

سؤالات آزمون نهایی درس: هندسه ۳		تعداد صفحه: ۲		رشته:		ریاضی و فیزیک		ساعت شروع: ۸:۰۰ صبح	
دوازدهم		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۵/۲۳		نام و نام خانوادگی:		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه			
دانش آموزان روزانه، بزرگسال، داوطلب آزاد، آموزش از راه دور و ایثارگر داخل و خارج کشور تابستان ۱۴۰۳									
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش azmoon.medu.ir									
ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.								
سؤالات فصل اول									
۱	۰.۵ درست یا نادرستی هر یک از عبارات های زیر را مشخص کنید. الف) برای هر دو ماتریس مربعی هم مرتبه A و B ، در حالت کلی رابطه $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ برقرار است. ب) وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.								
۲	۱.۲۵ ماتریس های $A = \begin{bmatrix} -1 & m \\ -2 & m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ چنان هستند که $C = 3A + 2B$ ماتریس قطری است. مقدار m و مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید.								
۳	۱ با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^5 را محاسبه کنید.								
۴	۱.۲۵ الف) اگر A ماتریس 2×2 و اسکالر باشد و $a_{22} = 3$ در این صورت A و $ A $ را بیابید. ب) دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ 0 & d & 0 \\ e & 0 & f \end{bmatrix}$ ، k عددی حقیقی است) را در نظر بگیرید. با محاسبه $ A $ و $ B $ نشان دهید که: $ B = k A $.								
۵	۱.۵ دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.								
سؤالات فصل دوم									
۶	۰.۵ برای هر یک از عبارات های (الف) و (ب) مورد مناسب را از بین کلمات (سهمی - بیضی - نقطه) انتخاب کرده و در پاسخ برگ وارد کنید (یک مورد اضافی است). الف) فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی در حالتی که صفحه بر محور سطح مخروطی عمود بوده و از راس آن بگذرد. ب) مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.								
۷	۱.۵ نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی متر باشد. (در باره تعداد جواب های مسأله بحث کنید).								
۸	۱.۵ مقدار m را چنان تعیین کنید که دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 2y + m = 0$ با دایره به مرکز $O(2, -3)$ و شعاع ۳ مماس بیرون باشد.								

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: هندسه ۳		رشته: ریاضی و فیزیک	
دوازدهم		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۵/۲۳	ساعت شروع: ۸:۰۰ صبح
		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال، داوطلب آزاد، آموزش از راه دور و ایثارگر داخل و خارج کشور تابستان ۱۴۰۳			
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش azmoon.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح		
نمره			
۱	الف) نادرست (۰/۲۵) صفحه ۲۱ کتاب درسی	ب) درست (۰/۲۵) صفحه ۲۳ کتاب درسی	۰.۵
۲	<p>صفحات ۱۲ و ۱۶ کتاب درسی</p> $C = 3A + 2B = \begin{bmatrix} -3 & 3m \\ -6 & 3m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3m-6 \\ 0 & 3m+2 \end{bmatrix}$ <p>(اگر به صورت مستقیم ماتریس C محاسبه شده بود (۰/۷۵) نمره داده شود.)</p> $\frac{3m-6=0 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2}{0/25} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 9 = \text{مجموع درایه های قطراسلی} \quad (0/25)$		
۳	<p>صفحه ۲۰ کتاب درسی</p> <p><u>روش اول:</u></p> $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I \Rightarrow A^4 = A^2 \times A^2 = (2I) \times (2I) = 4I^2 = 4I$ $\Rightarrow A^5 = A \times A^4 = A \times (4I) = 4A \quad \text{یا} \quad A^5 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ <p><u>روش دوم:</u></p> $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I \Rightarrow A^3 = A \times A^2 = A \times (2I) = 2A$ $\Rightarrow A^5 = A^2 \times A^3 = (2I) \times (2A) = 4A \quad \text{یا} \quad A^5 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ <p><u>روش سوم:</u></p> $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow A^4 = A \times A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^5 = A \times A^4 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ <p>در صورتی که دانش آموزان محترم با پنج بار متوالی ضرب ماتریس توان پنجم ماتریس را به دست آورده باشند، به پاسخ نمره کامل تعلق گیرد</p>		

