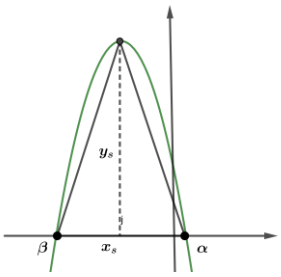
۱۱۱) راس سهمی $y=-۸x^۲+ax+۱$ و صفرهای آن، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{۲۷}{۶۴}$ است. اگر بخش بزرگ‌تری از مساحت مثلث در ناحیه دوم باشد، مقدار a کدام است؟



۱) -۲ ۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) ۲ ۴) $-۴\sqrt{۲}$

با توجه به اینکه بخش بزرگ‌تری از مساحت مثلث در ناحیه دوم است، پس طول راس سهمی منفی است. یعنی:

$$x_s=-\frac{a}{۲(-۸)}=\frac{a}{۱۶}<۰\longrightarrow a<۰$$

در نتیجه گزینه‌های ۲ و ۳ که مثبت هستند، حذف می‌شوند. قاعده مثلث همان اختلاف ریشه‌ها، یعنی $|\alpha-\beta|$ و ارتفاع آن همان عرض راس سهمی یعنی y_s است. بنابراین خواهیم داشت:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{a^۲-۴(-۸)(۱)}}{|-۸|}=\frac{\sqrt{a^۲+۳۲}}{۸}$$

$$y_s=-۸(\frac{a}{۱۶})^۲+a(\frac{a}{۱۶})+۱=\frac{a^۲+۳۲}{۳۲}$$

$$s=\frac{۲۷}{۶۴}\to\frac{۱}{۲}|\alpha-\beta|y_s=\frac{۲۷}{۶۴}\to\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{a^۲+۳۲}}{۸}\times\frac{a^۲+۳۲}{۳۲}=\frac{۲۷}{۶۴}\to$$
$$(\sqrt{a^۲+۳۲})^۳=۳^۳\times۲^۳=۶^۳\to a^۲+۳۲=۶\to a=\pm۲$$

از ابتدا مشخص شد که $a<۰$ است. پس $a=-۲$

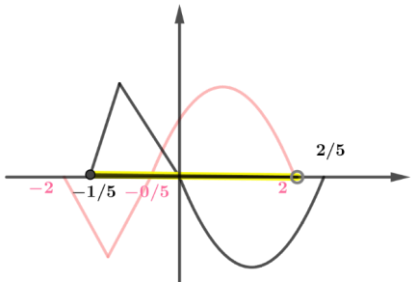
توجه: $a^۲+۳۲=\sqrt{a^۲+۳۲}\times\sqrt{a^۲+۳۲}$

گزینه صحیح: گزینه ۱

مبحث تفاضل ریشه‌ها و طول و عرض راس سهمی

درجه سختی تست: متوسط

۱۱۲) نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم شده و $g(x)=-f(x+\frac{۱}{۲})$ اگر $h=\frac{f}{g}$ باشد، دامنه h شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

نمودار تابع f را ۰/۵ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g (نمودار قرمز رنگ) به دست آید. قسمت اشتراک دامنه بازه $[-۱/۵,۲)$ (قسمت زرد رنگ) می‌باشد. لذا خواهیم داشت:

$$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{x|g(x)=۰\}\rightarrow$$

$$D_{\frac{f}{g}}=[-۱/۵,۲]-\{-۰/۵\}$$

اعداد صحیح این بازه عبارتند از: $\{-۱,۰,۱\}$

گزینه صحیح: گزینه ۳

مباحث انتقال توابع و اعمال روی توابع

درجه سختی تست: متوسط

۱۱۳) هرکدام از ریشه‌های معادله‌ای ۰/۵ واحد از یکی از ریشه‌های معادله $x^2+1/35x-1/3$ کمتر است. حاصل‌ضرب ریشه‌های آن معادله کدام است؟

۱) $-0/375$ ۲) $-0/3$ ۳) $-1/3$ ۴) $-1/375$

$$p=\frac{c}{a}=-1/3$$
$$s=-\frac{b}{a}=-1/35$$
$$\alpha'=(\alpha-0/5)$$
$$\beta'=(\beta-0/5)$$
$$p'=\alpha'\times\beta'=(\alpha-0/5)(\beta-0/5)=\alpha\beta-0/5(\alpha+\beta)+0/25=$$
$$p-0/5s+0/25=-1/35-0/5(-1/3)+0/25=-0/375$$

