳ + ۴ + ۳$ «پ» و «ت»: $۱۲ = ۵ + ۳ + ۴$

پس کمترین مجموع اعداد مربوط به ترکیب «الف» است.

۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

الف) نادرست؛ هر دو حلال، کاربرد صنعتی دارند.

ب) نادرست؛ H_2O و NH_3 دارای پیوند هیدروژنی هستند.

پ) درست

ت) درست؛ چون انحلال‌پذیری گاز NO از O_2 بیشتر است. بر طبق قانون هنری تابعیت انحلال‌پذیری آن نیز نسبت به تغییرات فشار و دما شیب بیشتری در نمودار نشان می‌دهد.

۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم. می‌توان واکنش را با وارسی و یا با تغییر عدد اکسایش موازنه کرد.

$$4\underline{S} + 6NaOH \rightarrow 2Na_2\underline{S} + 1Na_2\underline{S_2}O_3 + 3H_2O$$

$$0 \xrightarrow{-2\times2} -2 \qquad +2 \xrightarrow{+4\times1} 0$$

$$\frac{4}{3}S + 2NaOH \rightarrow \frac{2}{3}Na_2S + \frac{1}{3}Na_2S_2O_3 + 1H_2O \times 3$$

$$4S + 6NaOH \rightarrow 2Na_2S + Na_2S_2O_3 + 3H_2O$$

حالا یک استوکیومتری ساده:

$$0/3\,L \times \frac{0/1\,mol\,NaOH}{1\,L} \times \frac{4\,mol\,S}{6\,mol\,NaOH} \times \frac{32\,g\,S}{1\,mol\,S} = 0/64\,g\,S$$

۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

ابتدا جرم SO_4^{2-} در هر دو ماده را به‌دست می‌آوریم:

$$۱۰۰\,g\,\text{محلول} \times \frac{۱۳۸۰\,g\,Na^+}{۱۰^۶\,g\,\text{محلول}} \times \frac{۱\,mol\,Na^+}{۲۳\,g\,Na^+} \times \frac{۱\,mol\,SO_4^{2-}}{۲\,mol\,Na^+} \times \frac{۹۶\,g\,SO_4^{2-}}{۱\,mol\,SO_4^{2-}} = ۲۸۸\times۱۰^{-۳}\,g\,SO_4^{2-}$$

$$۴۰\times۱۰^{-۳}\,g\,Fe_۲(SO_۴)_۳ \times \frac{۱\,mol\,Fe_۲(SO_۴)_۳}{۴۰۰\,g\,Fe_۲(SO_۴)_۳} \times \frac{۳\,mol\,SO_4^{2-}}{۱\,mol\,Fe_۲(SO_۴)_۳} \times \frac{۹۶\,g\,SO_4^{2-}}{۱\,mol\,SO_4^{2-}} = ۲۸۸\times۱۰^{-۴}\,g\,SO_4^{2-}$$

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ = \frac{۲۸۸\times۱۰^{-۳} + ۲۸۸\times۱۰^{-۴}}{۱۰۰} \times ۱۰^۶ = ۲۸۸۰ + ۲۸۸ = ۳۱۶۸$$

۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۱) درست؛ جاذبه یون‌های نمک با حلال آب جاذبه یون دوقطبی است که با تغییر دما قدرت آن تغییر می‌کند، اما نوع آن تغییر نمی‌کند.

۲) نادرست؛ بسته به اینکه $\Delta H_{\text{انحلال}}$، + یا − باشد، با تغییر دما ممکن است انحلال‌پذیری افزایش یا کاهش داشته باشد. ضمناً نمی‌دانیم محلول اولیه سیرشده یا سیرنشده بوده است.

۳) نادرست؛ تشکیل بلور نشان‌دهندهٔ کاهش انحلال‌پذیری با افزایش دما و گرماده بودن فرایند است.

۴) نادرست؛ برخی نمک‌ها رفتار غیر خطی دارند.

۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

$C_۸H_{۱۸}$ آلکان است و در شرایط عادی با برم مایع واکنش نمی‌دهد.

