گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۱۴۰۴

(اردیبهشت ماه ۱۴۰۴)

گروه آزمایشی علوم ریاضی

(داخل کشور)

ریاضیات

۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۱)

نکته: مجموع جملات دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q و جملهٔ اول a_1 برابر است با:

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

نکته:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$S_9 = 73S_3 \Rightarrow \frac{a_1(q^9-1)}{q-1} = 73\times\frac{a_1(q^3-1)}{q-1} \Rightarrow q^9-1 = 73(q^3-1)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد تفاضل مکعبات}} (q^3-1)(q^6+q^3+1) = 73(q^3-1) \Rightarrow q^6+q^3+1 = 73 \Rightarrow q^6+q^3-72 = 0$$

با تغییر متغیر $q^3 = t$ معادله به‌دست آمده را حل می‌کنیم:

$$q^3 = t \Rightarrow t^2+t-72 = 0 \Rightarrow (t+9)(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=-9 \\ t=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^3=-9 \Rightarrow q=\sqrt[3]{-9} \\ q^3=8 \Rightarrow q=2 \end{cases} \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} q=2$$

خواسته سؤال نسبت جملهٔ سوم به جملهٔ اول است:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1q^2}{a_1} \Rightarrow \frac{a_3}{a_1} = q^2 \xrightarrow{q=2} \frac{a_3}{a_1} = 4$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (فصل ۳، درس ۴)

نکته: اتحاد مربع دوجمله‌ای:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$x^2+\frac{10}{x^2+1} = 9 \xrightarrow{+1} x^2+1+\frac{10}{x^2+1} = 10$$

اکنون طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x^2+1+\frac{10}{x^2+1})^2 = 10 \Rightarrow (x^2+1)^2+2(x^2+1)(\frac{10}{x^2+1})+\frac{100}{(x^2+1)^2} = 100 \Rightarrow (x^2+1)^2+\frac{100}{(x^2+1)^2}+20 = 100$$

$$\Rightarrow (x^2+1)^2+\frac{100}{(x^2+1)^2} = 80$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۲)

نکته: اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$، آنگاه $A\cup C\subseteq B\cup D$.

نکته (قوانین جذب یا همپوشانی): اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند، داریم:

الف) $A\cup(A\cap B) = A$

ب) $A\cap(A\cup B) = A$

نکته: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی، تساوی‌های زیر برقرارند:

۱) $A\cup A' = U$

۲) $A\cap A' = \varnothing$

۳) $A\cup U = U$

۴) $A\cap U = A$

با استفاده از نکات بالا، داریم:

$$\left.\begin{matrix} A\cup B'\subseteq A\cap B \\ B\subseteq B \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A\cup B')\cup B\subseteq \underbrace{(A\cap B)\cup B}_{\text{جذب}} \Rightarrow A\cup\underbrace{(B'\cup B)}_{U}\subseteq B \Rightarrow \left.\begin{matrix} U\subseteq B \\ \text{از طرفی: } B\subseteq U \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = U$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۱، درس ۱)

نکته: برای دو گزارهٔ p و q داریم:

قوانین دمورگان: $\begin{cases}\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q\\ \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q\end{cases}$

نکته: برای دو گزارهٔ p و q همواره داریم: $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

نکته: خاصیت شرکت‌پذیری:

$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$ $\quad$ $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

نکته: خاصیت توزیع‌پذیری (پخشی):

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ $\quad$ $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

نکته: برای گزارهٔ دلخواه p، داریم:

الف) $p\wedge\sim p\equiv F$ $\quad$ ب) $p\vee\sim p\equiv T$ $\quad$ پ) $p\vee T\equiv T$

ت) $p\wedge T\equiv P$ $\quad$ ث) $p\vee F\equiv P$ $\quad$ ج) $p\wedge F\equiv F$

نکته: برای دو گزارهٔ دلخواه p و q داریم:

قوانین جذب: $\begin{cases}p\vee(p\wedge q)\equiv p\\ p\wedge(p\vee q)\equiv p\end{cases}$

نکته: برای دو گزارهٔ p و q داریم:

$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

گزارهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\sim p\Leftrightarrow q\equiv(\sim p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow\sim p)\equiv(p\vee q)\wedge(\sim q\vee\sim p)\equiv[(p\vee q)\wedge\sim q]\vee[(p\vee q)\wedge\sim p]$$
$$\equiv[(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim q)]\vee[(p\wedge\sim p)\vee(q\wedge\sim p)]\equiv[(p\wedge\sim q)\vee F]\vee[F\vee(q\wedge\sim p)]\equiv(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)$$

حال گزینه‌ها را ساده می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $(\sim p\wedge q)\wedge(\sim p\vee q)\equiv\sim p\wedge\underbrace{[q\wedge(\sim p\vee q)]}_{\text{جذب}}\equiv\sim p\wedge q$

گزینهٔ ۲: $\sim[\sim(\sim p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)]\equiv\sim[(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)]\equiv(\sim p\vee q)\wedge(p\vee\sim q)$

گزینهٔ ۳: $(\sim p\vee q)\vee(\sim p\wedge q)\equiv\sim p\vee\underbrace{[q\vee(\sim p\wedge q)]}_{\text{جذب}}\equiv\sim p\vee q$

گزینهٔ ۴: $\sim[\sim(\sim p\wedge q)\wedge(\sim p\vee q)]\equiv\sim[(p\vee\sim q)\wedge(\sim p\vee q)]\equiv(\sim p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)\equiv(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: به‌طورکلی در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، این روابط برقرار است.

$$S=-\frac{b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

نکته (اتحاد مکعب دوجمله‌ای): $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ابتدا با توجه به رابطهٔ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها، داریم:

$$x^2-5x+2=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=5\ \ (1)\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=2\ \ (2)\end{cases}$$

صورت و مخرج عبارت خواسته شده را در β ضرب می‌کنیم:

$$A=\frac{4\alpha+\beta^5}{5\beta^2}\Rightarrow A=\frac{4\alpha\beta+\beta^6}{5\beta^3}\xrightarrow{\alpha\beta=2}A=\frac{8+\beta^6}{5\beta^3}\Rightarrow A=\frac{1}{5}\left(\frac{8}{\beta^3}+\beta^3\right)\ \ (*)$$

با توجه به رابطهٔ (۲)، می‌دانیم:

$$\alpha\beta=2\Rightarrow\alpha=\frac{2}{\beta}\Rightarrow\alpha^3=\frac{8}{\beta^3}$$

با جای‌گذاری $\alpha^3=\frac{8}{\beta^3}$ در رابطهٔ (*) داریم:

$$A=\frac{1}{5}(\alpha^3+\beta^3)=\frac{1}{5}\left[\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}^3-3\underbrace{\alpha\beta}_{P}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}\right]=\frac{1}{5}\left[5^3-3(2)(5)\right]=\frac{1}{5}\times95=19$$

۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۱ (فصل ۱، درس ۵)

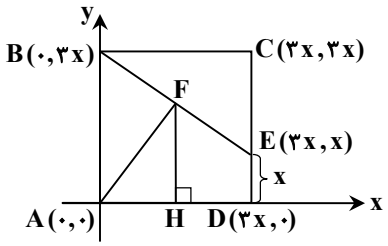
نکته: به‌طورکلی، اگر در صفحهٔ مختصات دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

نکته: اگر A و B دو نقطه در صفحهٔ مختصات و M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطهٔ M برابر است با:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

فرض می‌کنیم نقطهٔ A روی مبدأ مختصات باشد، فرض می‌کنیم طول نقطهٔ D برابر $3x$ باشد. با توجه به اطلاعات مسأله داریم:



$$\begin{cases}D(3x,0),B(0,3x),C(3x,3x)\\ CD=3ED \Rightarrow E(3x,x)\end{cases}$$

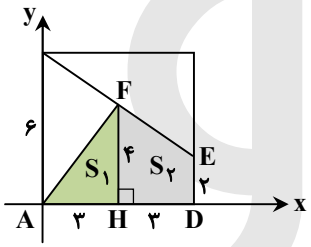
نقطهٔ F وسط BE است؛ بنابراین مختصات آن به‌صورت زیر است:

$$F\left(\frac{x_B+x_E}{2},\frac{y_B+y_E}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}x,2x\right)$$

از طرفی طول AF برابر ۵ است؛ بنابراین:

$$AF=5 \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{4}x^2+4x^2}=5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{25x^2}{4}=25 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow |x|=2 \xrightarrow{x>0} x=2 \Rightarrow F(3,4)$$

پس مساحت شکل خواسته شده برابر است با:



$$S_{ADEF}=S_1+S_2=\frac{3\times4}{2}+\frac{(2+4)\times3}{2}=6+9=15$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضی ۱ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: در سهمی $y=ax^2+bx+c$، عرض رأس سهمی برابر $y_S=\frac{-\Delta}{4a}$ می‌باشد، که در آن $\Delta=b^2-4ac$.

طبق فرض سؤال بیشترین مقدار f برابر ۱ است، پس کمترین مقدار مخرج برابر ۵ است:

$$f(x)=\frac{5}{\sqrt{mx^2-8x+39}} \xrightarrow{\max(f)=1} \frac{5}{\sqrt{\underbrace{mx^2-8x+39}_{25}}}=1$$

اکنون، m را طوری به‌دست می‌آوریم که کمترین مقدار سهمی برابر ۲۵ باشد، یعنی عرض رأس سهمی (y_S) برابر ۲۵ باشد؛

$$y=mx^2-8x+39 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}=25 \Rightarrow -\frac{64-4(m)(39)}{4m}=25 \Rightarrow -\frac{16-39m}{m}=25 \Rightarrow -16+39m=25m$$

$$\Rightarrow 14m=16 \Rightarrow m=\frac{8}{7} \Rightarrow [m]=1$$

دقت کنید به‌ازای $m=\frac{8}{7}$، سهمی $y=\frac{8}{7}x^2-8x+39$ دارای کمترین مقدار است؛ زیرا ضریب x^2 مثبت است.

راه‌حل دوم:

صورت تابع f، عدد ثابت ۵ است، پس برای اینکه تابع بیشترین مقدار ممکن باشد، باید مخرج کمترین مقدار ممکن شود، پس ابتدا نقـاط (نقطـه) بحرانی مخرج را پیدا می‌کنیم یعنی مشتق مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(mx^2-8x+39)'=0 \Rightarrow 2mx-8=0 \Rightarrow x=\frac{4}{m}$$

با توجه به اینکه ماکزیمم تابع f برابر ۱ است، داریم:

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=1 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{m\left(\frac{16}{m^2}\right)-8\left(\frac{4}{m}\right)+39}} \Rightarrow \frac{16}{m}-\frac{32}{m}+39=25 \Rightarrow \frac{16}{m}=4 \Rightarrow m=\frac{16}{14} \Rightarrow m=\frac{8}{7} \Rightarrow [m]=1$$

۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: بزرگ‌ترین عامل مشترک دو چندجمله‌ای (ب.م.م)، عبارتی است که شامل تمامی عامل‌های مشترک دو چندجمله‌ای باشد.

ابتدا عبارت‌های جبری $p(x)$ و $q(x)$ را تجزیه می‌کنیم:

$$p(x) = x^5 + ax^3 = x^3(x^2 + a)$$

$$q(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 + 3x + 2) = x^2(x+1)(x+2)$$

ب.م.م. $p(x)$ و $q(x)$: $x^n + x^3$

$q(x)$ عامل x^2 و $p(x)$ عامل x^3 دارد، پس در ب.م.م $p(x)$ و $q(x)$ عامل x^2 وجود دارد؛ بنابراین $n = 2$:

$$n = 2 \Rightarrow x^2 + x^3 = x^2(1 + x)$$

با قرار دادن $n = 2$ متوجه می‌شویم که در ب.م.م عامل $x+1$ هم وجود دارد.

پس $p(x)$ هم عامل $x+1$ دارد؛ بنابراین $p(-1)$ برابر صفر است:

$$p(-1) = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین خواستهٔ مسأله برابر $na = -2$ است.

۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۴)

نکته: اگر f و g دو تابع باشند، ترکیب g با f را با gof نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ به‌شرط آن‌که مقادیر f در دامنهٔ g قرار داشته باشند:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

راه‌حل اول:

ابتدا داریم:

$$fof(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0$$

پس ابتدا معادلهٔ $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \xrightarrow{0 \le x \le 2} x = 1 \ \checkmark \\ x + 1 = 0 \xrightarrow{-2 \le x < 0} x = -1 \ \checkmark \end{cases} \Rightarrow f(1) = f(-1) = 0$$

اکنون معادلهٔ $f(x) = 1$ و $f(x) = -1$ را حل می‌کنیم:

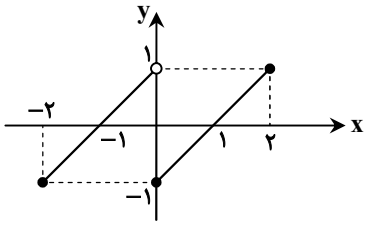
$$f(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 1 \xrightarrow{0 \le x \le 2} x = 2 \ \checkmark \\ x + 1 = 1 \xrightarrow{-2 \le x < 0} x = 0 \ \times \end{cases}$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \xrightarrow{0 \le x \le 2} x = 0 \ \checkmark \\ x + 1 = -1 \xrightarrow{-2 \le x < 0} x = -2 \ \checkmark \end{cases}$$

پس معادلهٔ $fof(x) = 0$ سه ریشهٔ حقیقی دارد.

راه‌حل دوم:

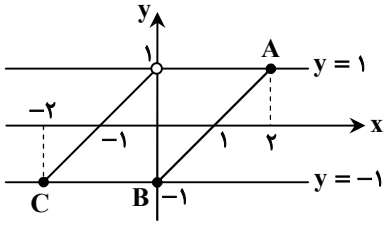
نمودار f را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} fof(x) = f(f(x)) = 0 \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \pm 1$$

می‌خواهیم معادلهٔ $fof(x) = 0$ را حل کنیم. با توجه به اینکه $f(-1) = 0$ و $f(1) = 0$؛ پس باید معادله‌های $f(x) = 1$ و $f(x) = -1$ را حل کنیم.

واضح است خط $y = 1$ نمودار f را در $x = 2$ و خط $y = -1$ نمودار f را در $x = -2$ و $x = 0$ قطع می‌کند، پس معادله سه جواب دارد.

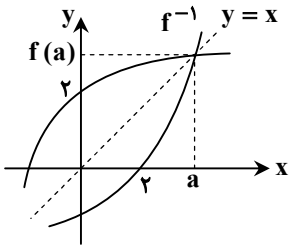


۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: اگر f یک تابع یک‌به‌یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به‌دست آوریم.

اگر f اکیداً صعودی باشد، مطابق شکل، محل برخورد f روی خط $y=x$ است؛ بنابراین $f(a)=a$.

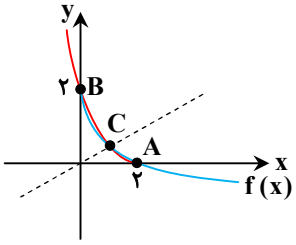
پس حاصل حد خواسته شده برابر است با:



$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}=\frac{f(a)}{a}=\frac{a}{a}=1$$

توجه کنید این سؤال کنکور ایراد علمی دارد؛ زیرا اگر f اکیداً صعودی نباشد، حاصل حد موردنظر ممکن است برابر یک نشود.