گزینه صحیح: گزینه ۱

مبحث جمع و ضرب ریشه‌ها

درجه سختی تست: آسان

۱۱۴) نمودارهای f و g به‌صورت زیر است. اگر بازه I، دامنه $gof(\frac{۱}{۲}x)$ باشد، طول بازه I کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱

۳) ۱/۵ ۴) ۳



$$D_f = [-۳, ۰]$$

$$D_g = x > -\frac{۱}{۲}$$

$$f(x) = -\frac{۲}{۳}x - ۲$$

از آنجا که در تابع $f(\frac{۱}{۲}x)$ تغییر روی x است. و تغییرات روی x برعکس عمل می‌کند، پس x های تابع f دو برابر می‌شوند. لذا دامنه تابع $f(\frac{۱}{۲}x)$ بازه $[-۶, ۰]$ خواهد بود. و با توجه به نمودار $f(\frac{۱}{۲}x)$ (نمودار قرمز رنگ) به‌راحتی می‌توان معادله خط $f(\frac{۱}{۲}x)$ را نوشت و با توجه به تعریف دامنه تابع مرکب خواهیم داشت:

$$f(\frac{۱}{۲}x) = -\frac{۱}{۳}x - ۲$$

$$D_{gf(\frac{۱}{۲}x)} = \left\{\frac{۱}{۲}x \in D_f \,\middle|\, f(\frac{۱}{۲}x) \in D_g\right\} = \left\{-۳ \le \frac{۱}{۲}x \le ۰ \,\middle|\, -\frac{۱}{۳}x - ۲ > -\frac{۱}{۲}\right\} \rightarrow$$

$$D_{gf(\frac{۱}{۲}x)} = \left\{-۶ \le x \le ۰ \,\middle|\, x < -\frac{۹}{۲}\right\} = \left[-۶, -\frac{۹}{۲}\right) = [-۶, -۴/۵) \rightarrow I = -۴/۵ - (-۶) = ۱/۵$$

گزینه صحیح: گزینه ۳

مبحث دامنه تابع مرکب

درجه سختی تست: متوسط

۱۱۵) اگر $\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x}=\frac{۲}{\sqrt{۷}}$ و در ربع سوم باشد، حاصل $\sin x-\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}\sqrt{۲}$

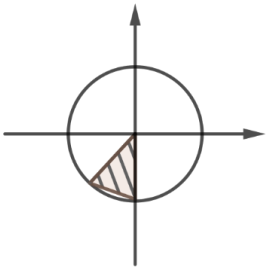
طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا رادیکال‌ها را از بین ببریم.

$$(\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x})^{۲}=(\frac{۲}{\sqrt{۷}})^{۲}\rightarrow \tan x+\cot x-۲=\frac{۴}{۷}\rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{۱۸}{۷}\rightarrow \frac{۲}{\sin ۲x}=\frac{۱۸}{۷}\rightarrow \sin ۲x=\frac{۷}{۹}$$

طرفین معادله $\sin x-\cos x$ را به توان ۲ می‌رسانیم

$$(\sin x-\cos x)^{۲}=۱-\sin ۲x=۱-\frac{۷}{۹}=\frac{۲}{۹}\rightarrow \sin x-\cos x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

از آنجا که $\tan x$ و $\cot x$ هر دو در ناحیه سوم مثبت هستند. و $\sqrt{\tan x}-\sqrt{\cot x}>۰$ است. در نتیجه در دایره مثلثاتی در ناحیه مشخص شده قرار داریم و لذا $\sin x-\cos x$ منفی است. پس گزینه ۴ درست است.



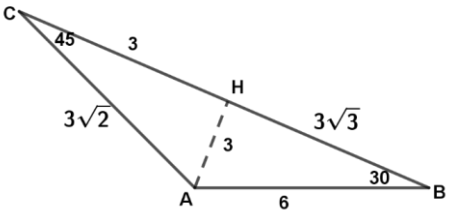
گزینه صحیح: گزینه ۴

مبحث روابط مثلثاتی

درجه سختی تست: متوسط

۱۱۶) در مثلث ABC اندازه زوایای ACB و ABC به‌ترتیب ۴۵ و ۳۰ درجه است. اگر $AB=۶$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟

۱) $۳(۱+\sqrt{۲})$ ۲) $۳(۱+\sqrt{۳})$ ۳) $۴(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $۴(۱+\sqrt{۳})$



در مثلث AHB ضلع روبه رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر (نصف ۶) است.

درنتیجه: $AH=۳$

با استفاده از فیثاغورث داریم: $BH=\sqrt{۳۶-۹}=\sqrt{۲۷}=۳\sqrt{۳}$

در مثلث AHC ضلع روبه رو به زاویه ۴۵ درجه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است.

