

۱- مقادیر a ، $1+2a$ و $5-a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

- (۱) $2/75$ (۲) $4/25$ (۳) $12/25$ (۴) $14/75$ ✓

$$a, 1+2a, 5-a \Rightarrow 2(1+2a) = a + 5 - a \Rightarrow 2 + 4a = 5 \Rightarrow 4a = 3$$

$$a = \frac{3}{4}$$

$$a_9 = a_1 + 8d = \frac{3}{4} + 1 \cdot 2 = \frac{11}{4} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \quad \text{جمله نهم حسابی}$$

۲- اگر P گزاره درست، q گزاره نادرست و r گزاره دلخواه باشد، گزاره $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

- (۱) r (۲) T (۳) $\sim r$ ✓ (۴) $\sim T$

۳- نقاط $(3, -4)$ و $(-1/5, -4)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ ✓ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

$$x_5 = \frac{3 - (-1/5)}{2} = \frac{3 - 1/5}{2} = \frac{14/5}{2} = \frac{7}{5} = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \quad \text{مجموع ریشه‌ها}$$

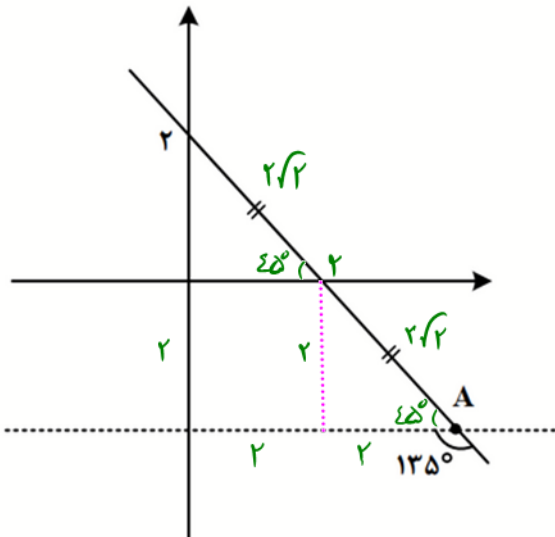
۴- اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{2} \right]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴ ✓

$$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4k^2 - 20}}{1} = \sqrt{4k^2 - 20} = \frac{4}{3}k \quad \xrightarrow{20/4}$$

$$4k^2 - 20 = \frac{16}{9}k^2 \Rightarrow \frac{20}{9}k^2 = 20 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \left[\frac{k^2}{2} \right] = \left[\frac{9}{2} \right] = 4$$

۵- در شکل زیر، فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟



نقطه مختصات A: $(2, -2)$

$$A_{\text{مبدأ}} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$2\sqrt{5}$ (1✓)

$3\sqrt{6}$ (2)

$4\sqrt{3}$ (3)

$5\sqrt{2}$ (4)

۶- اگر $f(x) = x^2 - [x]$ و $f(af(\sqrt{5})) = 2$ باشد، کدام می تواند مقدار a باشد؟

$-\frac{1}{5}$ (4)

$\frac{1}{5}$ (3)

$-\frac{1}{3}$ (2✓)

$\frac{1}{3}$ (1)

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - [\sqrt{5}] = 5 - 2 = 3 \rightarrow f(3a) = 2 \Rightarrow (3a)^2 - [3a] = 2$$

$$\Rightarrow 9a^2 - [3a] = 2 \xrightarrow{\text{با برگی کنیم}} a = -\frac{1}{3}$$

۷- برای چند مقدار صحیح و یک رقمی a، جواب معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-a} = a$ ، عددی صحیح است؟

7 (4)

6 (3✓)

5 (2)

4 (1)

$$\sqrt{x-a} = a - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{با توان ۲}} x-a = a^2 + x - 2a\sqrt{x} \Rightarrow a^2 - 2a\sqrt{x} + a = 0$$

$$\Rightarrow a(a + (1 - 2\sqrt{x})) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2\sqrt{x} - 1 \rightarrow \sqrt{x} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow a = 1, 3, 5, 7, 9 \end{cases}$$