به‌عنوان مثال به تابع $f(x)=2-\sqrt{2x}$ و وارونش دقت کنید:



$$f(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow\begin{cases}A(2,0)\Rightarrow a=2, f(a)=0\\ B(0,2)\Rightarrow a=0, f(a)=2\\ C(a,a)\end{cases}$$

پس حاصل $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x}$، فقط در نقطهٔ C برابر یک است و در دو نقطهٔ دیگر برابر یک نمی‌باشد.

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (فصل ۳، درس ۲)

نکته: دترمینان ماتریس ۲ در ۲ برابر است با:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

نکته: قانون ضرب لگاریتم:

$$\log_c ab=\log_c a+\log_c b$$

نکته: قانون توان لگاریتم:

$$\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$$

ابتدا حاصل سمت راست معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{vmatrix}=(\log 5)^2-(\log 2)^2=(\log 5+\log 2)(\log 5-\log 2)=\underbrace{(\log 10)}_{1}(\log\frac{5}{2})=\log\frac{5}{2}$$

اکنون معادله داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\log(3x+1)=\log\frac{5}{2}\Rightarrow 3x+1=\frac{5}{2}\Rightarrow 3x=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

پس خواستهٔ مسأله برابر است با:

$$\log_{\sqrt{2}} x=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\log_{\frac{1}{2^2}} 2^{-1}=\frac{-1}{\frac{1}{2}}\log_2 2=-2$$

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۴، درس ۴)

نکته (نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان):

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

با توجه به مفروضات مسأله، داریم:

$$\begin{cases}1)\ \frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}>0\Rightarrow\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin\alpha}>0\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}>0\xrightarrow{\sin^2\alpha>0}\cos\alpha>0\\ 2)\ 2\sin\alpha<\sin 2\alpha\Rightarrow 2\sin\alpha<2\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha>0\Rightarrow\sin\alpha\underbrace{(\cos\alpha-1)}_{<0}>0\Rightarrow\sin\alpha<0\end{cases}$$

(دقت کنید: $-1\le\cos\alpha\le 1\Rightarrow -2\le\cos\alpha-1\le 0$)

پس $\cos\alpha>0$ و $\sin\alpha<0$ و در نتیجه α در ناحیهٔ چهارم است.

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکته (نسبت‌های مثلثاتی مکمل زاویه):

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

نکته: اگر تفاضل زوایا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان باشد، آنگاه داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta$$

نکته: به‌طور خلاصه، ضرایب زوج π (یعنی $۲k\pi$) در نسبت‌های مثلثاتی تأثیری ندارد.

$$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$

نکته: رابطهٔ تانژانت تفاضل زوایا:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

ابتدا زاویه‌های داده‌شده را برحسب زاویهٔ ۱۵° می‌نویسیم:

$$\sin(-۲۸۵^\circ)=-\sin(۲۸۵^\circ)=-\sin(\underbrace{۲۷۰^\circ+۱۵^\circ}_{\text{ربع چهارم}})=\cos۱۵^\circ$$

$$\cos(-۱۰۵^\circ)=\cos(۱۰۵^\circ)=\cos(\underbrace{۹۰^\circ+۱۵^\circ}_{\text{ربع دوم}})=-\sin۱۵^\circ$$

$$\sin(۱۶۵^\circ)=\sin(\underbrace{۱۸۰^\circ-۱۵^\circ}_{\text{ربع دوم}})=\sin۱۵^\circ$$

$$\sin(۳۷۵^\circ)=\sin(\underbrace{۳۶۰^\circ+۱۵^\circ}_{\text{ربع اول}})=\sin۱۵^\circ$$

بنابراین:

$$\frac{\sin(-۲۸۵^\circ)+۲\cos(-۱۰۵^\circ)}{۲\sin(۱۶۵^\circ)+۳\sin(۳۷۵^\circ)}=\frac{\cos۱۵^\circ-۲\sin۱۵^\circ}{۲\sin۱۵^\circ+۳\sin۱۵^\circ}=\frac{\cos۱۵^\circ-۲\sin۱۵^\circ}{۵\sin۱۵^\circ}=\frac{۱}{۵}\cot۱۵^\circ-\frac{۲}{۵}$$

اکنون $\tan۱۵^\circ$ را به‌دست می‌آوریم و آن را معکوس می‌کنیم تا $\cot۱۵^\circ$ به‌دست آید؛

$$\tan(۱۵^\circ)=\tan(۶۰^\circ-۴۵^\circ)\Rightarrow\tan۱۵^\circ=\frac{\tan۶۰^\circ-\tan۴۵^\circ}{۱+\tan۶۰^\circ\tan۴۵^\circ}\Rightarrow\tan۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۱+\sqrt{۳}}\Rightarrow\cot۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-۱}$$

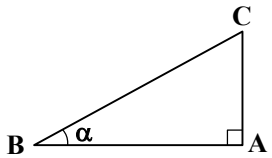
$$\Rightarrow\cot۱۵^\circ=\frac{(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}+۱)}{(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}\Rightarrow\cot۱۵^\circ=\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۳-۱}\Rightarrow\cot۱۵^\circ=۲+\sqrt{۳}$$

پس حاصل کسر موردنظر برابر است با:

$$\frac{۱}{۵}\cot۱۵^\circ-\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۵}(۲+\sqrt{۳})-\frac{۲}{۵}=\frac{\sqrt{۳}}{۵}=۰/۲\sqrt{۳}$$

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۲، درس ۲)

نکته: مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زوایای حادهٔ آن α باشد را در نظر بگیرید. نسبت مثلثاتی سینوس و تانژانت زاویهٔ α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



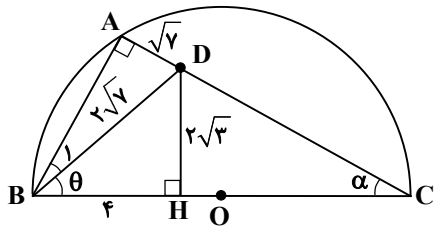
$$\text{سینوس}:\sin\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\text{تانژانت}:\tan\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

نکته: رابطهٔ تانژانت تفاضل زوایا:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

با توجه به شکل، زاویهٔ A، زاویهٔ محاطی روبه قطر است، پس $\hat{A}=۹۰^\circ$؛ بنابراین:



$$\text{در مثلث } \overset{\triangle}{ABD}:\sin\hat{B}_۱=\frac{\sqrt{۷}}{۲\sqrt{۷}}\Rightarrow\sin\hat{B}_۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{B}_۱=۳۰^\circ$$

$$\text{در مثلث } \overset{\triangle}{BDH}:BD^۲=BH^۲+DH^۲\Rightarrow۲۸=۱۶+DH^۲\Rightarrow DH=۲\sqrt{۳}$$

در مثلث $\overset{\triangle}{BDH}$، نسبت $\tan\theta$ را می‌نویسیم:

$$\tan\theta=\frac{DH}{BH}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\quad(۱)$$

از طرفی در مثلث ABC، داریم:

$$\hat{A}=۹۰ \Rightarrow \hat{B}_۱+\theta+\alpha=۹۰ \xrightarrow{\hat{B}_۱=۳۰^\circ} \theta+\alpha=۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=۶۰^\circ-\theta \Rightarrow \tan\alpha=\tan(۶۰^\circ-\theta)$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{\tan۶۰^\circ-\tan\theta}{۱+\tan۶۰^\circ\tan\theta} \xrightarrow{(۱)} \tan\alpha=\frac{\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۵} \Rightarrow \tan\alpha=۰/۲\sqrt{۳}$$

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۴)

نکته: برای رفع ابهام حالت $\frac{۰}{۰}$ رادیکالی، ابتدا مزدوج رادیکال را در آن ضرب می‌کنیم، سپس با تبدیل به چندجمله‌ای، آن را تجزیه می‌کنیم.

راه‌حل اول:

حد مخرج در $x=۰$ برابر صفر است و جواب حد عدد حقیقی است، پس حد صورت نیز در $x=۰$ برابر صفر است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to۰}(k+\cos\sqrt{a}x)=۰ \Rightarrow k+۱=۰ \Rightarrow k=-۱$$

اکنون حد داده‌شده را با قرار دادن $k=-۱$ بازنویسی می‌کنیم و حاصل حد را برحسب a به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{\cos\sqrt{a}x-۱}{-x^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{(\cos\sqrt{a}x-۱)(\cos\sqrt{a}x+۱)}{-x^۲(\cos\sqrt{a}x+۱)}=\lim_{x\to۰}(\frac{\cos^۲\sqrt{a}x-۱}{-x^۲})\times\lim_{x\to۰}\frac{۱}{\cos\sqrt{a}x+۱}$$

$$=\lim_{x\to۰}(\frac{-\sin^۲\sqrt{a}x}{-x^۲})\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to۰}\frac{(\frac{\sin\sqrt{a}x}{\sqrt{a}x}\times\sqrt{a}x)^۲}{x^۲}=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to۰}\frac{ax^۲}{x^۲}=\frac{۱}{۲}a$$

حاصل این حد برابر ۳ است؛ بنابراین:

$$\frac{۱}{۲}a=۳ \Rightarrow a=۶$$

با توجه به اینکه $a=۶$ و $k=-۱$، پس $\frac{a}{k}=-۶$.

راه‌حل دوم:

می‌توان نشان داد که وقتی عبارت u به‌سمت صفر میل کند، هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$(۱-\cos^n u)\sim\frac{nu^۲}{۲}$$

با استفاده از هم‌ارزی فوق و اینکه $k=-۱$، مقدار حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{\cos\sqrt{a}x-۱}{-x^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{-\frac{(\sqrt{a}x)^۲}{۲}}{-x^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{\frac{ax^۲}{۲}}{x^۲}=\frac{a}{۲}$$

حاصل حد برابر ۳ است، بنابراین $a=۶$، پس $\frac{a}{k}=-۶$.

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

نکته (تعریف): خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty$$

نکته: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار $y=f(x)$ می‌نامیم به شرطی که حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$ برقرار باشد.

نکته: اگر $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a$ و $g(x)=b_mx^m+b_{m-۱}x^{m-۱}+\cdots+b_۱x+b$، آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$$

خط $y=-۴$ مجانب افقی تابع f است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=-۴ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{a^۲x^۲-۲x+۱}{(x+a)(mx-۲)}=-۴ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{a^۲x^۲}{mx^۲}=-۴ \Rightarrow \frac{a^۲}{m}=-۴ \Rightarrow a^۲=-۴m \quad (۱)$$

همچنین خط $x=-a$ مجانب قائم تابع f است و علامت تابع در اطراف $x=-a$، تغییر نکرده است؛ پس $x=-a$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است. یعنی $x=-a$ هر دو پرانتز را در مخرج صفر می‌کند:

$$\underbrace{(x+a)}_{x=-a}\underbrace{(mx-2)}_{x=-a}=0 \Rightarrow -ma-2=0 \Rightarrow ma=-2 \Rightarrow m=-\frac{2}{a} \quad (2)$$

بنابراین با توجه به (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$a^2=\frac{8}{a} \Rightarrow a^3=8 \Rightarrow a=2$$

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۳، درس ۲)

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$، آنگاه اگر $L>0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

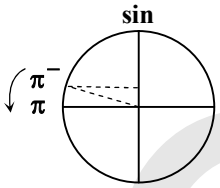
ابتدا مقدار براکت را در مخرج مشخص می‌کنیم:

$$x\to\pi^- \xrightarrow[x-\pi<0]{x<\pi} [x-\pi]=[0^-]=-1$$

اکنون داریم:

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cot x}{[x-\pi]}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-1}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{-\sin x}=\frac{-1}{-(0^+)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

دقت کنید وقتی $x\to\pi^-$، زاویه x در ربع دوم قرار دارد و مقادیر $\sin x$ با مقادیر بیشتر از صفر به آن نزدیک می‌شوند:



۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (فصل ۵، درس ۵)

نکته: برای رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$ چندجمله‌ای کافی است از راه تجزیه اقدام کنیم.

نکته (پیوستگی در نقطه): تابع f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته است، هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

دامنهٔ تابع f مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{a\}$ است، پس a ریشهٔ مخرج تابع است. اما از آنجاکه حد تابع f در a موجود است، پس $x=a$ ریشهٔ صورت $f(x)$ نیز می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\text{صورت}: |ax+a|=0 \xrightarrow{x=a} |a^2+a|=0 \Rightarrow a^2+a=0 \Rightarrow a(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases} \text{غ ق ق (اگر } a=0 \text{ باشد، } f(x)=\frac{0}{0} \text{ است)}$$

چون $x=a$ ریشهٔ مخرج است و $a=-1$، پس $x=-1$ ریشهٔ مخرج است:

$$\text{مخرج}: |x^3+(m-2)x+a^2|=0 \xrightarrow[a=-1]{x=-1} |-1+(m-2)(-1)+1|=0 \Rightarrow |-m+2|=0 \Rightarrow m=2$$

اکنون با توجه به اینکه $a=-1$ و $m=2$، حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3}|-x-1|}{|x^3+1|}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1||x^2-x+1|}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: اگر r یک عدد حقیقی باشد و $f(x)=x^r$، آنگاه $f'(x)=rx^{r-1}$.

نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع $f\pm g$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم: $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

توجه کنید مقدار خواسته شده برابر است با: $f'(1)-2g'(1)=(f-2g)'(1)$

پس ابتدا تابع $f-2g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(f-2g)(x)=\frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}-2\times\frac{\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2|x-2|}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2|x-2|+2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{-2\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}=-2\sqrt{3}x^{-\frac{1}{6}}$$

دقت کنید:

$$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$$

اکنون از تابع فوق مشتق می‌گیریم:

$$(f-2g)'=(-2\sqrt{3})(-\frac{1}{6})x^{-\frac{1}{6}-1}=\frac{\sqrt{3}}{3}x^{-\frac{7}{6}}$$

در نتیجه خواستهٔ سؤال برابر با:

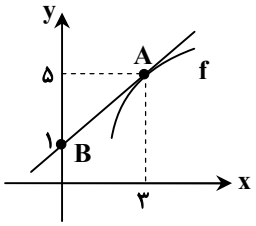
$$(f-2g)'(1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: مقدار مشتق تابع در a برابر با شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ای به‌طول a است.

می‌دانیم مشتق در نقطهٔ تماس با شیب خط مماس برابر است، پس شیب خط داده‌شده همان $f'(۳)$ است.