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: هندسه ۳		رشته: ریاضی و فیزیک	
دوازدهم		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۵/۲۳	ساعت شروع: ۸:۰۰ صبح
مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش azmoon.medu.ir	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال، داوطلب آزاد، آموزش از راه دور و ایثارگر داخل و خارج کشور تابستان ۱۴۰۳			
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره	
۴	الف) صفحه ۳۰ کتاب درسی	۱.۷۵	
	ب) صفحه ۳۱ کتاب درسی		
	$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 9 \quad \text{○/۲۵}$		
	$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ 0 & d & 0 & 0 & d \\ e & 0 & f & e & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A = (adf + 0 + 0) - (edc + 0 + 0) = adf - edc \quad \text{○/۵}$		
	$\begin{vmatrix} ka & kb & kc & ka & kb \\ 0 & d & 0 & 0 & d \\ e & 0 & f & e & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow B = kadf - kedc = k(adf - edc) = k A \quad \text{○/۲۵}$		
چنانچه مقدار دترمینان ماتریس های A و B به روش بسط نسبت به یک سطر یا ستون به دست آمده باشد هر مورد ۰/۵ نمره و به مقایسه و نتیجه گیری هم ۰/۲۵ نمره تعلق گیرد			
۵	صفحه ۲۵ کتاب درسی	۱.۵	
	نگارشی دیگر:		
	$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 6 - 4 = 2, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (○/۲۵)} \\ y = 2 \text{ (○/۲۵)} \end{cases}$		
	$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = 6 - 4 = 2, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (○/۲۵)} \\ y = 2 \text{ (○/۲۵)} \end{cases}$		
۶	الف) نقطه (○/۲۵) صفحه ۳۵ کتاب درسی	۰.۵	ب) سهمی (○/۲۵) صفحه ۵۱ کتاب درسی
۷	صفحه ۳۹ کتاب درسی	۱.۵	
	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۲cm باشند، دایره ای به مرکز A با شعاع ۲cm می باشد (○/۲۵) و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۳cm باشند، دو خط L و L' موازی با d و به فاصله ۳cm از آن هستند (○/۲۵). نقطه برخورد آن دایره با این دو خط موازی (L و L')، جواب مسأله است. (○/۲۵)		
بحث در وجود جواب:			
حالت اول: دایره یکی از خطوط L یا L' را در دو نقطه قطع می کند. در این حالت مسأله دو جواب دارد. (○/۲۵)			
حالت دوم: دایره بر یکی از خطوط L یا L' مماس است. در این حالت مسأله یک جواب دارد. (○/۲۵)			
حالت سوم: دایره هیچ یک از خطوط L و L' را قطع نمی کند. در این حالت مسأله فاقد جواب است. (○/۲۵)			
(اگر حالت های بالا با رسم شکل بیان شده باشد به هر حالت (○/۲۵) نمره تعلق گیرد.)			

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: هندسه ۳		رشته: ریاضی و فیزیک	
دوازدهم		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۵/۲۳	ساعت شروع: ۸:۰۰ صبح
		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال، داوطلب آزاد، آموزش از راه دور و ایثارگر داخل و خارج کشور تابستان ۱۴۰۳			
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش azmoon.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح		
نمره			
۱۰	الف) صفحه ۴۹ کتاب درسی		
	روش اول: $\begin{cases} 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \\ 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}, \quad \underbrace{a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}}_{\circ/25} \Rightarrow \underbrace{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}}_{\circ/25}$		
۱۰	روش دوم: $\begin{cases} 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \\ 2b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}, \quad \underbrace{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}}_{\circ/25}$		
	ب) صفحه ۴۷ کتاب درسی		
۱۰	محل تلاقی PF' با بیضی را M می نامیم (یا مشخص کردن M روی شکل). (۰/۲۵)		
۱۰	در مثلث PMF بنا بر قضیه نامساوی مثلث داریم: $\underbrace{PF + MP}_{\circ/25} > MF$		
۱۰	پس با افزودن MF' به طرفین نامساوی خواهیم داشت:		
۱۰	$\underbrace{PF + MP + MF'}_{\circ/25} > MF + MF' \Rightarrow \underbrace{PF + PF'}_{\circ/25} > 2a$		
۱۰	نگارشی دیگر:		
۱۰	محل تلاقی PF' با بیضی را M می نامیم (یا مشخص کردن M روی شکل). (۰/۲۵)		
۱۰	$PF + PF' = \underbrace{PF + PM}_{\circ/25} + \underbrace{MF'}_{\circ/25} > \underbrace{MF + MF'}_{\circ/25} = 2a$		
۱۰	صفحه ۵۵ کتاب درسی		
۱۰	$\underbrace{y^2 - 4y = 4x \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 4x + 4 \Rightarrow (y - 2)^2 = 4(x + 1)}_{\circ/25}$		
۱۰	لذا سهمی فوق یک سهمی افقی رو به راست می باشد و در آن داریم:		
۱۰	$\begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{S(-1, 2)}_{\circ/5} \text{ راس سهمی و } \underbrace{4a = 4 \Rightarrow a = 1}_{\circ/25}$		
۱۰	خط هادی $\underbrace{x = -2}_{\circ/25}$ و کانون $\underbrace{F(0, 2)}_{\circ/25}$		
۱۰	(اگر خواسته های سوال از روی شکل مشخص شده بود همانند بارم بندی بالا نمره تعلق گیرد.)		
۱۲	الف) $x = 2$ (۰/۲۵) صفحه ۶۶ کتاب درسی (ب) $(2, 1, 0)$ (۰/۲۵) صفحه ۷۶ کتاب درسی		
۱۲	پ) صفر (۰/۲۵) صفحه ۸۲ کتاب درسی (ت) $-3\vec{k}$ یا $(0, 0, -3)$ (۰/۲۵) صفحه ۸۲ کتاب درسی		