.در نتیجه: $\frac{\sqrt{۲}}{۲}AC=۳\rightarrow AC=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}$

با استفاده از فیثاغورث داریم: $CH=\sqrt{(۳\sqrt{۲})^{۲}-۳^{۲}}=\sqrt{۱۸-۹}=۳$

و در نهایت: $BC=CH=BH=۳+۳\sqrt{۳}=۳(۱+\sqrt{۳})$

گزینه صحیح: گزینه ۲

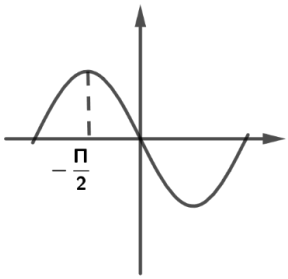
مبحث مثلثات (مثلث قائم‌الزاویه)

درجه سختی تست: آسان

۱۱۷) تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۳x)$ روی بازه $[a,۰]$ اکیدا نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۱۲}$ ۲) $-\frac{\pi}{۸}$ ۳) $-\frac{\pi}{۴}$ ۴) $-\frac{\pi}{۶}$

$$f(x)=-\frac{۱}{۲}\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۳x)=-\frac{۱}{۲}\sin ۳x$$



نمودار روبه‌رو نمودار تابع $\sin x-$است. که در بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},۰\right]$ نزولی است.

پس تابع $-\sin ۳x$ در بازه $\left[-\frac{\pi}{۶},۰\right]$ نزولی است. (تغییرات روی x برعکس است xها را به‌جای آنکه در ۳ ضرب کنیم بر ۳ تقسیم می_کنیم.)

$$[a,۰]=\left[-\frac{\pi}{۶},۰\right]\rightarrow a=-\frac{\pi}{۶}$$

گزینه صحیح: گزینه ۴

مبحث مثلثات (نسبت‌های مثلثاتی)

درجه سختی تست: آسان

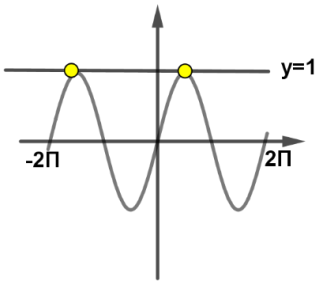
۱۱۸) تعداد جواب‌های معادله $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{۲}+x)+۱=۲\sin(\pi-x)$ در بازه $[-۲\pi,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\pi+x)=-\sin x\\ \cos(\frac{\pi}{۲}+x)=-\sin x\\ ۲\sin(\pi-x)=۲\sin x\end{array}\right\}\rightarrow \sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{۲}+x)+۱=۲\sin(\pi-x)=(-\sin x)(-\sin x)+۱=۲\sin x\rightarrow$$

$$\sin^{۲}x-۲\sin x+۱=۰\rightarrow(\sin x-۱)^{۲}=۰\rightarrow\sin x=۱$$

با رسم نمودار $\sin x=۱$ مشاهده می‌شود که معادله در بازه مورد نظر ۲ جواب دارد.



گزینه صحیح: گزینه ۲

مبحث مثلثات (معادلات مثلثاتی)

درجه سختی تست: آسان

۱۱۹) حاصل $(۰/۲۵)^{۱-\log_{۴}^{۱۰}}$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۰۵

$$(۰/۲۵)^{۱-\log_{۴}^{۱۰}}=(\frac{۱}{۴})^{۱-\log_{۴}^{۱۰}}=(۴^{-۱})^{۱-\log_{۴}^{۱۰}}=۴^{-۱}\times ۴^{\log_{۴}^{۱۰}}=\frac{۱}{۴}\times ۱۰=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

نکته: $a^{\log_{a}^{x}}=x$

گزینه صحیح: گزینه ۱

مبحث تابع نمایی و لگاریتم

درجه سختی تست: آسان

۱۲۰) اگر اعداد a و b به داده‌های زیر اضافه شوند، چارک اول و سوم داده‌ها تغییر نمی‌کند. میانگین a و b کدام است؟

۴۵,۱۲,۱۵,۲۳,۱۴,۱۶,۳۴,۱۸,۴۲,۲۵,۱۰

۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۰

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$۱۰,۱۲,\frac{۱۴}{Q_۱},۱۵,۱۶,\frac{۱۸}{Q_۲},۲۳,۲۵,\frac{۳۴}{Q_۳},۴۲,۴۵$$