بنابراین با توجه به نمودار، شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} A(۳,۵) \\ B(۰,۱) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب خط مماس } m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۵-۱}{۳-۰} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow f'(۳) = \frac{۴}{۳}$$

۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (فصل ۴، درس ۲)

نکته: اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

نکته (پیوستگی در نقطه): تابع f در نقطهٔ $x = a$ پیوسته است، هرگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس در $x = a$ نیز مشتق‌پذیر است. یعنی تابع در $x = a$ پیوسته است و مشتق راست و چپ برابر دارد؛ بنابراین:

$$f(x) = \begin{cases} ۲bx + c & x > a \\ ۳x^۲ & x \le a \end{cases}$$

شرط پیوستگی در $x = a$: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) \Rightarrow ۲ba + c = ۳a^۲$ (۱)

$$f'(x) = \begin{cases} ۲b & x > a \\ ۶x & x \le a \end{cases} \xrightarrow[\text{چپ و راست}]{\text{برابری مشتق}} f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow ۲b = ۶a \Rightarrow b = ۳a \quad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$(۱): ۲ba + c = ۳a^۲ \xrightarrow{b=۳a} ۶a^۲ + c = ۳a^۲ \Rightarrow c = -۳a^۲ \quad (۳)$$

با استفاده از نتایج (۱) و (۲)، خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$a^۳ + b - c = a^۳ + ۳a + ۳a^۲ = a^۳ + ۳a^۲ + ۳a + ۱ - ۱ = (a+۱)^۳ - ۱$$

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * حسابان ۲ (فصل ۵، درس ۱)

نکته: برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار ماکزیمم مطلق تابع است.

ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق $x = a$ است و چون سؤال ماکزیمم مطلق تابع را در بازهٔ $[۰,a]$ می‌خواهد، پس $۰ \le x \le a$ و در نتیجه $|x-a| = a - x$. اکنون مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}(a-x)$$

$$f'(x) = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}(a-x) + (-۱)\sqrt[۳]{x^۲} = \frac{۲(a-x) - ۳\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{x^۲})}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۲a - ۵x}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

اکنون نقاط بحرانی تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲a - ۵x = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲}{۵}a \ \checkmark \\ \sqrt[۳]{x} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow f' \text{ موجود نیست} \end{cases}$$

نقطهٔ $x = \frac{۲}{۵}a$ در بازهٔ $[۰,a]$ قرار دارد. حال مقدار ماکزیمم مطلق را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}(a-x) \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = ۰ \\ f(a) = ۰ \\ f(\frac{۲}{۵}a) = \sqrt[۳]{\frac{۴}{۲۵}a^۲}(\frac{۳}{۵}a) \end{cases}$$

مقدار ماکزیمم تابع همان $f(\frac{۲}{۵}a)$ است که طبق فرض سؤال برابر ۱/۵ می‌باشد؛ بنابراین:

$$\sqrt[۳]{\frac{۴}{۲۵}a^۲} \times \frac{۳}{۵}a = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۳}} \frac{۴a^۲}{۲۵} \times \frac{a^۳}{۱۲۵} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow ۲^۵ \times a^۵ = ۵^۵ \Rightarrow (۲a)^۵ = ۵^۵ \Rightarrow ۲a = ۵ \Rightarrow a = ۲/۵$$

۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (فصل ۳، درس ۳)

نکته (انحراف معیار داده‌ها): اگر n داده از جامعه به‌صورت $x_1, x_2, \cdots, x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آن‌ها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

که در آن $x_i - \bar{x}$، را انحراف داده i ام از میانگین داده‌ها می‌گویند.

نکته (واریانس داده‌ها): توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

می‌دانیم اگر به تمام داده‌ها عدد ثابتی را اضافه کنیم تا از تمام داده‌ها عدد ثابتی را کم کنیم، واریانس داده‌ها تغییری نمی‌کند. ازآنجایی‌که انحراف ۵ دادهٔ آماری از y یعنی $x_i - y$ ها برابر ۱-، ۵-، ۶-، ۷- و ۴ می‌باشد، پس واریانس داده‌های اصلی با واریانس داده‌های ۱-، ۵-، ۶-، ۷- و ۴ برابر است. پس داریم:

$$\bar{x} = \frac{-1-5-6-7+4}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\sigma^2 = \frac{(-1+3)^2 + (-5+3)^2 + (-6+3)^2 + (-7+3)^2 + (4+3)^2}{5} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{4+4+9+16+49}{5} = \frac{82}{5} = 16/4$$

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (فصل ۲، درس‌های ۱ و ۴)

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

نکته: برای پیشامد دلخواه A داریم: $P(A') = 1 - P(A)$

نکته: پیشامدهای A و B را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند.

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، پیشامدهای «A و B'»، «A' و B» و «A' و B'» نیز مستقل‌اند.

از رابطهٔ $P(A-B) = P(A) \cdot P(B')$ داریم:

$$P(A-B) = P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$$

پس A و B' مستقل از هم هستند و در نتیجه A و B نیز مستقل از هم هستند و داریم:

$$P(A) = 1/6\,P(B) \xrightarrow{P(B)=x} P(A) = 1/6\,x$$

$$P(A' \cap B') = 0/25 \Rightarrow P(A \cup B)' = 0/25 \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = 0/25 \Rightarrow P(A \cup B) = 0/75$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/75 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0/75$$

$$\Rightarrow 1/6\,x + x - 1/6\,x^2 = 0/75 \Rightarrow 1/6\,x^2 - 2/6\,x + 0/75 = 0$$

$$\Delta = (-2/6)^2 - 4 \times 1/6 \times 0/75 = 6/76 - 4/8 = 1/96 \Rightarrow x = \frac{2/6 \pm 1/4}{2 \times 1/6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{1/6} \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{1/2}{3/2} = \frac{12}{32} \end{cases} \Rightarrow P(B) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{16}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{5}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$P(A \cup B') = P(A' \cap B)' = 1 - P(A' \cap B) = 1 - P(A') \cdot P(B) = 1 - (1 - \frac{3}{5}) \times \frac{3}{8} \Rightarrow P(A \cup B') = 1 - \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۱ (فصل ۴، درس ۲)

ابتدا تعداد کل مکعب‌ها را می‌یابیم:

$$\text{تعداد کل مکعب‌ها} = 3 \times 4 \times 4 = 48$$

برای یافتن تعداد حداکثر مکعب‌هایی که باید حذف کنیم، فقط مکعب‌های نمای بالا را نگه‌داشته و مابقی را حذف می‌کنیم.

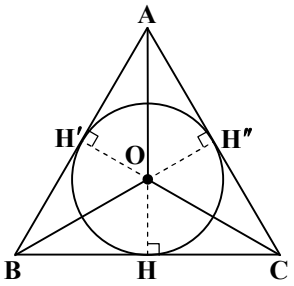
$$\text{جواب} = 48 - 10 = 38$$

۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۳)

نکته: سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث همرس‌اند. این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

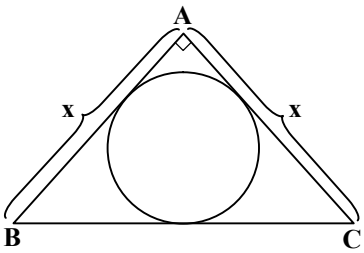
پس مرکز دایرهٔ محاطی مثلث نقطهٔ همرسی سه نیمساز است و شعاع این دایره کـه آن را بـا r نشان می‌دهیم فاصلهٔ این نقطه از هر یک از سه ضلع است.

در مثلث رابطهٔ $S = Pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است، برقرار است.



$$OH = OH' = OH'' = r$$

طبق شکل مقابل، با فرض $AB = AC = x$ داریم:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow BC = x\sqrt{2}$$

$$\text{محیط } ABC = 2p = x + x + x\sqrt{2} = 2x + x\sqrt{2} \Rightarrow p = \frac{x}{2}(2+\sqrt{2})$$

$$\text{مساحت } ABC = S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}x^2$$

با استفاده از فرمول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، داریم:

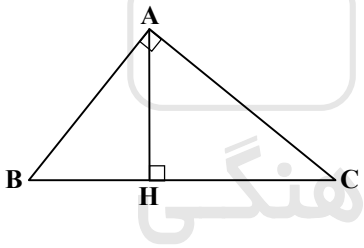
$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x}{2}(2+\sqrt{2})} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{2} + 2 = 2(\sqrt{2}+1)$$

برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌ها، باید دهانهٔ پرگار را حداقل بیشتر از $\frac{1}{2}x$ باز کنیم، پس:

$$\text{جواب}: \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \times 2(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}+1$$

۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳ و فصل ۳، درس ۱)

نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با انـدازه‌هـای اضـلاع سـروکار دارند:



۱) $AB^2 = BC \cdot BH$

۲) $AC^2 = BC \cdot CH$

۳) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

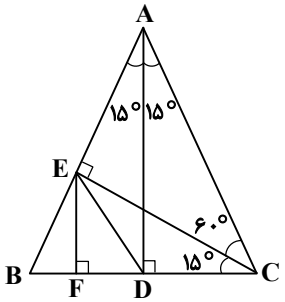
۴) $AH^2 = BH \cdot CH$

۵) $AH \times BC = AB \times AC$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه 30° باشد، ضلع مقابل به آن، نصف وتر است و برعکس.

نکته: اگر در مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه 15° باشد، اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ اندازهٔ وتر است.

مثلث ABC متساوی‌الساقین است، داریم:



$$AB = AC \ , \ AB = 2CE \Rightarrow AC = 2CE \Rightarrow CE = \frac{1}{2}AC$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACE، ضلع CE، نصف وتر AC است، پس زاویهٔ مقابل ضلع CE، برابـر 30° است $C\hat{A}E = 30^\circ$. از طرفی در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بـر قاعـده، میانـه و نیمسـاز زاویهٔ رأس نیز می‌باشد، پس:

$$B\hat{A}D = D\hat{A}C = 15$$

$$\overset{\triangle}{ACE}: A\hat{C}E = 60^\circ \ , \ \overset{\triangle}{ACD}: A\hat{C}D = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ \Rightarrow E\hat{C}B = 15^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است، پس:

$$\overset{\triangle}{BCE}: DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow 2\sqrt{3} + 4 = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 4\sqrt{3} + 8 \Rightarrow BD = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BD = \frac{1}{2}(4\sqrt{3}+8) = 2\sqrt{3} + 4$$

در مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ ۱۵° ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر است، پس:

$$\overset{\triangle}{BCE}: EF = \frac{۱}{۴}BC = \frac{۱}{۴}(۴\sqrt{۳}+۸) = \sqrt{۳}+۲$$

از روابط مثلث قائم‌الزاویه در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE استفاده می‌کنیم:

$$EF^۲ = BF \times FC \Rightarrow EF^۲ = BF(BC - BF) \Rightarrow (\sqrt{۳}+۲)^۲ = BF(۴\sqrt{۳}+۸-BF)$$

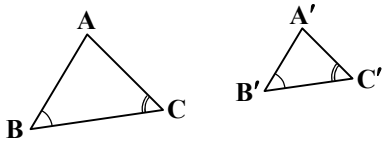
با فرض $BF = x$ داریم:

$$۳+۴+۴\sqrt{۳} = (۴\sqrt{۳}+۸)x - x^۲ \Rightarrow x^۲ - (۴\sqrt{۳}+۸)x + ۷ + ۴\sqrt{۳} = ۰$$

$$\text{مجموع ضرایب} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{c}{a} = ۷ + ۴\sqrt{۳} \end{cases}$$

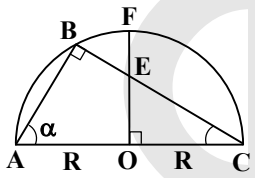
۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۱ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'})$$

با فرض اینکه شعاع دایره برابر R است، داریم:



$$\text{زاویهٔ محاطی رو به قطر}: \hat{B} = ۹۰^\circ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{BC}{۲R}$$

$$\Rightarrow BC = ۱/۶R \Rightarrow AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = (۲R)^۲ - (۱/۶R)^۲$$

$$AB^۲ = (۲R - ۱/۶R)(۲R + ۱/۶R) = ۰/۴R \times ۳/۶R = ۱/۴۴R^۲ \Rightarrow AB = ۱/۲R$$

مثلث‌های OCE و ABC متشابه هستند.

$$\left.\begin{matrix} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{O} = \hat{B} = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{OCE} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{OC}{BC} = \frac{OE}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

$$\frac{OC}{BC} = \frac{OE}{AB} \Rightarrow \frac{R}{۱/۶R} = \frac{OE}{۱/۲R} \Rightarrow OE = \frac{۱/۲}{۱/۶}R = \frac{۱۲}{۱۶}R = \frac{۳}{۴}R = ۰/۷۵R$$

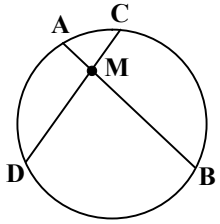
$$\frac{OC}{BC} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{R}{۱/۶R} = \frac{CE}{۲R} \Rightarrow CE = \frac{۲}{۱/۶}R = \frac{۲۰}{۱۶}R = \frac{۵}{۴}R = ۱/۲۵R$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

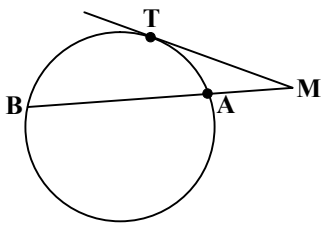
$$\frac{BE}{EF} = \frac{BC - CE}{OF - OE} = \frac{۱/۶R - ۱/۲۵R}{R - ۰/۷۵R} = \frac{۰/۳۵R}{۰/۲۵R} = \frac{۳۵}{۲۵} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع کنند. آنگاه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

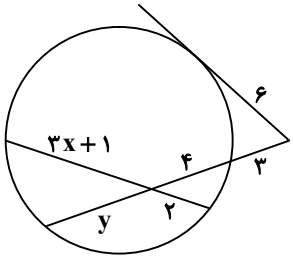


نکته: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع



$$MT^۲ = MA \cdot MB$$

طبق نکات بالا، داریم:



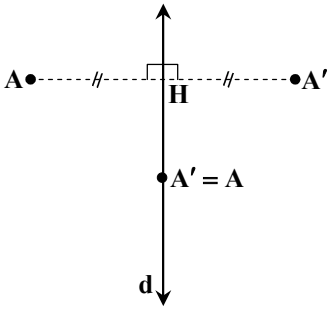
$$۶^۲ = ۳(۳+۴+y) \Rightarrow ۳۶ = ۳(۷+y) \Rightarrow ۱۲ = ۷+y \Rightarrow y = ۵$$
$$۴y = ۲(۳x+۱) \Rightarrow ۴\times۵ = ۲(۳x+۱) \Rightarrow ۳x+۱ = ۱۰ \Rightarrow x = ۳$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{x}{y} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (فصل ۲، درس ۱)

نکته: برای پیداکردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d، کافی است از نقطهٔ A به خط داده‌شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا A' به‌دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینهٔ A نسبت به خط d می‌نامیم و می‌نویسیم:



$$S(A) = A'$$

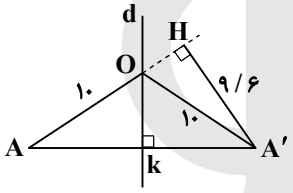
در چنین حالتی خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' خواهد بود.

خط d، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می‌شود.

اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود؛ به عبارتی A' همان A است.

با توجه به نکته و مفروضات سؤال، دو حالت وجود دارد:

الف) ارتفاع وارد بر OA از رأس A'، بر امتداد OA عمود است.