$$C_۷H_{۱۴} + Br_۲ \rightarrow C_۷H_{۱۴}Br_۲$$

$$۱/۶\,g\,Br_۲ \times \frac{۱\,mol\,Br_۲}{۱۶۰\,g\,Br_۲} \times \frac{۱\,mol\,C_۷H_{۱۴}}{۱\,mol\,Br_۲} = ۱۰^{-۲}\,mol\,C_۷H_{۱۴}$$

$$C_۷H_{۱۴} : ۷\times۱۲ + ۱۴\times۱ = ۹۸\,g\cdot mol^{-۱}$$

$$?\,g\,C_۷H_{۱۴} : ۹۸\,\frac{g}{mol} \times ۰/۰۱\,mol = ۰/۹۸\,g$$

جرم $C_۸H_{۱۸}$ در مخلوط : $۱/۲۰۸ - ۰/۹۸ = ۰/۲۲۸\,g\,C_۸H_{۱۸}$

$$?\,mol\,C_۸H_{۱۸} : ۰/۲۲۸\,g \times \frac{۱\,mol}{۱۱۴\,g} = ۲\times۱۰^{-۳}\,mol\,C_۸H_{۱۸}$$

نسبت خواسته‌شده : $$\frac{۱۰^{-۲}\,mol\,C_۷H_{۱۴}}{۲\times۱۰^{-۳}\,mol\,C_۸H_{۱۸}} = ۵$$

۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم: $۴C_۳H_۵N_۳O_۹ \rightarrow ۱۲CO_۲ + ۱۰H_۲O + ۶N_۲ + O_۲$

دقت شود که در شرایط STP، $H_۲O$ دیگر گاز نیست، پس:

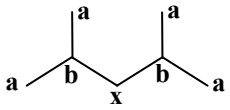
$$۴\,mol\,C_۳H_۵N_۳O_۹ \simeq (۱۲+۶+۱)\,mol\,\text{گاز}$$

$$C_۳H_۵N_۳O_۹ = ۳\times۱۲ + ۵\times۱ + ۳\times۱۴ + ۹\times۱۶ = ۲۲۷\,g\cdot mol^{-۱}$$

$$۳۶۳/۲\,g\,\text{ماده} \times \underbrace{\frac{x}{۱۰۰}}_{\text{درصد خلوص}} \times \frac{۱\,mol\,\text{ماده}}{۲۲۷\,g\,\text{ماده}} \times \frac{۱۹\,mol\,\text{گاز}}{۴\,mol\,\text{ماده}} \times \frac{۲۲/۴\,L}{۱\,mol\,\text{گاز}} = ۱۲۷/۶۸\,L \Rightarrow x = ۷۵$$

۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

ابتدا ساختار ماده را رسم می‌کنیم.



براساس تقارن سه نوع کربن (جایگاه متفاوت H) داریم، پس سه ایزومر کلر دار خواهیم داشت.

۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

A: نافلز است ولی گاز نجیب نیست.

الف) نادرست؛ A می‌تواند $H_۲$، $N_۲$، $O_۲$، $F_۲$ و $Cl_۲$ باشد، که در دورهٔ اول شبه فلز نداریم؛ در دورهٔ دوم فقط B شبه فلز است؛ در دورهٔ سوم نیز فقط Si شبه فلز است.

ب) درست؛ تنها گروهی که دو نافلز گازی دارای فعالیت شیمیایی دارد، گروه ۱۷ ($F_۲$, $Cl_۲$) است. در این گروه $Br_۲(l)$ و $I_۲(s)$ است.

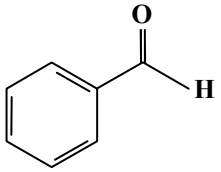
پ) نادرست؛ عدد اتمی A از عدد اتمی Ge یعنی عدد ۳۲ کمتر است. پس A در یکی از دوره‌های ۱، ۲ یا ۳ است و نمی‌تواند با Zn (دورهٔ ۴) و نقره (دورهٔ ۵) هم‌دوره باشد.

ت) درست؛ بنا به‌صورت عبارت، A باید یک هالوژن گازی باشد و D نافلزی قوی‌تر از آن، پس A، باید $_{۱۷}Cl$ و D، $_۹F$ است.

(متأسفانه طراح محترم از $H_۲$ غافل شده است که خصلت نافلزی $H > He$ است و کمترین عدد اتمی را دارد.)

۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

الف) نادرست؛ ابتدا فرمول دو ترکیب را به‌دست می‌آوریم:



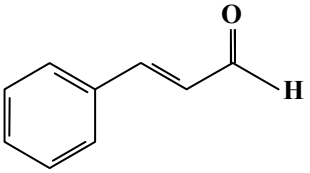
(b)

آلکان هم‌کربن : C_7H_{16}

$16-5\times2=6$

$b: C_7H_6O$

تعداد پیوند : $\frac{7\times4+6\times1+2}{2}=18$



(a)

آلکان هم‌کربن : C_9H_{20}

$20-6\times2=8$

$a: C_9H_8O$

تعداد پیوند : $\frac{9\times4+8\times1+2}{2}=23$

اختلاف پیوندها : $23-18=5$ پیوند

الکترون اشتراکی $5\times2=10$

ب) نادرست؛ فرمول دو ترکیب را از هم کم می‌کنیم.