وقتی a و b به داده‌ها اضافه می‌شوند، تعداد داده‌ها ۱۳ تا می‌شود. چارک اول و سوم هرکدام میانگین دو داده وسط هستند. پس برای آنکه تغییر نکنند a و b باید همان اعداد ۱۴ و ۳۴ باشند. بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{۱۴+۳۴}{۲} = ۲۴$$

گزینه صحیح: گزینه ۳

مبحث آمار (چارک‌ها)

درجه سختی تست: آسان

۱۲۱) نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x+a}$ در دو نقطه نمودار تابع و وارونش را قطع می‌کند. اگر اختلاف طول این نقاط $۲\sqrt{۱۰}$ باشد، کدام مورد می‌تواند مقدار a باشد؟ $(a\neq ۰)$

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

تابع و وارون آن روی خط $y=x$ یکدیگر را قطع می‌کنند. پس کافیست تقاطع f و خط $y=x$ را به‌دست آوریم.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=\frac{۱}{x+a} \\ y=x \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{۱}{x+a}=x \rightarrow x^۲+ax-۱=۰ \rightarrow \rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{\sqrt{a^۲+۴}}{۲}-\frac{a}{۲} \\ x_۲=-\frac{\sqrt{a^۲+۴}}{۲}-\frac{a}{۲} \end{cases}$$

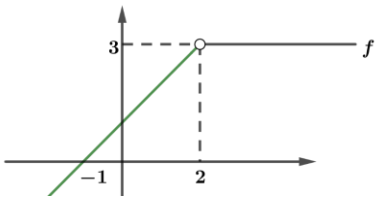
$$\rightarrow x_۱-x_۲=\sqrt{a^۲+۴}=۲\sqrt{۱۰} \rightarrow a^۲+۴=۴۰ \rightarrow a^۲=۳۶ \rightarrow a=۶$$

گزینه صحیح: گزینه ۲

مبحث تابع وارون

درجه سختی تست: آسان

۱۲۲) نمودار تابع f به‌صورت زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۳-f(x)}{x^۲-۴}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۴}$

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۵}$

۴) $-\frac{۱}{۳}$

$$f(x)=\begin{cases}۳ & x>۲\\ x+۱ & x<۲\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳-f(x)}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۳-(x+۱)}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x+۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x+۲}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۱}{x+۲}=-\frac{۱}{۴}$$

گزینه صحیح: گزینه ۱

مبحث حد

درجه سختی تست: آسان

۱۲۳) اگر $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x-|x||}{x^2+2x}=a$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan(ax)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x-|x||}{x^2+2x}=a\to\lim_{x\to 0^-}\frac{|x-(-x)|}{x(x+2)}=a\to\lim_{x\to 0^-}\frac{|2x|}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x(x+2)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{x+2}=-\frac{2}{2}=-1\to a=-1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan(-x)=-\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-(-\infty)=+\infty$$

گزینه صحیح: گزینه ۴

مبحث حد

درجه سختی تست: آسان

۱۲۴) تابع f با ضابطه $f(x)=۱+\frac{۲x}{a}$ است. اگر تابع $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\geq -۱ \\ f^{-۱}(x) & x<-۱ \end{cases}$ روی R پیوسته باشد و محور x را در سمت مثبت محور قطع کند. مقدار $g(-۱)$ کدام است؟ $(a\neq ۰)$

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$g(x)=\begin{cases} ۱+\frac{۲x}{a} & x\geq -۱ \\ \frac{a(x-۱)}{۲} & x<-۱ \end{cases} \rightarrow -۱^{+}=-۱^{-}=f(-۱)\rightarrow ۱-\frac{۲}{a}=-a\rightarrow a^{۲}+a-۲=۰$$

$$\begin{cases} a=۱\rightarrow g(x)=۱+۲x=۰\rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \\ a=-۲\rightarrow g(x)=۱-x=۰\rightarrow x=۱ \end{cases}$$

توجه: برای محاسبه $g(-۱)$ باید از ضابطه بالا استفاده کنیم.

توجه: از آنجا که صورت سوال گفته است که محور x را در سمت مثبت محور قطع کند، پس $x=-\frac{۱}{۲}$ رد می‌شود و $x=۱$ قبول است. بنابراین $a=-۲$

$$g(-۱)=۱-(-۱)=۲$$

گزینه صحیح: گزینه ۳

مبحث پیوستگی و تابع وارون

درجه سختی تست: متوسط

۱۲۵) اختلاف شیب نیم مماس‌های چپ و راست بر منحنی $y=\left|x^{۲}-۴\right|$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

روش اول:

$$y'_{(۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\left|x^{۲}-۴\right|-۰}{x-۲}\to\begin{cases}y'_{(+۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=۴\\ y'_{(-۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=-۴\end{cases}\to ۴-(-۴)=۸$$