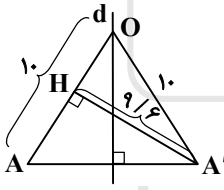


$$OA = OA' = ۱۰ \ , \ OH^۲ + A'H^۲ = OA'^۲ \Rightarrow OH^۲ + ۹/۶^۲ = ۱۰^۲$$
$$OH^۲ = ۱۰^۲ - ۹/۶^۲ = (۱۰-۹/۶)(۱۰+۹/۶) = ۰/۴\times۱۹/۶$$
$$\Rightarrow OH^۲ = \frac{۴\times۱۹۶}{۱۰۰} \Rightarrow OH = \frac{۲\times۱۴}{۱۰} = ۲/۸$$
$$\Rightarrow AH = OA + OH = ۱۰+۲/۸ \Rightarrow AH = ۱۲/۸$$

در مثلث AHA' داریم:

$$\overset{\triangle}{AHA'} : AA'^۲ = AH^۲ + A'H^۲ = (۱۲/۸)^۲ + (۹/۶)^۲ = ۱۶۳/۸۴ + ۹۲/۱۶ = ۲۵۶ \Rightarrow AA' = ۱۶$$

ب) ارتفاع وارد بر OA از رأس A'، بر OA عمود است.



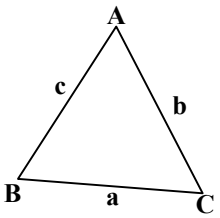
$$OH^۲ + A'H^۲ = OA'^۲ \Rightarrow OH^۲ + ۹/۶^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow OH = ۲/۸ \Rightarrow AH = ۱۰-۲/۸$$
$$\Rightarrow AH = ۷/۲$$
$$AHA' : AA'^۲ = AH^۲ + A'H^۲ = ۷/۲^۲ + ۹/۶^۲ = ۵۱/۸۴ + ۹۲/۱۶ = ۱۴۴$$
$$\Rightarrow AA' = ۱۲$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$۱۶ + ۱۲ = ۲۸$$

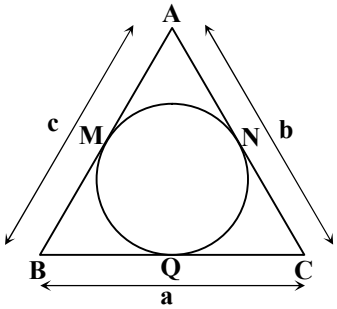
۳۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (فصل ۱، درس ۳ و فصل ۳، درس ۲)

نکته (قضیهٔ کسینوس‌ها): در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها:



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cdot\cos\hat{A} \ , \ b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cdot\cos\hat{B} \ , \ c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cdot\cos\hat{C}$$

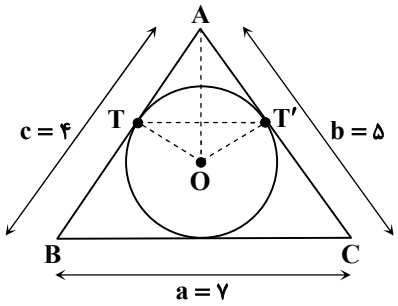
نکته: در مثلث ABC اگر دایرهٔ محاطی داخلی را رسم کنیم، داریم:



$$AM = AN = P - a$$
$$BM = BQ = P - b$$
$$CN = CQ = P - c$$

P : نصف محیط

ابتدا در مثلث ABC با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها، کسینوس زاویهٔ A را محاسبه می‌کنیم.



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow ۷^۲ = ۵^۲ + ۴^۲ - ۲\times۴\times۵\cos\hat{A} \Rightarrow ۴۹ = ۲۵ + ۱۶ - ۴۰\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow ۴۰\cos\hat{A} = ۴۱ - ۴۹ = -۸ \Rightarrow \cos\hat{A} = -\frac{۸}{۴۰} \Rightarrow \cos\hat{A} = -\frac{۱}{۵}$$

حال با محاسبهٔ AT و AT′ داریم:

$$AT = AT' = p - a = \frac{۴+۵+۷}{۲} - ۷ = ۸ - ۷ = ۱$$

$$\overset{\triangle}{ATT'}: TT'^۲ = AT^۲ + AT'^۲ - ۲AT\cdot AT'\cos\hat{A} \Rightarrow TT'^۲ = ۱ + ۱ - ۲\times۱\times۱\times(-\frac{۱}{۵})$$

$$\Rightarrow TT'^۲ = ۲ + \frac{۲}{۵} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow TT' = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۱۵}}{۵} = ۰/۴\sqrt{۱۵}$$

۳۲- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۳، درس ۲)

نکته: اگر زاویهٔ بین دو بردار غیر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر α باشد، داریم:

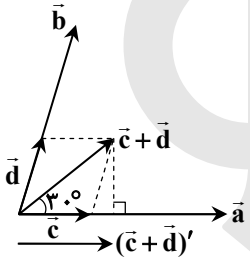
$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲ + ۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲ - ۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

فرض می‌کنیم $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $\vec{d} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$، اندازهٔ بردارهای $\vec{c}$ و $\vec{d}$ برابر یک واحد است، زیرا:

$$|\vec{c}| = \left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{۱}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}| = ۱$$

$$|\vec{d}| = \left|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right| = \frac{۱}{|\vec{b}|}\cdot|\vec{b}| = ۱$$



از طرفی بردار $\vec{c} = \frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$ هم‌جهت با بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{d} = \frac{۱}{|\vec{b}|}\vec{b}$ هم‌جهت با بردار $\vec{b}$ است. پس طبق شکل چون $|\vec{c}| = |\vec{d}| = ۱$، بردار $\vec{c}+\vec{d}$ در راستای نیمساز زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. حال اندازهٔ بردار $\vec{c}+\vec{d}$ را می‌یابیم.

$$|\vec{c}+\vec{d}|^۲ = |\vec{c}|^۲ + |\vec{d}|^۲ + ۲|\vec{c}||\vec{d}|\cos۶۰^\circ \Rightarrow |\vec{c}+\vec{d}|^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ + ۲\times۱\times۱\times\frac{۱}{۲} = ۳ \Rightarrow |\vec{c}+\vec{d}| = \sqrt{۳}$$

حال اندازهٔ تصویر قائم بردار $\vec{c}+\vec{d}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ را می‌یابیم.

$$\cos۳۰^\circ = \frac{|(\vec{c}+\vec{d})'|}{|\vec{c}+\vec{d}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{|(\vec{c}+\vec{d})'|}{\sqrt{۳}} \Rightarrow |(\vec{c}+\vec{d})'| = \frac{۳}{۲}$$

۳۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس ۲)

نکته: (دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳): در این روش که فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است. دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به‌صورت زیر:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

نکته: برای ماتریس مربعی A و عدد حقیقی k داریم:

$$|kA_{n\times n}| = k^n|A_{n\times n}| \quad \text{و} \quad |A^n| = |A|^n$$

ابتدا دترمینان ماتریس A را به روش ساروس می‌یابیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۱ & ۲ & ۲ \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (۱+۸+۸) - (۴+۴+۴) = ۱۷ - ۱۲ = ۵$$

حال از فرض $|A^۲ + kA - A| = ۱۲۵$ داریم:

$$|A(A+(k-۱)I)| = ۱۲۵ \Rightarrow |A||A+(k-۱)I| = ۱۲۵ \Rightarrow ۵|A+(k-۱)I| = ۱۲۵ \Rightarrow |A+(k-۱)I| = ۲۵$$

ماتریس $A+(k-۱)I$ را تشکیل می‌دهیم.

$$A+(k-۱)I = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k-۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & k-۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & k-۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & ۲ & ۲ \\ ۲ & k & ۲ \\ ۲ & ۲ & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+(k-۱)I| = \begin{vmatrix} k & ۲ & ۲ & k & ۲ \\ ۲ & k & ۲ & ۲ & k \\ ۲ & ۲ & k & ۲ & ۲ \end{vmatrix} \Rightarrow |A+(k-۱)I| = (k^۳ + ۸ + ۸) - (۴k + ۴k + ۴k)$$

$$\Rightarrow k^۳ + ۱۶ - ۱۲k = ۲۵ \Rightarrow k^۳ - ۱۲k - ۹ = ۰ \Rightarrow k = -۳$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$|(k+۱)I_۳| = (k+۱)^۳ |I_۳| = (-۳+۱)^۳ \times ۱ = -۸$$

۳۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۱، درس‌های ۱ و ۲)

نکته: عدد $(ad-bc)$ را دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می‌نامیم و با نماد $|A|$ (می‌خوانیم، دترمینان A) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ابتدا با توجه به $|A| = ۲$، داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ۲ \Rightarrow ad - bc = ۲$$

حال از $B^۲ = ۲I$، داریم:

$$B^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+ac & ۰ & a+ad \\ ۰ & ۲b^۲ & ۰ \\ c+cd & ۰ & ac+d^۲ \end{bmatrix}$$

$$B^۲ = ۲I \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱+ac & ۰ & a(۱+d) \\ ۰ & ۲b^۲ & ۰ \\ c(۱+d) & ۰ & ac+d^۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$۲b^۲ = ۲ \Rightarrow b^۲ = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱$$

$$۱+ac = ۲ \Rightarrow ac = ۱$$

$$ac + d^۲ = ۲ \Rightarrow ۱ + d^۲ = ۲ \Rightarrow d^۲ = ۱ \Rightarrow d = \pm ۱$$

اگر $d = ۱$ باشد، چون $a(۱+d) = ۰$، پس $۲a = ۰$ و $a = ۰$ که این غیرممکن است، چون $ac = ۱$، پس $d = -۱$ است و داریم:

$$ad - bc = ۲ \Rightarrow -a - bc = ۲$$

با توجه به $b = \pm ۱$، دو حالت داریم:

(حالت ۱) $b = ۱ \Rightarrow -a - c = ۲ \Rightarrow a = -۲ - c \xrightarrow{ac=۱} -۲c - c^۲ = ۱ \Rightarrow c^۲ + ۲c + ۱ = ۰$

$$\Rightarrow (c+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

(حالت ۲) $b = -۱ \Rightarrow -a + c = ۲ \Rightarrow a = c - ۲ \xrightarrow{ac=۱} c^۲ - ۲c = ۱ \Rightarrow c^۲ - ۲c - ۱ = ۰$

$$\Rightarrow \Delta = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow c = \frac{۲ \pm ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۱ \pm \sqrt{۲}$$

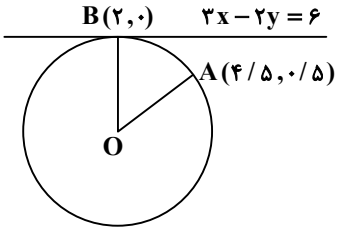
چون درایه‌های A صحیح هستند، پس این حالت غیرقابل‌قبول است و خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow B^۳ = B^۲ \cdot B = ۲I \cdot B = ۲B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۲\sqrt{۲} & ۰ \\ -۲ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$۲(-۲) \times ۲\sqrt{۲} \times (-۲) \times (-۲) = -۳۲\sqrt{۲}$$

۳۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۲)

با توجه به شکل فرضی مقابل، ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از O و B را می‌یابیم.



$$۳x-۲y=۶ \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{۳}{-۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow M_{OB} = -\frac{۲}{۳}\ ,\ B(۲,۰) \Rightarrow y-۰ = -\frac{۲}{۳}(x-۲) \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۴}{۳}$$

مرکز دایره بر روی خط $y = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۴}{۳}$ قرار دارد، پس مختصات آن به‌صورت زیر است:

$$O(a, -\frac{۲}{۳}a + \frac{۴}{۳})\ ,\ OA = OB \Rightarrow \sqrt{(a-۴/۵)^۲ + (-\frac{۲}{۳}a + \frac{۴}{۳} - ۰/۵)^۲} = \sqrt{(a-۲)^۲ + (-\frac{۲}{۳}a + \frac{۴}{۳})^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (a-\frac{۹}{۲})^۲ + (-\frac{۲}{۳}a + \frac{۵}{۶})^۲ = (a-۲)^۲ + (-\frac{۲}{۳}a + \frac{۴}{۳})^۲$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۹a + \frac{۸۱}{۴} + \frac{۴}{۹}a^۲ + \frac{۲۵}{۳۶} - \frac{۲۰}{۱۸}a = a^۲ - ۴a + ۴ + \frac{۴}{۹}a^۲ + \frac{۱۶}{۹} - \frac{۱۶}{۹}a \Rightarrow -۹a - \frac{۱۰}{۹}a + \frac{۸۱}{۴} + \frac{۲۵}{۳۶} = -۴a - \frac{۱۶}{۹}a + ۴ + \frac{۱۶}{۹}$$

$$\Rightarrow -۹a - \frac{۱۰}{۹}a + ۴a + \frac{۱۶}{۹}a = ۴ + \frac{۱۶}{۹} - \frac{۸۱}{۴} - \frac{۲۵}{۳۶}$$

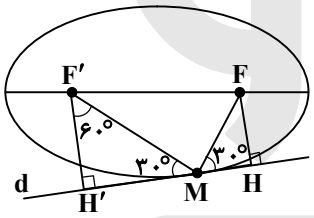
$$\Rightarrow -۵a + \frac{۶}{۹}a = ۴ + \frac{۶۴-۲۵}{۳۶} - \frac{۸۱}{۴} \Rightarrow -۵a + \frac{۲}{۳}a = ۴ + \frac{۳۹}{۳۶} - \frac{۸۱}{۴} \Rightarrow -\frac{۱۳a}{۳} = \frac{۱۶-۸۱}{۴} + \frac{۱۳}{۱۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱۳a}{۳} = \frac{-۱۹۵+۱۳}{۱۲} \Rightarrow \frac{-۱۳a}{۳} = -\frac{۱۸۲}{۱۲} \Rightarrow a = \frac{۱۸۲}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۳} = \frac{۱۴}{۴} = ۳/۵ \Rightarrow O(۳/۵, -۱)$$

۳۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (فصل ۲، درس ۳)

نکته: بر طبق خاصیت بازتابندگی بیضی، اگر پرتویی از یک کانون بیضی، بر بدنهٔ داخلی آن بتابد، پرتو بازتابش از کانون دیگر بیضی می‌گذرد.

با توجه به شکل و طبق ویژگی بازتابندگی در بیضی داریم:



$$F'\hat{M}H' = F\hat{M}H = ۳۰^\circ$$

$$\triangle F'MH' : \cos ۳۰^\circ = \frac{MH'}{MF'} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{MH'}{MF'} \Rightarrow MH' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}MF'$$

$$\triangle FMH : \cos ۳۰^\circ = \frac{MH}{MF} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{MH}{MF} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}MF$$

طبق فرض $HH' = ۲\sqrt{۳}$، پس:

$$MH' + MH = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}MF' + \frac{\sqrt{۳}}{۲}MF = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}(MF' + MF) = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow MF' + MF = ۴ \xrightarrow[\text{بیضی}]{\text{طبق تعریف}} ۲a = ۴ \Rightarrow \text{طول قطر بزرگ} = ۴$$

۳۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۱، درس ۲)

نکته: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$\boxed{a \mid b \Rightarrow a \mid mb}$$

نکته: به $mb+nc$ وقتی m و n اعداد دلخواهی هستند، ترکیب خطی b و c می‌گویند. اگر a دو عدد b و c را عاد کند، آنگاه a هر ترکیب خطی b و c را هم عاد می‌کند.