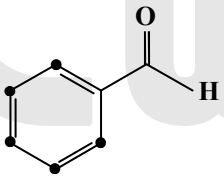
اتین (C_2H_2) اولین آلکین است: $C_9H_8O-C_7H_6O \rightarrow C_2H_2$

پ) درست؛ چون تعداد هیدروژن‌ها در مولکول a بیشتر است، پس با جایگزین کردن اتم‌های H با گروه‌های متیل ($-CH_3$)، افزایش جرم مولی بیشتر نیز خواهد بود.

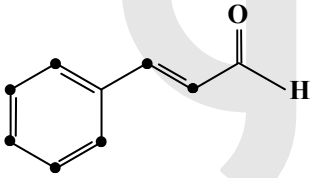
ت) درست؛ در هر دو ترکیب اتم‌های H فقط به اتم‌های C متصل هستند، پس تعداد اتم‌های H همان تعداد پیوندهای $C-H$ است.

$(C-H)_a-(C-H)_b=8-6=2$

در شکل‌های روبه‌رو کربن‌های با عدد اکسایش ۱- (گروه‌های CH) مشخص شده‌اند.



۵ کربن با عدد اکسایش ۱-



۷ کربن با عدد اکسایش ۱-

اختلاف موردنظر : $7-5=2$

۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۳)

نام	فرمول شیمیایی	اختلاف شمار اتم‌ها و نوع عنصرها
سیانواتن	$CH_2=CH-C\equiv N$	$7-3=4$ ✓
وینیل کلرید	$CH_2=CH-Cl$	$6-3=3$ ×
تترا فلوئورواتن	C_2F_4	$6-2=4$ ✓
فرمیک اسید	$HCOOH$	$5-3=2$ ×
استون	$CH_3-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_3$	$10-3=7$ ×
پروپین	C_3H_4	$7-2=5$ ×

۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

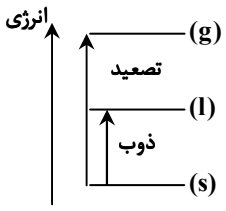
۱) نادرست؛ دو واکنش عکس یکدیگر هستند و ΔH آن‌ها قرینه هم است.

۲) نادرست؛ میعان تبدیل گاز به مایع و انجماد تبدیل مایع به جامد است.

$\Delta H_{\text{میعان}} < \Delta H_{\text{انجماد}} < 0$

دقت کنیم که در مواد، اختلاف انرژی (g) و (l) بیشتر از (l) و (s) است.

۳) درست؛ به شکل زیر دقت کنید.



۴) نادرست؛ در فرایند چگالش که تبدیل گاز به جامد است، اختلاف سطح انرژی بیشتر از فرایند میعان است که تبدیل گاز به مایع است.

۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

ابتدا واکنش سوختن هیدروژن در حالت گازی را می‌نویسیم:

$$۲H-H+O=O \rightarrow ۲\ H-\ddot{O}-H \qquad \Delta H = ۲\times(-۲۴۲) = -۴۸۴$$

$$\Delta H = \Delta H = ۲\Delta H_{(H-H)} + \Delta N_{(O=O)} - ۴\Delta H_{(O-H)} \Rightarrow -۴۸۴ = ۲\Delta H_{(H-H)} + ۴۹۶ - ۴\times۴۶۰$$

$$\Delta H_{(H-H)} = \frac{-۴۸۴ - ۴۹۶ + ۴\times۴۶۰}{۲} = ۴۳۰\,kj$$

حالا واکنش دوم:

$$H-H+۲Cl \rightarrow ۲H-Cl$$

$$\Delta H = \Delta H_{(H-H)} - ۲\Delta H_{(H-Cl)} = ۴۳۰ - ۲\times۴۳۰ = -۴۳۰\,kJ$$

۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۲)

در واحد زمان قدرمطلق تغییر جرم A، ۳ برابر D است اما جرم مولی آن نیز سه برابر D است، پس تغییر مول دو ماده در واحد زمان با هم برابر است و ضریب مولی برابر دارند.

پس گزینهٔ ۱ نادرست و گزینهٔ ۲ درست است.

۳) سرعت واکنش برابر با سرعت مولی ماده با ضریب ۱ است و ما نمی‌دانیم ضریب A و D چند است.

۴) چون اطلاعات سؤال در مورد سرعت است و نه تغییر جرم (مول) آن‌ها، نمی‌توان تشخیص داد که A یا D واکنش‌دهنده یا فراورده باشند.

۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۱)

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) مخلوط آب، صابون و روغن یک کلوئید است. پس ناهمگن و پایدار است.

۳) صابون و آمونیوم نیترات ($NH_۴NO_۳$) هر دو ترکیب یونی هستند و در آب انحلال یونی دارند.

۴) صابون از واکنش چربی با یکی از سه باز NaOH، KOH و $NH_۳$ به‌دست می‌آید. نمک حاصل از چربی با هیدروکسید فلزهای قلیایی (مثلاً Mg و Ca) رسوب ایجاد می‌کند.

۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

ابتدا مقدار مول اولیه ۲ محلول را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{محلول HBr}: ۰/۱L \times \frac{۰/۲mol\,HBr}{۱L} = ۲\times۱۰^{-۲}\,mol\,HBr$$

$$\text{محلول NaOH}: ۱/۶\frac{g}{L} \times \frac{۱mol}{۴۰g} = ۴\times۱۰^{-۲}\frac{mol}{L}$$

$$۰/۲L \times \frac{۴\times۱۰^{-۲}\,mol\,NaOH}{۱L} = ۸\times۱۰^{-۳}\,mol\,NaOH$$

حالا جدول تغییرات مولی:

	HBr	+ NaOH	→ NaBr	+ $H_۲O$
اولیه	۲۰×۱۰^{-۳}	۸×۱۰^{-۳}	۰	۰
تغییرات	-۸×۱۰^{-۳}	-۸×۱۰^{-۳}		
پایانی	۱۲×۱۰^{-۳}	۰		

پس در محلول پایانی ۰/۰۱۲ مول HBr داریم:

$$M_{HBr} = \frac{۱۲\times۱۰^{-۳}\,mol}{(۰/۱+۰/۲+۰/۲)L} = ۲۴\times۱۰^{-۳}\frac{mol}{L}$$

$$\alpha = ۱ \Rightarrow \left[H^+\right] = M\alpha = ۲۴\times۱۰^{-۳}$$

$$pH = -\log\left[H^+\right] = ۳ - \log ۲۴ = ۳ - \log ۳ - ۳\log ۲ = ۳ - ۰/۵ - ۰/۹ = ۱/۶$$

۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱) نادرست؛ کاتیون به سمت کاتد می‌رود، e هم در مدار بیرونی از آند به کاتد می‌رود. پس هم‌جهت هستند. (متأسفانه طراح محترم توجه نداشته است که جهت حرکت الکترون‌ها با جهت جریان متفاوت است.)

۲) نادرست

$$Fe \rightarrow Fe^{2+} + 2e^-$$

$$0/56\,g\,Fe \times \frac{1\,mol\,Fe}{56\,g\,Fe} \times \frac{2\,mol\,e}{1\,mol\,Fe} \times \frac{6/02 \times 10^{23}\,e}{1\,mole} = 1/204 \times 10^{22}$$

۳) درست؛ Pt کاتد است، پس آنیون‌های محلول کاتدی به سمت آند می‌روند.

۴) نادرست؛ چون پتانسیل کاهشی Mn از آهن کمتر است، پس در این سلول گالوانی Mn آند و Fe کاتد است، ضمناً Fe^{2+} اکسنده و Mn کاهنده است. پس مقدار emf:

$$emf = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = -0/44 - (-1/18) = +0/74\,V$$

۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$\left[H^+\right] = M\alpha \Rightarrow \begin{cases} 10^{-2} = 10^{-1/3}X \\ 10^{-3} = 10^{-0/7}Y \end{cases} \Rightarrow 10 = 10^{-0/6} \times \frac{X}{Y} \Rightarrow \frac{X}{Y} = 10^{1/6} = 10^{1+2\log 2} = 10 \times 10^{\log 4} = 40$$

۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱) درست؛ اساساً در کتاب درسی طرح سلول سوختی برای ضرورت نیاز به عدد اکسایش است.

۲) درست

اکسندگی: $H_2O > Al^{3+} > Mg^{2+} > Na^{2+}$

فلزات با قدرت کاهندگی بالا، کاتیون‌هایی با قدرت اکسندگی پایین دارند، پس در فرایند برقکافت محلول آبی نمک آن‌ها، در کاتد به جای کاهش کاتیون، آب دچار کاهش می‌شود. در نتیجه برای استخراج این فلزها در فرایند برقکافت از نمک مذاب استفاده می‌شود.

۳) درست؛ نقطهٔ ذوب NaCl برابر ۸۰۱°C و نقطهٔ ذوب مخلوط NaCl و $CaCl_2$ برابر ۵۸۷°C است، پس اختلاف آن‌ها برابر ۲۱۴°C (به تقریب ۲۱۵°C) است.