روش دوم:

$$y'=\left|۲x\right|\to\begin{cases}y'_{(+۲)}=۲x=۴\\ y'_{(-۲)}=-۲x=-۴\end{cases}\to ۴-(-۴)=۸$$

گزینه صحیح: گزینه ۱

مبحث مشتق

درجه سختی تست: آسان

۱۲۶) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\frac{۹t+۳}{\sqrt{t}}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۱$ چند گرم است؟

۱) ۱۷ ۲) ۷/۵ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

از تابع کسری $m(t)$ مشتق می‌گیریم.

$$m(t)=\frac{۹\sqrt{t}-\frac{۱}{۲\sqrt{t}}(۹t+۳)}{(\sqrt{t})^{۲}} \rightarrow m'(۱)=\frac{۹-\frac{۱}{۲}(۱۲)}{۱}=۹-۶=۳$$

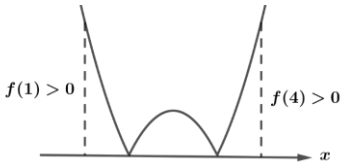
گزینه صحیح: گزینه۳

مبحث مشتق تابع کسری

درجه سختی تست: آسان

۱۲۷) برای چند مقدار طبیعی a، تابع $f(x)=|۲x^۲-۹x+a|$ در بازه $[۱,۴]$ دارای دو مینیمم نسبی است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



تابع $f(x)$ یک تابع سهمی است.لذا تابع $|f(x)|$ به‌صورت شکل مقابل است.

برای آنکه سهمی در ۲ نقطه محور xها را قطع کند باید $\Delta > ۰$ باشد.

برای اینکه ۲ مینیمم در بازه $[۱,۴]$ قرار گیرند با توجه به شکل باید $f(۱) > ۰$ و $f(۴) > ۰$ ه باشند.

پس داریم:

$$\begin{cases} f(۱) > ۰ \to -۷ + a > ۰ \to a > ۷ \\ f(۴) > ۰ \to -۴ + a > ۰ \to a > ۴ \\ \Delta > ۰ \to ۸۱ - ۸a > ۰ \to a < \frac{۸۱}{۸} = ۱۰/۲ \end{cases} \to ۷ < a < ۱۰/۲ \to a = \{۸,۹,۱۰\}$$

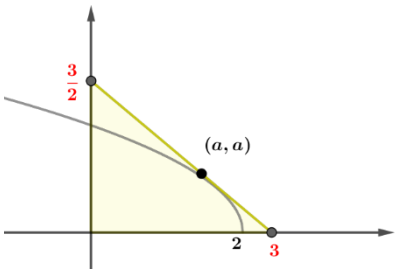
گزینه صحیح: گزینه ۲

مبحث کاربرد مشتق

درجه سختی تست: متوسط

۱۲۸) خطی در نقطه (a,a) بر نمودار تابع $y=\sqrt{۲-x}$ مماس شده و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۱/۷۵



می‌دانیم نقطه واقع بر نمودار در معادله تابع صدق می_کند. پس داریم:

$$a=\sqrt{۲-a}\rightarrow a^{۲}+a-۲=۰\rightarrow\begin{cases}a=۱\\a=-۲\end{cases}$$

با توجه به شکل داریم:

$$a=۱\rightarrow(a,a)=(۱,۱)$$

$$y'=\frac{-۱}{۲\sqrt{۲-x}}\rightarrow y'_{۱}=-\frac{۱}{۲}$$

با توجه به اینکه یک نقطه از خط و شیب خط را داریم معادله خط مماس را می‌نویسیم.

$$y=mx+b\rightarrow ۱=(-\frac{۱}{۲})(۱)+b\rightarrow b=\frac{۳}{۲}\rightarrow$$

$$y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}\rightarrow\begin{cases}x=۰\rightarrow y=\frac{۳}{۲}\\y=۰\rightarrow x=۳\end{cases}$$

با توجه به شکل محل تقاطع خط با محورهای مختصات قاعده و ارتفاع مثلث هستند، پس داریم:

$$s=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times۳=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