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid mb + nc$$

از رابطهٔ $۸x^۲ + xy + ۳x - y = ۰$، y را برحسب x حل می‌کنیم.

$$۸x^۲ + ۳x = y - xy \Rightarrow ۸x^۲ + ۳x = y(۱-x) \Rightarrow y = \frac{۸x^۲ + ۳x}{۱-x}$$

چون $y \in \mathbb{Z}$، پس در کسر بالا، صورت باید بر مخرج بخش‌پذیر باشد.

$$\left.\begin{matrix} ۱-x \mid ۸x^۲ + ۳x \\ ۱-x \mid ۱-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۱-x \mid (۸x^۲ + ۳x) + ۸x(۱-x) \Rightarrow ۱-x \mid ۸x^۲ + ۳x + ۸x - ۸x^۲ \Rightarrow ۱-x \mid ۱۱x$$

$$\left.\begin{matrix} ۱-x \mid ۱۱x \\ ۱-x \mid ۱-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۱-x \mid ۱۱x + ۱۱(۱-x) \Rightarrow ۱-x \mid ۱۱ \Rightarrow \begin{cases} ۱-x = \pm ۱ \Rightarrow x = ۰\ ,\ x = ۲ \\ ۱-x = \pm ۱۱ \Rightarrow x = -۱۰\ ,\ x = ۱۲ \end{cases}$$

بنابراین، چهار نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.

۳۸- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۱)

نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل یعنی برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

با توجه به اینکه جملات $0/4x_2$ و $\sqrt{x_3}$ باید عدد صحیح باشند، حالات زیر را داریم:

$$x_1+0/4x_2+\sqrt{x_3}+x_4=4$$

۱) $x_2=0\ ,\ x_3=0 \Rightarrow x_1+x_4=4 \xrightarrow[k=2]{n=4}$ تعداد جواب‌ها $=\binom{4+2-1}{2-1}=\binom{5}{1}=5$

۲) $x_2=0\ ,\ x_3=1 \Rightarrow x_1+x_4=3 \xrightarrow[k=2]{n=3}$ تعداد جواب‌ها $=\binom{3+2-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4$

۳) $x_2=0\ ,\ x_3=4 \Rightarrow x_1+x_4=2 \xrightarrow[k=2]{n=2}$ تعداد جواب‌ها $=\binom{2+2-1}{2-1}=\binom{3}{1}=3$

۴) $x_2=0\ ,\ x_3=9 \Rightarrow x_1+x_4=1 \xrightarrow[k=2]{n=1}$ تعداد جواب‌ها $=\binom{1+2-1}{2-1}=\binom{2}{1}=2$

۵) $x_2=0\ ,\ x_3=16 \Rightarrow x_1+x_4=0 \Rightarrow x_1=x_4=0 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=1$

۶) $x_2=5\ ,\ x_3=0 \Rightarrow x_1+x_4=2 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{2+2-1}{2-1}=\binom{3}{1}=3$

۷) $x_2=5\ ,\ x_3=1 \Rightarrow x_1+x_4=1 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{1+2-1}{2-1}=\binom{2}{1}=2$

۸) $x_2=5\ ,\ x_3=4 \Rightarrow x_1+x_4=0 \Rightarrow x_1=x_4=0 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=1$

۹) $x_2=10\ ,\ x_3=0 \Rightarrow x_1+x_4=0 \Rightarrow x_1=x_4=0 \Rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=1$

تعداد کل جواب‌ها برابر است با:

$$5+4+3+2+1+3+2+1+1=22$$

۳۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (فصل ۳، درس ۲)

با توجه به اینکه از چهار عضو مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ چهار پیکان به اعضای $\{1,2,4\}$ رسم می‌شود، مجموع مقادیر تابع زمانی فرد است که تعداد پیکان‌های وارد بر ۱، فرد باشد، پس حالات زیر را داریم:

الف) یکی از اعضای $\{1,2,3,4\}$ به ۱ وصل شده باشد و مابقی به ۲ یا ۴ متصل باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\text{یک پیکان به ۱} \Rightarrow \text{۴ حالت}\\ \text{سه عضو دیگر} \Rightarrow 2\times2\times2=8 \text{ به ۲ یا ۴}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = 4\times8=32$$

ب) سه عضو از اعضای $\{1,2,3,4\}$ به ۱ وصل شده باشند و مابقی به ۲ یا ۴ متصل باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\text{سه عضو } \{1,2,3,4\} \text{ به ۱} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{4}{3}=4\\ \text{یک عضو دیگر} \Rightarrow \text{۲ حالت به ۲ یا ۴ } \{1,2,3,4\}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = 4\times2=8$$

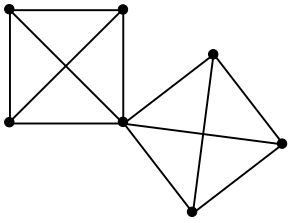
تعداد کل حالات $=32+8=40$

۴۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (فصل ۲، درس ۱)

نکته (بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف): بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین آن‌ها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به‌ترتیب آن‌ها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم.

نکته (دور): دنبالهٔ $v_1v_2v_3\ldots v_nv_1\ (n\geq3)$ از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم.

گراف موردنظر به‌صورت زیر است:



$$P_{Min}=7$$

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۶)

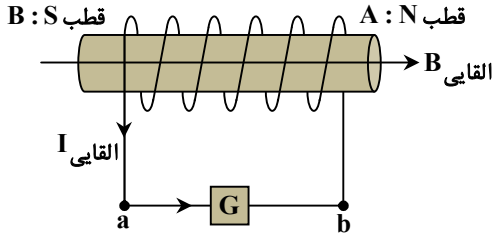
در واپاشی آلفازا، عدد جرمی هسته ۴ واحد کاهش می‌یابد.

۴۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۱)

خطوط میدان الکتریکی از بار مثبت خارج و به بار منفی وارد می‌شوند؛ بنابراین $q_1 > 0$ و $q_2 < 0$ است. از طرفی دیگر، چون تراکم خطوط میدان در نزدیکی بار q_1 بیشتر از تراکم خطوط میدان در نزدیکی بار q_2 است، می‌توان گفت $|q_1| > |q_2|$ است.

۴۳- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

آهنربا در حال دور شدن از سیم‌لوله است؛ بنابراین شار مغناطیسی عبوری از سیم‌لوله در حال کاهش است. طبق قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی در سیم‌لوله باید هم‌جهت با میدان مغناطیسی آهنربا باشد؛ بنابراین جهت میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله باید مطابق شکل از چپ به راست باشد:



میدان مغناطیسی درون سیم‌لوله از قطب S به N است؛ بنابراین ناحیهٔ A قطب N و ناحیهٔ B قطب S است. با توجه به قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی در گالوانومتر از a به b است.

۴۴- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۱)

$$۲۵\,kWh = ۲۵\,kWh \times \frac{۳۶۰۰\,s}{۱\,h} \times \frac{۱۰۰۰\,W}{۱\,kW} = ۲۵ \times ۳/۶ \times ۱۰^۶\,W \cdot s = ۹۰ \times ۱۰^۶\,J = ۹۰\,MJ$$

۴۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

گلولهٔ اول در لحظهٔ $t = ۰$، گلولهٔ دوم در لحظهٔ $t = ۲s$ و گلولهٔ سوم در لحظهٔ $t = ۴s$ رها شده است؛ بنابراین هنگام رها شدن گلولهٔ سوم، گلولهٔ اول به مدت $۴s$ سقوط کرده است و به سطح زمین رسیده است:

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow h = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۴^۲ \Rightarrow h = ۸۰\,m$$

در لحظهٔ $t = ۴s$، گلولهٔ دوم به مدت $۲s$ سقوط کرده است:

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow h' = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۲^۲ = ۲۰\,m$$

همهٔ گلوله‌ها از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها شده‌اند و در لحظهٔ $t = ۴s$، گلولهٔ دوم $۲۰\,m$ سقوط کرده است؛ بنابراین این گلوله در لحظهٔ $t = ۴s$ به ارتفاع $h - h' = ۸۰ - ۲۰ = ۶۰\,m$ از سطح زمین می‌رسد. (جهت مثبت محور حرکت را رو به پایین در نظر گرفته‌ایم.)

۴۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۱)

از لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر می‌شود تا لحظه‌ای که آن‌ها به‌هم می‌رسند، فاصلهٔ دو متحرک در حال کم شدن است:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۴}t^۲ \\ x_۲ = (t-۳)^۲ \end{cases}$$

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۴}t^۲ = (t-۳)^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}t = t - ۳ \Rightarrow t = ۶s$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow \begin{cases} v_۱ = ۰/۵t \\ v_۲ = ۲(t-۳) \end{cases}$$

$$v_۱ = v_۲ \Rightarrow ۰/۵t = ۲t - ۶ \Rightarrow t = ۴s$$

بنابراین در بازهٔ زمانی $t = ۴s$ تا $t = ۶s$ یعنی به مدت $۲s$ فاصلهٔ دو متحرک در حال کاهش بوده است.

۴۷- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

ابتدا معادلهٔ حرکت متحرک A را نوشته و مکان آن را در لحظهٔ $t = ۴s$ می‌یابیم:

$$v_A = \frac{۲۶ - ۲۰}{۳} = ۲\frac{m}{s}$$

$$x_A = v_A t + x_۰ \Rightarrow x_A = ۲t + ۲۰ \xrightarrow{t=۴s} x_A = ۲(۴) + ۲۰ = ۲۸\,m$$

حالا معادلهٔ حرکت متحرک B را می‌نویسیم و سپس مکان آن در لحظهٔ $t = ۴s$ را برابر با $x = ۲۸\,m$ قرار می‌دهیم، زیرا در این لحظه متحرک B به متحرک A رسیده است:

$$x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۱۲t + ۰ \xrightarrow{t=۴s} ۲۸ = \frac{۱}{۲}a \times (۴)^۲ + ۱۲ \times ۴ \Rightarrow -۲۰ = ۸a \Rightarrow a = -۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (-۲/۵\frac{m}{s^۲})\vec{i}$$

۴۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۲ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی ۲s تا ۴s:

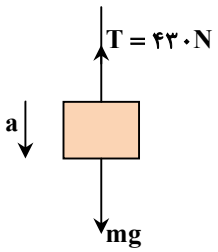
$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\Rightarrow a_{av}=\frac{v_{4s}-v_{2s}}{4-2}\Rightarrow a_{av}=\frac{(3(4)^2-8)-(3(2)^2-8)}{2}=\frac{3(4^2-2^2)}{2}=18\frac{m}{s^2}$$

۴۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

سمت شرق را مثبت در نظر می‌گیریم:

$$F_{net}=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{m\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow 2=\frac{0/8(5-(-5))}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{8}{2}=4s$$

۵۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)



$$F_{net}=mg-T=ma\Rightarrow 50\times 9/8-430=50a\Rightarrow 60=50a\Rightarrow a=1/2\frac{m}{s^2}$$

۵۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۲)

طبق قانون دوم نیوتون $F_{net}=ma$ است:

$$\begin{cases}F=m_1\times 12\\ F=m_2\times 4\end{cases}\Rightarrow m_1\times 12=m_2\times 4\Rightarrow m_2=3m_1 \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

طبق رابطهٔ بالا، حاصل m_2-m_1 برابر است با:

$$m_2-m_1=3m_1-m_1=2m_1$$

حال اگر نیروی F به جرم $2m_1$ اثر کند، داریم:

$$F=2m_1\times a\xrightarrow{\frac{F}{m_1}=12} 12=2\times a\Rightarrow a=6\frac{m}{s^2}$$

۵۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

دورهٔ گردش سکه همان دورهٔ گردش میز است:

$$T=\frac{\Delta t}{n}=\frac{3/14}{3}=\frac{\pi}{3}s$$

ازآنجاکه نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه؛ نقش نیروی مرکزگرا را بازی می‌کند، داریم:

$$f_{s,max}=\frac{mv^2}{r}\Rightarrow \mu_s mg=m\frac{4\pi^2 r}{T^2}\Rightarrow \mu_s\times 10=\frac{4\pi^2\times 0/1}{(\frac{\pi}{3})^2}\Rightarrow \mu_s=0/36$$

۵۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

$$v=\sqrt{\frac{F}{\rho A}}\Rightarrow \frac{v_B}{v_A}=\sqrt{\frac{F_B}{F_A}}\times\sqrt{\frac{\rho_A}{\rho_B}}\times\sqrt{\frac{A_A}{A_B}}\xrightarrow[\text{دو تار یکسان است.}]{\text{جنس و نیروی کشش}}\frac{v_B}{v_A}=1\times 1\times\sqrt{\frac{A_A}{A_B}}\Rightarrow\frac{v_B}{100}=\sqrt{\frac{4A_B}{A_B}}$$

$$\Rightarrow v_B=200\frac{m}{s}$$

۵۴- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۳)

براساس اثر دوپلر برای امواج الکترومغناطیسی، هنگام نزدیک شدن چشمه به ناظر (کهکشان به ما)، بسامد موج دریافتی افزایش می‌یابد.

۵۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

ابتدا ثابت فنر را می‌یابیم:

در حال تعادل : $mg=kx\Rightarrow 0/2\times 10=k\times\frac{2/5}{100}\Rightarrow k=80\frac{N}{m}$

بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر برابر با انرژی مکانیکی آن است:

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times 80\times(2\times 10^{-2})^2=40\times 4\times 10^{-4}=16mJ$$

۵۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

فاصلهٔ بین جبهه‌های موج متوالی در ناحیهٔ A بیشتر از ناحیهٔ B است؛ بنابراین طول موج و در نتیجه تندی انتشار موج در ناحیهٔ A بیشتر از ناحیهٔ B است.

از طرفی دیگر، برای امواج سطحی آب در آب‌های کم‌عمق، هر چقدر تندی انتشار موج در یک ناحیه بیشتر باشد، تندی انتشار موج سطحی در آن ناحیه نیز بیشتر است؛ بنابراین عمق ناحیهٔ A بیشتر از ناحیهٔ B است.

۵۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

ضریب شکست شیشه برای طول موج‌های مختلف نور مانند نورهای قرمز و آبی، متفاوت است؛ بنابراین این نورها درون شیشه به‌طور متفاوت می‌شکنند و از هم جدا می‌شوند و هنگام خروج از شیشه موازی با یکدیگر و موازی با راستای انتشار اولیه (قبل از ورود به شیشه) در هوا منتشر می‌شوند.

۵۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۵)

تابع کار یک فلز وابسته به جنس فلز است و طبق رابطهٔ $K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_\circ$، با ثابت بودن تابع کار فلز و کاهش طول موج نور فرودی، حاصل $\frac{hc}{\lambda}$ و در نتیجه مقدار K_{max} (بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها) افزایش می‌یابد.

۵۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۵)

مدل اتمی بور متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن را نمی‌تواند توجیه کند و از طرفی دیگر برای اتم‌های هیدروژن‌گونه یعنی اتم‌هایی که فقط یک الکترون دارند، به کار می‌رود. این مدل برای وقتی که بیش از یک الکترون به دور هسته می‌گردد به کار نمی‌رود؛ زیرا در مدل بور، نیروی الکتریکی که یک الکترون بر الکترون دیگر وارد می‌کند به حساب نیامده است؛ بنابراین عبارت‌های «ب» و «ج» پاسخ این سؤال هستند.