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: هندسه ۳		رشته: ریاضی و فیزیک
دوازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۵/۲۳	ساعت شروع: ۸:۰۰ صبح
مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه		مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش azmoon.medu.ir
دانش آموزان روزانه، بزرگسال، داوطلب آزاد، آموزش از راه دور و ایثارگر داخل و خارج کشور تابستان ۱۴۰۳		
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۳	<p>صفحه ۷۹ کتاب درسی</p> <p><u>روش اول:</u> فرض می کنیم θ زاویه بین دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} باشد، در این صورت:</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \theta \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \theta \leq \vec{a} \vec{b} (1) = \vec{a} \vec{b} $ <p><u>روش دوم:</u> فرض می کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ در این صورت:</p> $ \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a} \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} ^2 \leq \vec{a} ^2 \vec{b} ^2 \Leftrightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$ $\Leftrightarrow a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 + 2a_2 a_3 b_2 b_3 \leq a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2$ $\Leftrightarrow 0 \leq a_1^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a_1 b_1 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_1 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_1 - a_3 b_1)^2$ <p>چون رابطه اخیر همواره درست بوده و روابط بالا بازگشت پذیرند پس حکم همواره برقرار است. (۵/۲۵)</p>	۱
۱۴	<p>صفحات ۸۰ و ۸۴ کتاب درسی</p> $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = (3, -1, 1) - (1, 0, 1) = (2, -1, 0)$ $\vec{c} \cdot \vec{b} = 2 + 0 + 0 = 2$ $ \vec{b} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow \vec{c}' = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = \frac{2}{2} (1, 0, 1) = (1, 0, 1)$	۱.۷۵
۱۵	<p>صفحه ۸۴ کتاب درسی</p> $\vec{AB} = (-1, -2, 0)$ $\vec{AC} = (-1, 0, 3)$ $\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = (-6, 3, -2) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AC} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 9 + 4} = \frac{7}{2}$	۱.۵

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: هندسه ۳		رشته: ریاضی و فیزیک	
دوازدهم		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۵/۲۳	ساعت شروع: ۸:۰۰ صبح
		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال، داوطلب آزاد، آموزش از راه دور و ایثارگر داخل و خارج کشور تابستان ۱۴۰۳			
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش azmoon.medu.ir			
ردیف	راهنمای تصحیح		
نمره			
صفحه ۸۳ کتاب درسی			
روش اول:			
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow V = \underbrace{ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) }_{\circ/۲۵} = -2 = 2$			
روش دوم:			
$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1, 1, -1) \Rightarrow \underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}_{\circ/۲۵} = 0 - 1 - 1 = -2 \Rightarrow V = \underbrace{ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) }_{\circ/۲۵} = -2 = 2$			
(اگر برای محاسبه حجم متوازی السطوح از ترتیب های دیگر ضرب مختلط استفاده شده بود مشابه بالا نمره داده شود.)			