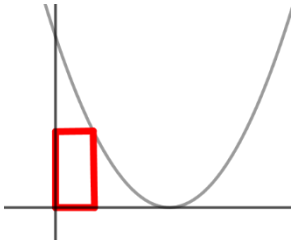
گزینه صحیح: گزینه ۳

مبحث کاربرد مشتق

درجه سختی تست: متوسط

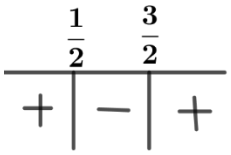
۱۲۹) یک راس مستطیلی واقع بر منحنی $y=۴x^۲-۱۲x+۹$ بوده و سه راس دیگر، روی محورهای مختصات است. اگر این مستطیل بین محورها و نمودار منحنی محاط باشد، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$



$$s=xy=x(۴x^۲-۱۲x+۹)=۴x^۳-۱۲x^۲+۹x$$

$$s'=۱۲x^۲-۲۴x+۹=۰\rightarrow ۴x^۲-۸x+۳=۰\rightarrow \begin{cases} x=\frac{۳}{۲} \\ x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$



$x=\frac{۱}{۲}$ ماکزیمم است. پس داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}\rightarrow s=۴(\frac{۱}{۸})-۱۲(\frac{۱}{۸})+\frac{۹}{۲}=۲$$

گزینه صحیح: گزینه ۱

مبحث کاربرد مشتق

درجه سختی تست: آسان

۱۳۰) ۷ نفر در خط شروع یک مسابقه ایستاده‌اند. به چند طریق ممکن است ۳ نفری که به اشتباه در خط شروع ایستاده‌اند، مجاور هم باشند؟

۱) ۴۲ ۲) ۳۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰



با توجه به شکل به ۵ حالت مختلف ۳ نفر می‌توانند در کنار هم باشند.

دقت کنید که ۳ نفر به !۳ می‌توانند مرتب شوند. (در جایگاه خود باشند.) اما اینکه ۳ نفر در جایگاه خود نباشند را به این صورت حساب می‌کنیم:

فرض می کنیم جایگاه درست این ۳ نفر به صورت زیر باشد:

A	B	C

پس به ۲ حالت زیر ۳ نفری که کنار هم هستند در جایگاه خود قرار ندارند.

B	C	A

C	A	B

جواب نهایی می‌شود:

$$۵\times۲=۱۰$$

گزینه صحیح: گزینه ۴

مبحث شمارش بدون شمارش

درجه سختی تست: سخت

۱۳۱) دو دانش‌آموز، هرکدام تابلوهایی با شماره‌های ۱ تا ۸ در اختیار دارند. هرکدام به تصادف یک تابلو را انتخاب کرده و به هم نشان می‌دهند. اگر عدد روی تابلوی یکی، مضرب دیگری باشد، هردو برنده جایزه می‌شوند. چند درصد احتمال دلرد که آن‌ها برنده شوند؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۲/۵ ۳) ۵۰ ۴) ۷۲/۵

$$n(S) = ۸ \times ۸ = ۶۴$$

$$\begin{cases} (۱,۱)(۱,۲)...(۱,۸) \to ۸ \\ (۲,۱)(۲,۲)(۲,۴)(۲,۶)(۲,۸) \to ۵ \\ (۳,۱)(۳,۳)(۳,۶) \to ۳ \\ (۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۴,۴) \to ۴ \\ (۵,۱)(۵,۵) \to ۲ \\ (۶,۱)(۶,۲)(۶,۳)(۶,۶) \to ۴ \\ (۷,۱)(۷,۷) \to ۲ \\ (۸,۱)(۸,۲)(۸,۴)(۸,۸) \to ۴ \end{cases} \to ۸+۵+۳+۴+۲+۴+۲+۴ = ۳۲ \to n(A) = ۳۲$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۲}{۶۴} = \frac{۱}{۲} = ۵۰\%$$

گزینه صحیح: گزینه ۳

مبحث احتمال

درجه سختی تست: متوسط

۱۳۲) هریک از اعداد ۱ تا ۹ روی یک کارت نوشته شده است. سه کارت به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال هر سه عدد روی کارت فرد هستند. به‌طوری‌که می‌دانیم مجموع آنها هم فرد است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

برای اینکه مجموع ۳ عدد فرد باشد باید هر سه عدد فرد باشند، یا ۲ عدد زوج و یک عدد فرد باشد:

$$n(S)=\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}=۱۰+۶\times۵=۴۰$$

شرط اینکه هر سه عدد فرد باشد:

$$n(A)=\binom{۵}{۳}=۱۰$$

در نتیجه داریم:

$$P(A)=\frac{۱۰}{۴۰}=\frac{۱}{۴}$$

گزینه صحیح: گزینه ۲

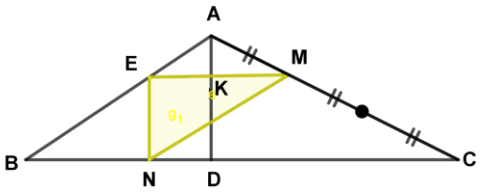
مبحث احتمال شرطی

درجه سختی تست: متوسط

۱۳۳) در شکل زیر، $AD=۶$ و $BC=۹$ است. طول MN چقدر است؟

۱) $۳/۵\sqrt{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۴/۵$ ۴) ۵

در مثلث ABC داریم:



$$\frac{AM}{AC}=\frac{EM}{BC}\rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{EM}{۹}\rightarrow EM=۳$$