۸- به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + 1$ خط $10y - x = -10$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۵ (۴) ۹ (۳) ۱۲ (۲) ✓ ۱۵ (۱)

$$10y - x = -10 \quad y=1 \rightarrow x=20 \Rightarrow (20, 1) \in f^{-1} \Rightarrow (1, 20) \in f$$

$$\Rightarrow f(1) = 20 \Rightarrow 1 + 6 + a + 1 = 20 \Rightarrow a = 12$$

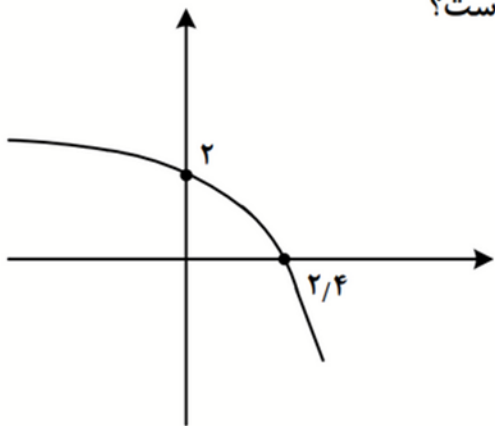
۹- اگر $\log_2(x^2 + 2x + 4) + \log_2(x - 2) = 3$ باشد، مقدار $\log_{\sqrt{2}} x$ کدام است؟

۴ (۴) ✓ ۳ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

$$\log_2(x^2 + 2x + 4)(x - 2) = 3 \Rightarrow x^2 - 4 = 8 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} \sqrt{12} = \log_2 12 = 2$$

۱۰- نمودار تابع $y = c + \log_5(ax + b)$ به صورت زیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟



$$(0, 2) \Rightarrow 2 = c + \log_5 b \quad (1)$$

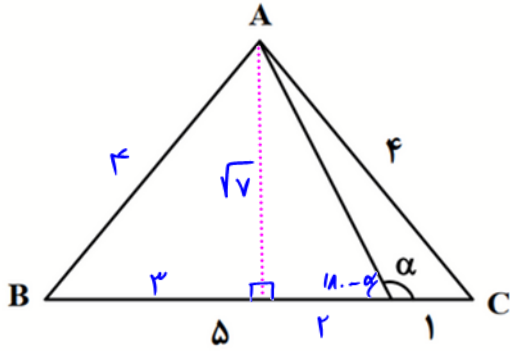
$$(2, 0) \Rightarrow 0 = c + \log_5(2a + b) \quad (2)$$

$-\frac{2}{5}$ (۱) ✓
 $-\frac{2}{5}$ (۲)
 $-\frac{1}{10}$ (۳)
 $-\frac{2}{10}$ (۴)

$$(2) - (1) \Rightarrow \log_5 \frac{2a+b}{b} = -2 \Rightarrow \log_5 \frac{2a+b}{b} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{2a+b}{b} = 5^{-2} \Rightarrow 2a+b = \frac{b}{25} \Rightarrow 25b = -2a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-25}{2} = -\frac{25}{2}$$

۱۱- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الساقین است. مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{7}}{4} = -\tan \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

- (۱) $-\frac{2}{5}$
- (۲) $\frac{2}{5}$
- (۳) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ ✓
- (۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

۱۲- حاصل عبارت $(3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $\frac{1}{2}$ ✓
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin x - \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin 2x}$$

$$x = \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos x > \sin x \rightarrow \sin x - \cos x < 0$$

$$\Rightarrow (3 \cos \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} (-\sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{6}})) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

۱۳- حاصل عبارت $\frac{\sin^4 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) $\cos 2\alpha$ ✓
- (۴) $\sin 2\alpha$

$$\frac{\sin^4 \alpha + 4(1 - \sin^2 \alpha)}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4(1 - \cos^2 \alpha)}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 4}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha - 4 \cos^2 \alpha + 4}{1 + \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{(\sin^2 \alpha - 2)^2}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{(\cos^2 \alpha - 2)^2}{1 + \sin^2 \alpha} = (1 - \sin^2 \alpha) - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$

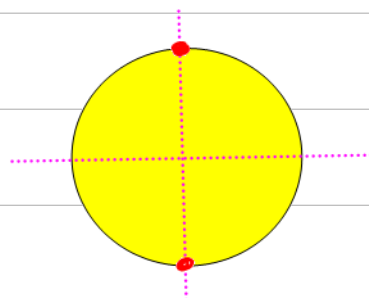
۱۴- مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ در بازه $[-3\pi, \pi]$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $-\pi$ (۳) -3π (۴) -4π ✓

$$1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -2\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

مجموع جواب‌ها = -2π



۱۵- مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - [x^2]}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ ✓ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) صفر

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2 - 2} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