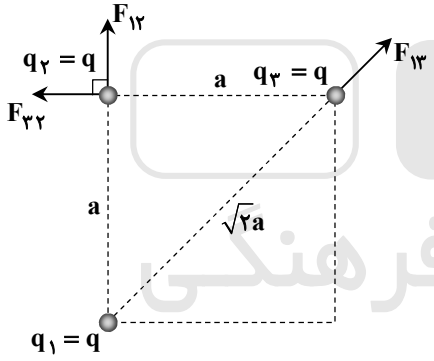
۶۰- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

$$N = N_\circ(\frac{1}{2})^n \Rightarrow \frac{1}{16}N_\circ = N_\circ(\frac{1}{2})^n \Rightarrow \frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^n \Rightarrow n = 4$$

$$n = \frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 4 = \frac{8}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 2h$$

۶۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

هر ضلع مربع را a و مقدار هر بار الکتریکی را q در نظر می‌گیریم:



$$F_{32} = F_{12} = \frac{kq \times q}{a^2} = \frac{kq^2}{a^2} \Rightarrow F_{T_2} = F_{12} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}kq^2}{a^2} \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

$$F_{13} = \frac{k|q_1 q_3|}{r_{13}^2} = \frac{kq \times q}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{2}\frac{kq^2}{a^2} \quad \text{رابطهٔ (۲)}$$

از تقسیم رابطهٔ (۱) بر رابطهٔ (۲) داریم:

$$\frac{F_{T_2}}{F_{13}} = \frac{\sqrt{2}\frac{kq^2}{a^2}}{\frac{1}{2}\frac{kq^2}{a^2}} = 2\sqrt{2}$$

۶۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۱)

با اضافه شدن دی‌الکتریک $k = 3$ بین دو صفحهٔ خازن، ظرفیت خازن طبق رابطهٔ $C = \frac{k\varepsilon_\circ A}{d}$، ۳ برابر می‌شود. از طرفی دیگر، خازن به باتری وصل است، بنابراین اختلاف‌پتانسیل دو سر خازن ثابت می‌ماند:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} \times (\frac{V_2}{V_1})^2 \xrightarrow[\text{اختلاف پتانسیل ثابت است.}]{\text{ظرفیت ۳ برابر می‌شود.}} \frac{U_2}{U_1} = 3 \times 1 = 3$$

با ثابت ماندن اختلاف‌پتانسیل دو سر خازن و فاصلهٔ بین صفحات آن، طبق رابطهٔ $E = \frac{V}{d}$، میدان الکتریکی بین دو صفحه ثابت می‌ماند.

۶۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

جریان عبوری از باتری‌ها برابر است با:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{18 - 6}{3 + 1 + 2} = 2\,A$$

نسبت خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{P_{\text{ورودی باتری (۲)}}}{P_{\text{خروجی باتری (۱)}}} = \frac{\mathscr{E}_2 I + r_2 I^2}{\mathscr{E}_1 I - r_1 I^2} = \frac{(6 \times 2) + 2(2)^2}{(18 \times 2) - (2)^2} = \frac{12 + 8}{36 - 4} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

۶۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

$$m_A=\frac{1}{2}m_B \xrightarrow[V=AL]{m=\rho V} \rho_A A_A L_A=\frac{1}{2}\rho_B A_B L_B \xrightarrow{\rho_A=\rho_B} A_A\times 2L_B=\frac{1}{2}A_B L_B \Rightarrow 4A_A=A_B \quad \text{(۱) رابطهٔ}$$

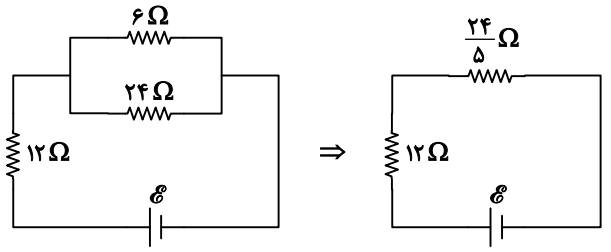
$$R=\frac{\rho L}{A} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{L_A}{L_B}\times\frac{A_B}{A_A} \xrightarrow[\rho_A=\rho_B]{\text{(۱) رابطهٔ}} \frac{R_A}{R_B}=1\times 2\times 4=8$$

۶۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

دو مقاومت 6Ω و 24Ω موازی‌اند:

$$R_{6,24}=\frac{6\times 24}{6+24}=\frac{6\times 24}{30}=\frac{24}{5}\Omega$$

اختلاف‌پتانسیل دو سر مقاومت‌های 6Ω، 24Ω و $\frac{24}{5}\Omega$ یکسان است. از طرفی دیگر، چون دو مقاومت $\frac{24}{5}\Omega$ و 12Ω با یکدیگر متوالی هستند، جریان یکسانی از آن‌ها عبور می‌کند؛ بنابراین داریم:

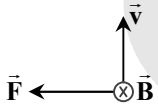


$$I_{12\Omega}=I_{\frac{24}{5}\Omega} \Rightarrow \frac{V_{12\Omega}}{12}=\frac{V_{\frac{24}{5}\Omega}}{\frac{24}{5}}$$

$$\xrightarrow{V_{6\Omega}=V_{\frac{24}{5}\Omega}} \frac{V_{12\Omega}}{V_{6\Omega}}=\frac{12}{\frac{24}{5}}=\frac{5}{2}$$

۶۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۳)

هر دو ذرهٔ آلفا و پوزیترون دارای بار الکتریکی مثبت هستند؛ بنابراین طبق قاعدهٔ دست راست، هر دو به سمت چپ منحرف می‌شوند:



۶۷- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

$$B=\frac{\mu_\circ NI}{\ell} \Rightarrow 157\times 10^{-4}=\frac{4\pi\times 10^{-7}\times N\times 2/5}{0/1} \Rightarrow 1/57\times 10^{-3}=4\times 3/14\times 2/5\times 10^{-7}N \Rightarrow 1\times 10^{-3}=20\times 10^{-7}N$$

$$\Rightarrow N=\frac{10^{-3}}{20\times 10^{-7}}=500$$

۶۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

$$\Delta\Phi=BA(\cos\theta_2-\cos\theta_1) \Rightarrow \Delta\Phi=0/05\times 40\times 10^{-4}(\cos 90^\circ-\cos 0^\circ) \Rightarrow \Delta\Phi=2\times 10^{-4}(0-1)=-2\times 10^{-4}\,Wb$$

علامت منفی به معنی کاهش شار مغناطیسی است.

۶۹- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

ابتدا ارتفاع مایع درون استوانه را می‌یابیم:

$$V=Ah \Rightarrow 2500=50h \Rightarrow h=50cm=0/5\,m$$

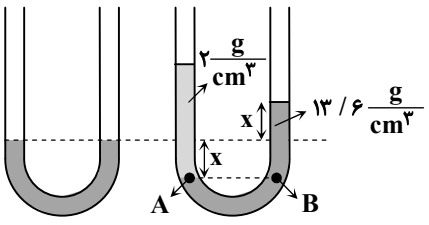
فشار پیمانه‌ای در کف ظرف برابر با فشار حاصل از ستون $50cm$ مایع با چگالی $1/2\frac{g}{cm^3}$ است. کافی است بفهمیم فشار $50cm$ از ستون این مایع معادل با فشار چند سانتی‌متر از جیوه است:

$$P_{\text{کف ظرف}}=P_{\text{ستون مایع}}=\rho_{\text{مایع}}gh_{\text{مایع}}=\rho_{\text{جیوه}}gh_{\text{جیوه}} \Rightarrow \rho_{\text{مایع}}h_{\text{مایع}}=\rho_{\text{جیوه}}h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 1/2\times 50=13/6h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}}=\frac{60}{13/6}\simeq 4/4cm \Rightarrow P_{\text{کف ظرف}}\simeq 4/4\,cmHg$$

۷۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

هنگامی که از یکی از شاخه‌ها $17\,cm$ مایع روی جیوه ریخته می‌شود، جیوه در آن شاخه به‌اندازهٔ x پایین رفته و جیوهٔ درون شاخهٔ مقابل نیز به همان اندازهٔ x بالا می‌آید:



$$P_A=P_B \Rightarrow P_\circ+\rho_{\text{مایع}}gh_{\text{مایع}}=P_\circ+\rho_{\text{جیوه}}gh_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{مایع}}h_{\text{مایع}}=\rho_{\text{جیوه}}\times(2x) \Rightarrow 2\times 17=13/6\times 2x \Rightarrow x=1/25\,cm$$

سطح جیوه در شاخهٔ مقابل نسبت به موقعیت اولیه به‌اندازهٔ $x=1/25\,cm$ بالاتر رفته است.

۷۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

$v_A = ۱۲۶\frac{km}{h}$ برابر با $۳۵\frac{m}{s}$ است. از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی کمک می‌گیریم:

$$W_t = K_B - K_A \Rightarrow W_t = \frac{۱}{۲}m(v_B^۲ - v_A^۲) \Rightarrow ۲۴۰۰۰ = \frac{۱}{۲}\times ۶۰(v_B^۲ - ۳۵^۲)$$

$$\Rightarrow ۸۰۰ = v_B^۲ - ۱۲۲۵ \Rightarrow v_B^۲ = ۲۰۲۵ \Rightarrow v_B = ۴۵\frac{m}{s}$$

کافی است $v_B = ۴۵\frac{m}{s}$ را برحسب $\frac{km}{h}$ به‌دست آوریم:

$$v_B = ۴۵\frac{m}{s}\times ۳/۶ = ۱۶۲\frac{km}{h}$$

۷۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

اگر کمیت‌های مربوط به پدر را با زیروند ۱ و کمیت‌های مربوط به پسر را با زیروند ۲ نشان دهیم، داریم:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow \frac{K_۲}{K_۱} = \frac{m_۲}{m_۱}\times(\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \Rightarrow \frac{K_۲}{\frac{۱}{۲}K_۲} = \frac{m_۲}{۲m_۲}\times(\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \Rightarrow ۲ = \frac{۱}{۲}\times(\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \Rightarrow (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow v_۲ = ۲v_۱ \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

هنگامی تندی حرکت پدر $v'_۱ = v_۱ + ۲\frac{m}{s}$ می‌شود، انرژی جنبشی پدر و پسر برابر می‌شود؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$K_۲ = K'_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ = \frac{۱}{۲}m_۱v'^۲_۱ \xrightarrow[m_۱=۲m_۲]{\text{رابطهٔ (۱)}} m_۲\times(۲v_۱)^۲ = ۲m_۲\times(v_۱+۲)^۲ \Rightarrow ۴v_۱^۲ = ۲(v_۱+۲)^۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}v_۱ = v_۱ + ۲ \Rightarrow (\sqrt{۲}-۱)v_۱ = ۲ \Rightarrow v_۱ = \frac{۲}{\sqrt{۲}-۱}\times\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱} = ۲\sqrt{۲}+۲\frac{m}{s}$$

۷۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۴)

انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن نمونه‌ای از همرفت طبیعی است. بقیهٔ موارد مطرح‌شده، جلوه‌هایی از همرفت واداشته هستند.

۷۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

$$\frac{P_۱V_۱}{n_۱T_۱} = \frac{P_۲V_۲}{n_۲T_۲} \xrightarrow[\text{حجم هوای اتاق ثابت است.}]{\text{فشار هوای اتاق تغییر نمی‌کند.}} \frac{n_۲}{n_۱} = \frac{T_۱}{T_۲} \Rightarrow \frac{\Delta n}{n_۱} = \frac{\Delta T}{T_۲} \Rightarrow \frac{\Delta n}{n_۱} = \frac{۱}{۲۷۳+۲۵} = \frac{۱}{۲۹۸}$$

۷۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

از بین ۶ فرایند چرخهٔ ماشین بنزینی، ۴ فرایند آن با حرکت پیستون همراه است که به آن‌ها ضربه می‌گوییم.

شیمی

۷۶- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۱)

گزینهٔ ۱: نادرست؛ تفاوت انرژی نورهای سرخ و نیلی، بیشتر از تفاوت انرژی نورهای نارنجی و آبی است.

بنفش	نیلی	آبی	سبز	زرد	نارنجی	سرخ
۴۳۵ – ۳۸۰	۵۰۰ – ۴۳۵	۵۲۰ – ۵۰۰	۵۶۵ – ۵۲۰	۵۹۰ – ۵۶۵	۶۲۵ – ۵۹۰	۷۴۰ – ۶۲۵

گزینهٔ ۲: درست

گزینهٔ ۳: نادرست؛ رنگ شعلهٔ لیتیم سولفات و لیتیم نیترات به‌دلیل یکسان بودن کاتیون در آن‌ها مشابه است. (رنگ شعلهٔ لیتیم و نمک‌های آن همگی سرخ‌رنگ است.) اما رنگ شعلهٔ مس (II) سولفات (شعلهٔ سبز) و سدیم سولفات (شعلهٔ زرد) به‌دلیل متفاوت بودن کاتیون در آن‌ها متفاوت است.

توجه داشته باشید که آزمون شعله روشی برای تشخیص فلز یا کاتیون آن در یک ترکیب است و آنیون‌ها در شعله رنگ ایجاد نمی‌کنند.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ سطح انرژی لایهٔ اول یا همان $n = ۱$ در تمام اتم‌ها متفاوت است.

۷۷- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

گزینهٔ ۱: نادرست؛ درصد فراوانی گوگرد در زمین و مشتری متفاوت است ولی در هر دو سیاره ششمین عنصر فراوان به‌شمار می‌آید.

گزینهٔ ۲: درست

گزینهٔ ۳: درست؛ سومین عنصر فراوان در زمین و مشتری به‌ترتیب سیلیسیم (شبه‌فلز) و کربن (نافلز) است.

گزینهٔ ۴: درست؛ درصد فراوانی آهن در زمین کمتر از ۵۰ درصد و درصد فراوانی هیدروژن در مشتری بیشتر از ۵۰ درصد (بیش از ۹۰ درصد) است.