می‌دانیم نسبت ارتفاع‌ها همان نسبت تشابه $\frac{۱}{۳}$ است. پس داریم:

$$\frac{AK}{AD}=\frac{۱}{۳}\rightarrow\frac{AK}{۶}=\frac{۱}{۳}\rightarrow AK=۲\rightarrow EN=KD=۶-۲=۴$$

در مثلث زرد رنگ با استفاده از فیثاغورث معروف ۳ و ۴ و۵ خواهیم داشت:

$$MN=۵$$

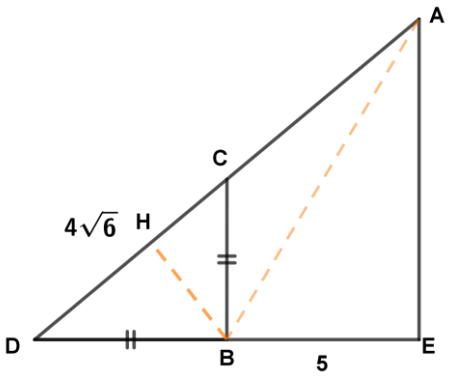
گزینه صحیح: گزینه ۴

مبحث تشابه و تالس

درجه سختی تست: متوسط

۱۳۴) در شکل زیر، $BC = BD$ و B روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طول BD چند برابر طول ارتفاع وارد بر DC است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۳ ۳) ۱/۴ ۴) ۱/۵



هر نقطه روی نیمساز زاویه فاصله‌اش تا دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. نقطه B روی نیمساز زاویه A قرار دارد پس:

$$BH = BE = ۵$$

با توجه به شکل مثلث BDC متساوی‌الساقین است و در مثلث متساوی الساقین ارتفاع میانه نیز هست. بنابراین:

$$DH = ۲\sqrt{۶}$$

در مثلث BDC با استفاده از فیثاغورث داریم:

$$BD = \sqrt{(۲\sqrt{۶})^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۲۴ + ۲۵} = \sqrt{۴۹} = ۷$$

در نتیجه:

$$\frac{BD}{BH} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

گزینه صحیح: گزینه ۳

مبحث ترسیم‌های هندسی

درجه سختی تست: متوسط

۱۳۵) قطرهای یک بیضی روی خطوط $y=x+3$ و $ay-2x=-2$ قرار دارند. اگر مرکز بیضی و محل برخورد قطرهای بیضی با محور xها، رئوس یک مثلث باشند، مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۴/۵ ۴) ۳/۵

می‌دانیم که قطرهای یک بیضی بر هم عمود هستند. یعنی شیب‌های آن‌ها عکس و قرینه یکدیگر است:

$$\frac{2}{a}=-1\rightarrow a=-2$$

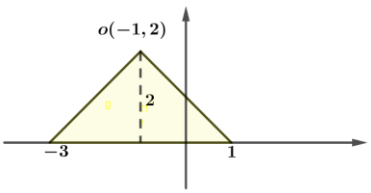
محل برخورد قطرها مرکز بیضی است:

$$\left.\begin{matrix}-2y-2x=-2\\ y=x+3\end{matrix}\right\}\rightarrow -2(x+3)-2x=-2\rightarrow -4x=4\rightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}\rightarrow O(-1,2)$$

محل برخورد قطرهای بیضی را با محور x به‌دست می‌آوریم.

$$y=0\rightarrow \begin{cases}x+3=0\rightarrow x=-3\\ -2x+2=0\rightarrow x=-1\end{cases}$$

مساحت مثلث عبارت است از:



$$s=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$$

گزینه صحیح: گزینه ۱

مبحث بیضی

درجه سختی تست: متوسط

۱۳۶) در نقطه‌ای واقع در ناحیه چهارم، دایره C به مرکز (α,α) و شعاع ۴ با دایره $x^۲+y^۲-۲x-y=۱$ مماس درون است. فاصله مرکز دایره C از مبدا مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۰/۵\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲/۵\sqrt{۲}$

$$x^۲+y^۲-۲x-y-۱=۰$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱-۴(-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

$$\left.\begin{matrix}O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,\frac{۱}{۲})\\ O'(\alpha,\alpha)\end{matrix}\right\}\rightarrow |OO'|=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\alpha-\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{۵}{۲}\rightarrow \sqrt{۲\alpha^۲-۳\alpha+\frac{۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}\rightarrow ۲\alpha^۲-۳\alpha+\frac{۵}{۴}=\frac{۲۵}{۴}\rightarrow$$

$$۲\alpha^۲-۳\alpha-۵=۰\rightarrow\begin{cases}\alpha=-۱\\ \alpha=۲/۵\end{cases}$$