۱۶- اگر $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-3, 0)$ ✓ (۳) $(3, 1)$ (۴) $(1, 0)$

$$f-g = \frac{4}{(x+3)(x-1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{4 - (x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{-x+1}{(x+3)(x-1)}$$

مجموع مجانب‌ها $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2} = 0$$

۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} (1-a)[x] + (3a^2-1)[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام

است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$f(1) = b \sin \frac{\pi}{a}$ (۱)

برای $x=1$ در نظرماند

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [(1-a)[x] + (3a^2-1)[-x]] = (1-a) - 2(3a^2-1) = -6a^2 - a + 3$ (۲)

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(1-a)[x] + (3a^2-1)[-x]] = 0 - (3a^2-1) = 1 - 3a^2$ (۳)

\Rightarrow (۲) (۳) $-6a^2 - a + 3 = 1 - 3a^2 \Rightarrow 3a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$

$a = -1 \xrightarrow{(1)} b \sin(-\pi) = -2 \Rightarrow$ غلط

$a = \frac{2}{3} \xrightarrow{(1)} b \sin \frac{\pi}{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

۱۸- اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۲

$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)} \Rightarrow \frac{f}{g} = (\sqrt{x+8} - \sqrt{x})(\sqrt{x+8} + \sqrt{x}) = x+8 - x = 8$

$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = 0 \Rightarrow f'(1)g(1) - g'(1)f(1) = 0$

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $y = \frac{mx+2}{x-1+m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)

۱ (۱) ۲ (۲✓) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$f'(x) = \frac{m^2 - m - 2}{(x-1+m)^2} \leq 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq m \leq 2 \quad (1)$$

$$1-m \leq 1 \Rightarrow m \geq 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow -1 \leq m \leq 2 \rightarrow m = 0, 1$$

۲۰- به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx+c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی \mathbb{R} مشتق پذیر است. مقدار ac کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴✓) ۵ (۵)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a} = ba + c \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} b & x < a \\ -\frac{1}{x^2} & x > a \end{cases} \Rightarrow f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow b = -\frac{1}{a^2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \cdot a + c \Rightarrow \frac{1}{a} = c \Rightarrow \underline{ac = 2}$$

۲۱- خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳✓) ۴ (۴) ۵ (۵)

$$f(-1) = -4 \Rightarrow -1 + a - b - 1 = -4 \Rightarrow a - b = -2 \quad (1)$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{x=-1} -1 + 2a + b = 0 \Rightarrow a = 2 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{0} = \text{undefined}$$

۲۲- یک کودک ۳ مکعب مستطیل یکسان با رنگ‌های مختلف دارد. او به چند طریق می‌تواند با روی هم قرار دادن یک یا چند تا از آنها یک ستون بسازد؟

۴۲ (۴)

۶۶ (۳)

۷۸ (۲)

۱۵ (۱) ✓

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{3}{2} \times 2! = 6$$

$$\binom{3}{3} \times 3! = 6$$

$$\Rightarrow 3 + 6 + 6 = 15$$

۲۳- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال عدد ظاهر شده یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آنها حداقل ۶ است؟

$\frac{13}{18}$ (۴)

$\frac{11}{18}$ (۳)

$\frac{5}{9}$ (۲) ✓

$\frac{2}{9}$ (۱)

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \{(2, 4)(2, 6)(4, 2)(4, 6)(5, 1)(5, 2)(5, 3)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(1, 5)(2, 5)(3, 5)\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 20 \Rightarrow P(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

۲۴- میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه‌جا می‌کنیم به طوری که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر $\frac{1}{25}$ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{3}{75}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{1}{25}$ (۱) ✓

۲۵- دانش‌آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. ۶۰ درصد از دانش‌آموزان مدرسه A و ۷۰ درصد از دانش‌آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان مدرسه A، $\frac{3}{4}$ تعداد دانش‌آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول‌شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از مدرسه A است؟

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{5}{8}$ (۳)

$\frac{7}{16}$ (۲)

$\frac{9}{16}$ (۱) ✓

$$n(A) = \frac{3}{4} n(B) \xrightarrow{n(A)=x} n(B) = \frac{4}{3}x \rightarrow \text{تعداد کل} = n(A) + n(B) = x + \frac{4}{3}x = \frac{7}{3}x$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{3}{4}x \cdot \frac{1}{7}}{\frac{3}{4}x \cdot \frac{1}{7} + \frac{4}{3}x \cdot \frac{1}{7}} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