۷۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)

با توجه به ثابت بودن حجم در این فرایند در می‌یابیم که شمار مول‌های $CO(g)$ خارج شده از بالون با شمار مول‌هـای $Ar(g)$ وارد شـده بـه بالون باید برابر باشد.

$$\text{درصد جرمی آرگون} = \frac{\text{جرم آرگون}}{\text{جرم کل}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۳۰ = \frac{\text{جرم آرگون}}{۶۲۰} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{جرم آرگون} = ۱۸۶\,g$$

پس جرم $CO(g)$ باقی‌مانده در بالون برابر است با:

$$۶۲۰ - ۱۸۶ = ۴۳۴\,g$$

اکنون شمار مول‌های $Ar(g)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$mol\,Ar = ۱۸۶\,g\,Ar \times \frac{۱\,mol\,Ar}{۴۰\,g\,Ar} = ۴/۶۵\,mol$$

پس شمار مول‌های $CO(g)$ خارج شده نیز برابر $۴/۶۵\,mol$ بوده که جرم آن برابر است با:

$$\text{جرم خارج‌شده } CO(g) = ۴/۶۵\,mol\,CO \times \frac{۲۸\,g\,CO}{۱\,mol\,CO} = ۱۳۰/۲\,g$$

بنابراین جرم کل $CO(g)$ برابر بوده است با:

$$۴۳۴ + ۱۳۰/۲ = ۵۶۴/۲$$

۷۹- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

ابتدا واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم سپس ضریب $H_۲(g)$ (عنصر مشترک در معادله) را در دو معادله یکسان می‌کنیم:

$$I)\ ۲Al(s) + ۳H_۲SO_۴(aq) \rightarrow Al_۲(SO_۴)_۳(aq) + ۳H_۲(g)$$

$$II)\ \left[H_۲(g) + Cl_۲(g) \rightarrow ۲HCl(g)\right] \times ۳$$

بنابراین به‌ازای مصرف ۲ مول Al، ۳ مول $Cl_۲$ نیز مصرف می‌شود، پس:

$$۲Al \sim ۳Cl_۲$$

$$\frac{?\,g}{۲ \times ۲۷\,g} = \frac{۸/۹۶\,L}{۳ \times ۲۲/۴\,L} \Rightarrow ? = ۷/۲$$

۸۰- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

با توجه به داده‌های سؤال، ساختار لوویس مولکول $XOCl$ به‌صورت زیر است:

$$\ddot{O} = \ddot{X} - \ddot{Cl}:$$

در این ساختار ۱۸ الکترون وجود دارد که هریک از اتم‌های اکسیژن و کلر در لایه ظرفیت خود به‌ترتیب ۶ و ۷ الکترون دارند. پس اتم X نیز بایـد ۵ الکترون در لایه ظرفیت خود داشته باشد؛ بنابراین X اتم عنصری از گروه ۱۵ است که در واکنش با فلـزهـا بـه شـکل $X^{۳-}$ $(۱۸ - ۱۳ = ۵)$ شرکت می‌کند. همچنین ساختار لوویس آنیون $XO_۳^-$ به‌صورت زیر است:

$$\left[\begin{array}{c} :\ddot{O}: \\ \| \\ :\ddot{O} - X - \ddot{O}: \end{array}\right]^-$$

که در این ساختار ۴ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

۸۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

معادلهٔ موازنه شده واکنش چنین است: $۲NO(g) + ۲H_۲(g) \rightarrow N_۲(g) + ۲H_۲O(g)$

ابتدا مول هریک از دو گاز واکنش‌دهنده را به‌دست می‌آوریم: $۱۳/۴۴L \times \frac{۱mol}{۲۲/۴L} = ۰/۶\,mol$

با توجه به اینکه دو گاز واکنش‌دهنده متناسب با ضرایب استوکیومتری با یکدیگر واکنش داده‌اند و براساس معادلهٔ موازنه شده ضریب هـر دو گـاز یکسان است، پس شمار مول هر دو گاز برابر $\frac{۰/۶}{۲} = ۰/۳$ است.

ازاین‌رو برای محاسبه بازده درصدی واکنش می‌توان از هریک از دو گاز NO و $H_۲$ استفاده کرد.

$$۲NO \sim (N_۲ + ۲H_۲O)$$

$$\frac{۰/۳\,mol \times \frac{R}{۱۰۰}}{۲\,mol} = \frac{۳/۸۴\,g}{۲۸ + (۲ \times ۱۸)\,g} \Rightarrow R = ۴۰$$

۸۲- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

ابتدا جرم حل‌شونده یا سدیم هیدروکسید حل شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{جرم NaOH} = ۰/۵۰۰\text{L} \times \frac{۲\text{mol}}{\text{L}} \times \frac{۴۰\text{g}}{۱\text{mol}} = ۴۰\text{g}$$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۵ = \frac{۴۰\text{g NaOH}}{(۵۰۰\text{mL} \times ۱/۲\frac{\text{g}}{\text{mL}}) + \text{m g } H_۲O} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{m} = ۲۰۰\text{g}$$

۸۳- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۳)

گزینهٔ ۱: نادرست؛ انحلال‌پذیری گاز $CO_۲$ از انحلال‌پذیری هر دو گاز $N_۲$ و NO بیشتر و مقایسه انحلال‌پذیری آن‌ها چنین است:

$$CO_۲ > NO > N_۲$$

زیرا انحلال $CO_۲$ جنبه شیمیایی دارد یعنی انحلال آن همراه با واکنش شیمیایی و تولید یون هیدرونیوم است ولی انحلال دو گاز دیگر فقط جنبه فیزیکی دارد.

گزینهٔ ۲: درست؛ گشتاور دوقطبی $CH_۴$ و $CS_۲$ برابر صفر است. توجه داشته باشید که ساختار $CS_۲$ همانند $CO_۲$ است.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ انحلال‌پذیری اغلب گازها با افزایش دما کاهش می‌یابد. از سویی انحلال‌پذیری اغلب نمک‌ها با افزایش دما، افزایش می‌یابد. پس لزوماً ارتباط انحلال‌پذیری آن‌ها مخالف هم نیست.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ انتقال پیام‌های عصبی بدون وجود یون پتاسیم امکان‌پذیر نیست و متوقف می‌شود.

۸۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

$$[HF]_{\text{باقی‌مانده}} = ۰/۲ - (۰/۲ \times \frac{۲/۴}{۱۰۰}) = ۰/۱۹۵۲$$

$$[H^+] = [HCOO^-] = ۰/۱ \times \frac{۲}{۱۰۰} = ۰/۰۰۲ \Rightarrow [H^+] + [HCOO^-] = ۲ \times ۰/۰۰۲ = ۰/۰۰۴$$

نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{۰/۱۹۵۲}{۰/۰۰۴} = ۴۸/۸$$

۸۵- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

نخستین آلکان، گاز متان $(CH_۴)$ و دومین آلکان $(C_۲H_۶)$، گاز اتان است که معادلهٔ سوختن کامل آن‌ها چنین است:

$$CH_۴ + ۲O_۲ \rightarrow CO_۲ + ۲H_۲O$$

$$۲C_۲H_۶ + ۷O_۲ \rightarrow ۴CO_۲ + ۶H_۲O$$

جرم متان را برابر m و جرم اتان را m' در نظر می‌گیریم، سپس جرم اکسیژن را برحسب m و m' به‌دست می‌آوریم:

$$CH_۴ \sim ۲O_۲$$

$$\frac{\text{mg}}{۱۶\text{g}} = \frac{\text{x}}{۲ \times ۳۲\text{g}} \Rightarrow \text{x} = ۴\text{m}$$

$$۲C_۲H_۶ \sim ۷O_۲$$

$$\frac{\text{m'g}}{۲ \times ۳۰\text{g}} = \frac{\text{x'}}{۷ \times ۳۲\text{g}} \Rightarrow \text{x'} = (\frac{۷ \times ۸}{۱۵})\text{m'}$$

با توجه به داده‌های سؤال، داریم:

$$\text{x} = ۳\text{x'} \Rightarrow ۴\text{m} = ۳(\frac{۵۶}{۱۵})\text{m'} \Rightarrow \text{m} = ۳(\frac{۱۴}{۱۵})\text{m'} \Rightarrow \frac{\text{m}}{\text{m'}} = \frac{۴۲}{۱۵} = ۲/۸$$

۸۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱)

گزینهٔ ۱: نادرست؛ فرمول فشرده اشتباه رسم شده است.

$$CH_۳ - \underset{\displaystyle CH_۳}{\underset{|}{CH}} - \underset{\displaystyle C_۲H_۵}{\underset{|}{\underset{\displaystyle C_۲H_۵}{\underset{|}{C}}}} - \underset{\displaystyle CH_۳}{\underset{|}{CH}} - CH_۲ - CH_۲ - CH_۳ \Rightarrow (CH_۳)_۲CHC(C_۲H_۵)_۲CH(CH_۳)(CH_۲)_۲CH_۳$$

گزینهٔ ۲: نادرست؛ فرمول فشرده درست رسم شده است و شمار گروه‌های CH_2 در آن برابر ۵ است؛ زیرا در هر گروه C_2H_5 - یک گروه CH_2 - وجود دارد.

$$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{CH}}-CH_2-CH_2-\underset{\displaystyle C_2H_5}{\overset{\displaystyle C_2H_5}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-CH_2-CH_3 \Rightarrow (CH_3)_2CH(CH_2)_2C(C_2H_5)_3$$

گزینهٔ ۳: درست؛ فرمول فشرده درست رسم شده است و شمار گروه‌های CH_2 در آن برابر ۲ است.

$$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-CH_2-CH_2-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-CH_3 \Rightarrow (CH_3)\,C\,(CH_2)\,C\,(CH_3)_3$$

گزینهٔ ۴: نادرست؛ فرمول فشرده اشتباه رسم شده است.

$$CH_3-\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-CH_2-CH_2-\underset{}{\overset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{C}}}-CH_2-CH_2-CH_3 \Rightarrow (CH_3)_3C(CH_2)_2CH(CH_3)(CH_2)_2CH_3$$

۸۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

$$2NaHCO_3(s) \xrightarrow{\Delta} Na_2CO_3(s) + \underbrace{CO_2(g)+H_2O(g)}$$

$$\frac{?\,mol\times\frac{64}{100}}{2\,mol} = \frac{10/4\,g}{(44-18)\,g} \Rightarrow x = 1/25\ mol$$

۸۸- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۱) و شیمی ۳ (فصل ۲)

شمار الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر X از دستهٔ s می‌تواند ۱ یا ۲ باشد که در این صورت شمار الکترون‌های ظرفیت اتم عنصر Y از دستهٔ d باید دو برابر و مساوی ۲ یا ۴ باشد، پس Y می‌تواند عنصر Zn با دو الکترون ظرفیتی و یا Ti با چهار الکترون ظرفیتی باشد. از سویی اتم عنصر X می‌تواند هیدروژن و یا یک فلز قلیایی باشد و یا هلیم یا یک فلز قلیایی خاکی باشد.

گزینهٔ ۱: نادرست؛ اگر X اتم هیدروژن باشد، در واکنش با گاز کلر الکترون مبادله نمی‌شود. همچنین اگر X اتم هلیم باشد، اتم هلیم با کلر واکنش نمی‌دهد.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ حالت فیزیکی هیدروژن و هلیم گاز است. واکنش‌پذیری X به یقین از Y بیشتر نیست؛ زیرا ممکن است X هلیم باشد که از واکنش‌پذیری برخوردار نیست.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ اگر X اتم هیدروژن یا هلیم باشد، آنگاه بالاترین عدد اکسایش آن‌ها برابر ۲ نیست و به‌ترتیب برابر ۱+ و صفر است.

گزینهٔ ۴: درست؛ اگر هر دو عنصر X و Y در دورهٔ چهارم جدول تناوبی باشند، آنگاه عدد اتمی آن‌ها به‌ترتیب برابر ۱۹ (K)، ۲۰ (Ca)، ۲۲ (Ti) و ۳۰ (Zn) است که در نتیجه تفاوت عدد اتمی آن‌ها حداقل برابر ۲ است.

۸۹- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$N_2(g)+3\,H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g) \quad , \quad \Delta H = -92\,kJ$$

(مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها) − (مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها) = آنتالپی واکنش

$$-92 = \underbrace{\left[(N\equiv N)+3\,(H-H)\right]}_{x} - \left[6\,(N-H)\right]$$

$$-92 = x-(6\times 390) \Rightarrow x = 2248\,kJ$$

مقدار x برابر مجموع آنتالپی یک مول پیوند در N_2 و سه مول پیوند در H_2 است. اکنون این مقدار را برای $0/2x$ یا همان خواسته سؤال یعنی ۰/۲ مول پیوند در N_2 و ۰/۶ مول پیوند در H_2 محاسبه می‌کنیم:

$$0/2\times 2248\,kJ = 449/6$$

۹۰- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳)

فرمول مولکولی $C_۳H_۶O_۲$ را در صورت غیرحلقوی بودن می‌توان به کربوکسیلیک اسید و یا استر با زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده نسبت داد؛ بنابراین:

گزینهٔ ۱: نادرست؛ باید اشاره شود که کربوکسیلیک اسید است و نه هر اسیدی!

گزینهٔ ۲: درست

گزینهٔ ۳: درست؛ شمار جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در تمام ایزومرهای اسیدی و استری برابر است.

گزینهٔ ۴: درست؛ نیروی بین مولکولی در ایزومرهای کربوکسیلیک اسید از نوع پیوند هیدروژنی و در ایزومرهای استری از نوع واندروالسی است.

$CH_۳ - CH_۲ - COOH$

$H - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - C_۲H_۵$

$CH_۳ - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - CH_۳$

} ایزومرهای استری

۹۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

	$۲N_۲O_۵(g)$	$\rightarrow$	$۴NO_۲(g)$	+	$O_۲(g)$
شمار مول‌های اولیه :	$۲mol$		۰		۰
تغییر مول‌ها :	$-۲x$		$+۴x$		$+x$
شمار مول‌ها در $t = ۲۰s$:	$۲ - ۱ = ۱$		۲		$۰/۵$

پس مجموع شمار مول‌های گازی درون ظرف برابر ۳/۵ مول است که برای محاسبهٔ مجموع غلظت مولی گازها باید حجم ظرف را نیز به‌دست آوریم که با توجه به اینکه ۰/۵ مول $O_۲$ در مدت ۲۰ ثانیه تولید شده است و سرعت تولید آن نیز گزارش شده است، پس:

$$\frac{۰/۵\,mol\,O_۲}{۲۰s} \times \frac{L \cdot min}{۰/۶\,mol\,O_۲} \times \frac{۶۰s}{۱min} = ۲/۵\,L$$

در پایان مجموع غلظت مولی گازها برابر می‌شود با:

$$\frac{۳/۵\,mol}{۲/۵\,L} = ۱/۴\,mol \cdot L^{-۱}$$

۹۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

گزینهٔ ۱: نادرست؛ تجزیهٔ هیدروژن پراکسید، گرماگیر است ولی با افزایش شمار مول‌های گازی فراورده‌ها همراه است.

$$۲H_۲O_۲(aq) \rightarrow ۲H_۲(g) + O_۲(g) \quad , \quad \Delta H > ۰$$

گزینهٔ ۲: درست

$$N_۲(g) + ۲H_۲(g) \rightarrow N_۲H_۴(g) \quad , \quad \Delta H > ۰$$

گزینهٔ ۳: نادرست؛ واکنش تجزیهٔ آمونیاک به عنصرهای سازنده‌اش با افزایش شمار مول‌های گازی فراورده همراه است.

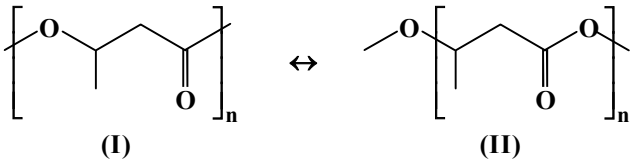
$$۲NH_۳(g) \rightarrow N_۲(g) + ۳H_۲(g) \quad , \quad \Delta H > ۰$$

گزینهٔ ۴: نادرست؛ تشکیل متان از گرافیت و هیدروژن، گرماده است.

$$C(s, \text{گرافیت}) + ۲H_۲(g) \rightarrow CH_۴(g) \quad , \quad \Delta H < ۰$$

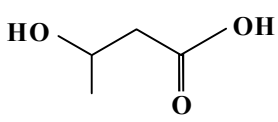
۹۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳)

پلیمر نشان داده شده نوعی پلی‌استر است که واحد سازنده یا مونومر آن دارای هر دو گروه هیدروکسیل $(-OH)$ و کربوکسیل $(-COOH)$ بوده است.