اگر مرکز دایره $(\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۲})$ باشد، محل برخورد در ناحیه چهارم است. پس فاصله این نقطه از مرکز عبارت است از:

$$\sqrt{(\frac{۵}{۲})^۲+(\frac{۵}{۲})^۲}=۲/۵\sqrt{۲}$$

گزینه صحیح: گزینه ۴

مبحث دایره

درجه سختی تست: متوسط

۱۳۷) به‌ازای چند مقدار طبیعی a، عدد $\frac{۱}{۵}$ در بازه $\left[\frac{۱}{۳a+۱}, \frac{۱}{۲a-۳}\right]$ قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\begin{cases} \frac{۱}{۳a+۱} < \frac{۱}{۵} \to ۵ < ۳a+۱ \to ۳a > ۴ \to a > ۱\frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲a-۳} > \frac{۱}{۵} \to \frac{۱}{۲a-۳} - \frac{۱}{۵} > ۰ \to \frac{-۲a+۸}{۵(۲a-۳)} > ۰ \to a \in (۱/۵, ۴) \end{cases} \to a \in (۱/۵, ۴) \to a = \{۲, ۳\}$$

گزینه صحیح: گزینه ۲

مبحث بازه‌ها

درجه سختی تست: آسان

۱۳۸) میانگین جملات دنباله حسابی $a,۱۲,b,c,...,۱۷۲$ برابر ۸۷ است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

۱) ۱۳۹۲ ۲) ۱۴۷۹ ۳) ۱۵۶۶ ۴) ۱۶۵۳

$$\bar{x} = \frac{a+۱۷۲}{۲} = ۸۷ \rightarrow a = ۲$$

$$۲,۱۲,۲۲,... \rightarrow d = ۱۰$$

$$t_n = t_۱ + (n-۱)d \rightarrow ۱۷۲ = ۲ + (n-۱)۱۰ \rightarrow n = ۱۸$$

$$s_n = \frac{n}{۲}[a+I] = \frac{۱۸}{۲}[۲+۱۷۲] = ۱۵۶۶$$

گزینه صحیح: گزینه ۳

مبحث دنباله حسابی

درجه سختی تست: متوسط

۱۳۹) اگر یکی از ریشه‌های معادله $x(۳x^۲+x+a)=-۲$ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند:

$$x=-۲\rightarrow(-۲)(۱۲-۲+a)=۰\rightarrow a=-۱۰$$

معادله را دوباره بازنویسی می‌کنیم

$$۳x^۳+x^۲-۱۰x+۲=۰$$

می‌دانیم که عامل $x+۲$ را دارد یا بر $x+۲$ بخش پذیر است لذا داریم:

$$(x+۲)(۳x^۲-۵x+۱)=۰\rightarrow p_۱=\frac{۱}{۳}\rightarrow p=\frac{۱}{۳}\times(-۲)=-\frac{۲}{۳}$$

گزینه صحیح: گزینه ۲

مبحث تجزیه معادله درجه سوم

درجه سختی تست: آسان

۰۹۰۱۶۷۴۱۲۶
t.me/hamidehgha
hamidehghasem

۱۴۰) اگر $a+\sqrt{b}-c=۶$ و $\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{c}=۳$ باشد، حاصل $\log_{۲}^{c}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) −۱ ۴) −۲

$$a+\sqrt{b}-c=۶\rightarrow a+\sqrt{b}=c+۶$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله دیگر خواهیم داشت:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{c}=۳\rightarrow\sqrt{c+۶}+\sqrt{c}=۳\rightarrow\sqrt{c+۶}=۳-\sqrt{c}$$
$$c+۶=۹-۶\sqrt{c}+c\rightarrow\sqrt{c}=\frac{۱}{۲}\rightarrow c=\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه:

$$\log_{۲}^{c}=\log_{۲}^{۴^{-۱}}=\log_{۲}^{۲^{-۲}}=-۲$$

گزینه صحیح: گزینه ۴

مبحث لگاریتم و معادله گنگ

درجه سختی تست: آسان