۴) نادرست؛ در سلول سوختی آند و کاتد دارای کاتالیزگر هستند. خود آن‌ها کاتالیزگر نیستند.

۱۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

ابتدا چهار نیم‌واکنش را برحسب پتانسیل از زیاد به کم مرتب می‌نویسیم. هرچه E° کمتر باشد، کاهنده قوی‌تری و هرچه E° بیشتر باشد، اکسنده قوی‌تر است. واکنش بین کاهنده با E° کمتر و اکسنده با E° بیشتر انجام می‌شود.

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)

در بین ترکیب‌های یونی موجود در گزینه‌ها، بیشترین آنتالپی فروپاشی را Al_2O_3 دارد. کمترین هم مربوط به KCl، NaCl و LiF است. ترکیب‌های با بار +۱ و −۱ اختلاف چندانی ندارند، پس می‌توان نتیجه گرفت که بیشترین اختلاف متعلق به Al_2O_3 و LiF در گزینه‌ها است.

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

براساس شکل (a)، می‌توان فهمید که ترکیبی است که دارای یک جفت الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی بوده و یک ترکیب قطبی است. (مانند NH_3)

براساس شکل (b)، می‌توان فهمید که ترکیبی مسطح، متقارن و ناقطبی است. (مانند SO_3)

در هیچ‌کدام از شکل‌ها نمی‌توان راجع به بار جزئی اتم مرکزی و جانبی اظهار نظر کرد.

بررسی عبارت‌ها:

الف) درست؛ با توجه به کلمهٔ می‌تواند، هر حالت امکان‌پذیر است. مثلاً PCl_3 برای (a) و SO_3 برای (b).

ب) نادرست؛ PF_3 برای (a) قابل‌قبول است اما $FeCl_3$ مولکول نیست، بلکه ترکیب یونی است.

پ) درست؛ SO_2 قطبی است، چون اتم S یک جفت الکترون ناپیوندی دارد و برایند بردارهای گشتاور دوقطبی در آن صفر نمی‌شود.

ت) نادرست؛ اتم F در NF_3 بار جزئی $\delta-$ و اتم N در NO_2 بار جزئی $\delta+$ دارد.

قدرت نافلزی: $F > O > N$

۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)**

۱۰ کیلومتر در صورت سؤال هیچ ارزشی ندارد، چون سؤال مقایسه‌ای است.

آلاینده	درصد کاهش جرم	مقدار مول با استفاده از کاتالیزگر
CO	$\frac{۵/۹۹-۰/۶۱}{۵/۹۹}\times ۱۰۰ \simeq ٪۹۰$	$\frac{۰/۶۱}{۲۸} \simeq ۰/۰۲۱$
$C_۸H_{۱۸}$	$\frac{۱/۶۷-۰/۰۷}{۱/۶۷}\times ۱۰۰ \simeq ٪۹۶$	$\frac{۰/۰۷}{۱۱۴} \simeq ۰/۰۰۰۶$
NO	$\frac{۱/۰۴-۰/۰۴}{۱/۰۴}\times ۱۰۰ \simeq ٪۹۶$	$\frac{۰/۰۴}{۳۰} \simeq ۰/۰۰۱$

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ **مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۴)**

۱) نادرست؛ سنتز شیمیایی فرایندی است که در آن مواد شیمیایی ساده‌تر به مواد پیچیده‌تر تبدیل می‌شوند.

سایر گزینه‌ها درست هستند.

۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)**

۱) نادرست؛ با افزایش فشار (کاهش حجم) در واکنش (I) تعادل به‌سمت مول گازی کمتر یعنی در جهت برگشت و تولید واکنش‌دهنده پیش می‌رود.

۲) نادرست؛ در واکنش (II) با افزایش حجم (کاهش فشار)، تعادل به‌سمت مول گاز بیشتر یعنی جهت برگشت جابه‌جا می‌شود و شمار مول فراورده‌ها کاهش می‌یابد. اما افزایش $CH_۴$ باعث جابه‌جایی تعادل در جهت مصرف آن و تولید فراورده است.

۳) نادرست؛ تغییر فشار باعث تغییر K نمی‌شود، ضمناً در واکنش (II) که گرماده است، K و T رابطه عکس دارند، پس با افزایش دما، مقدار ثابت تعادل کم می‌شود.

۴) درست؛ چون در واکنش (I) تعداد مول گاز فراورده‌ها بیشتر است و در واکنش (II) تعداد مول واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است. با تغییر حجم یکسان ظرف تعادل‌ها در جهت متفاوتی جابه‌جا می‌شوند.

مؤسسه آموزشی فرهنگی