(I) (II)

برای به‌دست آوردن مونومر کافیست که در ساختار (I) اتم O را به OH و $\overset{\overset{O}{\|}}{C}$ را به $\overset{\overset{O}{\|}}{C} - OH$ تبدیل کنیم.



$$\rightarrow CH_۳ - \underset{\underset{OH}{|}}{CH} - CH_۲ - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - OH$$

گزینهٔ ۱: نادرست؛ جرم مولی مونومر آن برابر $۱۰۴\,g\cdot mol^{-۱}$ و جرم مولی ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید یک عاملی یا متانوئیک اسید یا فرمیک اسید با فرمول $HCOOH$ برابر $۴۶\,g\cdot mol^{-۱}$ است که نسبت $\frac{۱۰۴}{۴۶} \neq ۲$ است.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ این پلیمر از یک نوع مونومر ساخته شده است که در ساختار خود دو گروه عاملی دارد.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در فرمول مونومر آن که به‌صورت $C_۴H_۸O_۳$ است برابر -۲ است.

$$۴C+۸(+۱)+۳(-۲)=۰ \Rightarrow ۴C=-۲$$

گزینهٔ ۴: درست

۹۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۳)

در ساخت منبع بزرگ پلاستیکی از پلی‌اتن (از نوع سنگین که البته در سؤال مورد پرسش قرار نگرفته است) و تایر خودرو از پلی‌آمید استفاده می‌شود.

۹۵- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

گزینهٔ ۱: درست؛ در خنثی شدن شمار مول‌های H^+ و OH^- برابر می‌شود. شمار مول‌های H^+ در ظرف (I) برابر است با:

$$۰/۵\,L\times ۰/۱M=۰/۰۵\,mol$$

گزینهٔ ۲: درست؛ حاصل‌ضرب $\left[H^+\right]$ در $\left[OH^-\right]$ همواره در دمای اتاق برابر $۱۰^{-۱۴}$ است.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ در خنثی شدن باید شمار مول‌های H^+ و OH^- برابر شود.

گزینهٔ ۴: درست

$$\underbrace{n_۱M_۱V_۱}_{HCl}=\underbrace{n_۲M_۲V_۲}_{NaOH} \Rightarrow ۱\times ۰/۱\times ۰/۵=۱\times M_۲\times ۰/۲۵ \Rightarrow M_۲=۰/۲ \Rightarrow \frac{M_۲}{M_۱}=\frac{۰/۲}{۰/۱}=۲$$

۹۶- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

فرمول شیمیایی صابون جامد با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به‌صورت $C_nH_{۲n+۱}COONa$ و فرمول شیمیایی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی با زنجیر هیدروکربنی سیرشده به‌صورت $C_mH_{۲m+۱}C_۶H_۴SO_۳Na$ است.

با توجه به داده‌های سؤال، تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در پاک‌کنندهٔ صابونی و اتم‌های هیدروژن در حلقه بنزنی $(-C_۶H_۴)$ برابر ۳۱ است، پس:

$$۲n+۱=۳۵ \Rightarrow C_{۱۷}H_{۳۵}COONa$$

گزینهٔ ۱: درست؛ جرم مولی پاک‌کنندهٔ صابون $۳۰۶\,g\cdot mol^{-۱}$ است.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ شمار اتم‌های کربن در زنجیر هیدروکربنی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی (m) مشخص نیست.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ با توجه به مشخص نبودن m در پاک‌کنندهٔ غیرصابونی نمی‌توان در مورد جرم مولی آن اظهارنظر دقیقی کرد.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ تفاوت شمار اتم‌های کربن در دو پاک‌کننده مشخص نیست؛ زیرا مقدار m نامعلوم است.

۹۷- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

ابتدا با توجه به معادلهٔ دو واکنش مقدار مول OH^- تولیدشده در هر واکنش را به‌دست می‌آوریم:

$$\underset{۹۴g}{K_۲O(s)} + H_۲O(l) \rightarrow \underset{\frac{۲/۳۵g}{۹۴g}=\frac{?mol}{۲mol}\Rightarrow ?=۰/۰۵}{۲KOH(aq)} \rightarrow \underset{}{۲OH^-(aq)}$$

$$\underset{۶۲g}{Na_۲O(s)} + H_۲O(l) \rightarrow \underset{\frac{۱۵/۵g\times\frac{P}{۱۰۰}}{۶۲g}=\frac{?mol}{۲mol}\Rightarrow ?=۰/۵\times\frac{P}{۱۰۰}=۰/۰۰۵P}{۲NaOH(aq)} \rightarrow \underset{}{۲OH^-(aq)}$$

اکنون با توجه به pH محلول و حجم آن، مقدار مول کل یون OH^- را محاسبه می‌کنیم:

$$pH=۱۳/۷ \Rightarrow pOH=۱۴-۱۳/۷=۰/۳ \Rightarrow \left[OH^-\right]=۱۰^{-۰/۳}=۱۰^{-۱}\times ۱۰^{۰/۷}=۱۰^{-۱}\times ۵=۰/۵\,M$$

$$mol\,OH^-=۰/۵\,M\times ۰/۵\,L=۰/۲۵$$

در پایان باید مجموع مول‌های OH^- تولیدشده در دو واکنش با ۰/۲۵ برابر باشد:

$$۰/۲۵=۰/۰۵+۰/۰۰۵P \Rightarrow P=۴۰$$

۹۸- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

گزینهٔ ۱: درست؛ در واکنش «اکسایش- کاهش» میان دو اتم نافلز مانند واکنش کلی سلول سوختی الکترونی میان گونه‌های اکسنده و کاهنده مبادله نمی‌شود.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ در یک واکنش اکسایش- کاهش همانند معادلهٔ کلی واکنش در بسیاری از سلول‌های گالوانی دو گونهٔ فلزی نقش اکسنده و کاهنده را دارند و آنیون‌ها (نافلزها) یون ناظر هستند و در واکنش نقشی ندارد.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ اگر به‌طور خاص یک یون فلز در واکنش شرکت داشته باشد ممکن است، یون فلز با گرفتن الکترون به اتم فلزی در فراورده‌ها تبدیل شود. مانند:

$$H_2(g)+Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2H^+(aq)+Cu(s)$$

گزینهٔ ۴: نادرست؛ واکنش اکسایش- کاهش لزوماً ارتباطی با حالت فیزیکی مواد شرکت‌کننده در واکنش ندارد.

۹۹- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۲)

با توجه به شکل‌های داده‌شده در سلول (۱) حرکت الکترون در مدار بیرونی از X به Cu است، پس X آند و Cu کاتد است ولی در سلول (۲) حرکت الکترون در مدار بیرونی از Cu به Y است، پس Cu آند و Y کاتد است؛ بنابراین مقایسه قدرت کاهندگی این سه تیغه چنین است:

$$X > Cu > Y$$

گزینهٔ ۱: نادرست؛ مقایسه قدرت اکسندگی کاتیون مربوط به این سه الکترود فلزی چنین است:

$$X^{n'+} < Cu^{2+} < Y^{n+}$$

برای مقایسه قدرت اکسندگی $X^{n'+}$ و S^{2+} با توجه به سلول (۱) ابتدا پتانسیل کاهشی X را محاسبه می‌کنیم:

$$emf\,(1) = E°(Cu) - E°(X) \Rightarrow 1/08 = 0/34 - E°(X) \Rightarrow E°(X) = -0/74$$

پس قدرت کاهندگی X از Sn بیشتر و قدرت اکسندگی $X^{n'+}$ از Sn^{2+} کمتر است:

$$X^{n'+} < Sn^{2+} < Cu^{2+} < Y^{n+}$$

گزینهٔ ۲: نادرست

$$emf\,(2) = E°(Y) - E°(Cu) \Rightarrow 0/46 = E°(Y) - 0/34 \Rightarrow E°(Y) = 0/8$$

بنابراین emf سلول گالوانی تشکیل شده از دو نیم‌سلول X و Y که در آن X با پتانسیل منفی‌تر، نقش آند و Y با پتانسیل مثبت‌تر، نقش کاتد را دارد برابر است با:

$$emf = E°(Y) - E°(X) = 0/8 - (-0/74) = 1/54$$

گزینهٔ ۳: نادرست؛ اگر در سلول (۱) به‌جای نیم‌سلول X، نیم‌سلول Sn قرار گیرد تغییری در جهت جریان ایجاد نمی‌شود؛ زیرا همچنان Sn از Cu کاهنده‌تر است، ولی در سلول (۲) جهت جریان برعکس می‌شود.

گزینهٔ ۴: درست؛ اگر تغییر جرم تیغهٔ مس در هر دو سلول برابر باشد، شمار الکترون‌های مبادله‌شده در دو سلول نیز برابر است؛ زیرا هر Cu^{2+} با گرفتن ۲ الکترون و یا هر اتم Cu با از دست دادن ۲ الکترون در واکنش شرکت می‌کند.

۱۰۰- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

$$Cl_2 + MnO_4^- + H^+ \rightarrow ClO_3^- + Mn^{2+} + H_2O \sim 10e^-$$

0 +۷ ۵×۱=۱ +۵ +۲

۲×۵=۲

ابتدا تغییر عدد اکسایش دو گونه کاهنده و اکسنده را به‌دست می‌آوریم. سپس در زیروند مربوط به آن‌ها ضرب می‌کنیم. اگر دو عدد به‌دست آمده قابل ساده شدن باشند، آن‌ها را ساده می‌کنیم. در پایان دو عدد به‌دست آمده را به شکل ضربدری در سمت چپ جابه‌جا می‌کنیم.

$$Cl_2 + 2MnO_4^- + 4H^+ \rightarrow 2ClO_3^- + 2Mn^{2+} + 2H_2O \sim 10e^-$$

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد پس از موازنه برابر ۱۳ است.

یون MnO_4^- اکسنده است، پس:

$$2MnO_4^- \sim 10e^-$$

$$\frac{0/4\,mol}{2\,mol} = \frac{?\,mol}{10\,mol} \Rightarrow ? = 2$$

۱۰۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

گزینهٔ ۱: درست؛ آنتالپی فروپاشی LiF از KBr بیشتر است.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ آنتالپی فروپاشی MgO از AlF_3 کمتر است.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ آنتالپی فروپاشی KBr از NaCl کمتر است.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ آنتالپی فروپاشی CaO از Al_2O_3 کمتر است.

۱۰۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

$$\text{درصد جرمی آب در نمونه جدید} = \frac{\text{جرم آب افزوده شده + جرم آب در نمونه اولیه}}{\text{جرم آب افزوده شده + جرم نمونه اولیه}} \times ۱۰۰$$

$$۲۰ = \frac{۱۰+m}{۱۰۰+m} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۲۰۰۰ + ۲۰m = ۱۰۰۰ + ۱۰۰m \Rightarrow ۱۰۰۰ = ۸۰m \Rightarrow m = ۱۲/۵$$

$$\text{درصد جرمی سیلیس در نمونه جدید} = \frac{\text{جرم سیلیس در نمونه}}{\text{جرم آب افزوده شده + جرم نمونه اولیه}} \times ۱۰۰ = \frac{۳۶\,g \text{ سیلیس}}{(۱۰۰+۱۲/۵)\,g} \times ۱۰۰ = ٪۳۲$$

۱۰۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

گزینهٔ ۱: نادرست؛ هر دو تغییر بیان شده تعادل را در جهت برگشت جابه‌جا می‌کنند.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ هرچند که خارج کردن مقداری Cl_2 سبب می‌شود که تعادل در جهت تولید فراورده‌ها جابه‌جا شوند ولی مقدار Cl_2 در تعادل جدید از مقدار آن در تعادل اولیه کمتر خواهد بود؛ زیرا جابه‌جایی تعادل بخشی از مقدار خارج‌شده را جبران می‌کند. همچنین افزودن SO_2 نیز سبب جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت می‌شود.

گزینهٔ ۳: نادرست؛ تعادل گرماگیر است، پس کاهش دما سبب جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت می‌شود.

گزینهٔ ۴: درست؛ افزایش دما سبب می‌شود که تعادل گرماگیر در جهت رفت و تولید فراورده‌ها جابه‌جا شود. همچنین کاهش حجم ظرف سبب می‌شود که غلظت مولی تمام گونه‌های گازی موجود در تعادل افزایش یابد.

۱۰۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

گزینهٔ ۱: نادرست؛ هرچه فاصلهٔ قله تا واکنش‌دهنده‌ها کمتر باشد، فقط می‌توان گفت که مقدار انرژی فعال‌سازی کمتر است و در مورد ΔH واکنش و در نتیجه مجموع آنتالپی‌های پیوند مواد نمی‌توان اظهار نظر کرد.

گزینهٔ ۲: نادرست؛ هرچه فاصلهٔ قله تا فراورده‌ها کمتر باشد، تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها با سطح انرژی فراورده‌ها بیشتر است و ΔH واکنش مثبت‌تر است.

گزینهٔ ۳: درست؛ هرچه فاصلهٔ قله تا واکنش‌دهنده‌ها بیشتر باشد، مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش بیشتر است.

گزینهٔ ۴: نادرست؛ هرچه فاصلهٔ قله تا فراورده‌ها بیشتر باشد، مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش در جهت برگشت بیشتر است ولی در مورد گرمای آزادشده از واکنش نمی‌توان اظهارنظر درستی کرد؛ زیرا گرمای آزادشده در واکنش به اختلاف سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها وابسته است.

۱۰۵- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

ابتدا در دمای $b°C$ مقدار فراورده HI را به‌دست می‌آوریم:

$$H_2(g) + I_2(g) \rightleftharpoons 2HI(g)$$

در لحظهٔ تعادل: $۱-x \quad ۱-x \quad ۰+2x$

$$۴ = \frac{(2x)^2}{(1-x)^2} \Rightarrow ۲ = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow ۲-2x = 2x \Rightarrow x = ۰/۵ \Rightarrow \text{بازده درصدی} = \frac{۰/۵}{۱} \times ۱۰۰ = ٪۵۰$$

(توجه داشته باشید که در محاسبات K حجم ظرف بی‌تأثیر است؛ زیرا مجموع مول‌های گازی دو سمت تعادل برابر است.)

بازده درصدی در دمای $b°C$ برابر ٪۵۰ است؛ زیرا تنها نیمی از واکنش‌دهنده‌ها مصرف شده‌اند.

اکنون بازده درصدی را در دمای $a°C$ به‌دست می‌آوریم:

$$H_2(g) + I_2(g) \rightleftharpoons 2HI(g)$$

در لحظهٔ تعادل: $۱-x \quad ۱-x \quad ۰+2x$

$$۰/۰۱ = \frac{(2x)^2}{(1-x)^2} \Rightarrow ۰/۱ = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow ۰/۱-۰/۱x = 2x \Rightarrow ۲/۱x = ۰/۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲۱} \Rightarrow \text{بازده درصدی} = \frac{\frac{۱}{۲۱}}{۱} \times ۱۰۰ = ٪\frac{۱۰۰}{۲۱}$$

اکنون نسبت بازده درصدی واکنش را در دو دمای a و b به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۵۰}{\frac{۱۰۰}{۲۱}} = \frac{۲۱}{۲} = ۱۰/۵$$