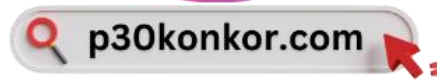


# بانک سوالات نهایی ریاضی تجربی دوازدهم

نسخه پرسش و پاسخ

▪ آبدیت: دی ۱۴۰۴



\* نشر و اشتراک گذاری این فایل، مورد رضایت نمی باشد.

در صورتی که این فایل را خریداری نکرده اید، با مبلغ کمی، می توانید آن را از سایتمون پرداخت نمایید.

[P30konkor.com](http://P30konkor.com)

پی سی کنکور

# فصل ۱



# فصل ۱



درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با (ص/غ) مشخص کنید

دی ۱۴۰۴	<p>الف) تابع <math>y = \sin x</math> یکنواست .</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>الف) نادرست (۰/۲۵) (ص ۷)</p>	۱
شهریور ۱۴۰۴	<p>الف) تابع <math>y = 7</math> در دامنه اش هم صعودی و هم نزولی است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>الف) درست (ص ۷) (۰/۲۵)</p>	۲
خرداد ۱۴۰۴	<p>ب) نمودار تابع <math>y = 3f(x)</math> با انبساط نمودار <math>y = f(x)</math> در امتداد محور <math>y</math> ها به دست می آید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>ب) درست (۰/۲۵) صفحه ۱۹</p>	۳
دی ۱۴۰۳	<p>الف) دامنه تابع های <math>y = -2f(x) + 4</math> و <math>y = \frac{1}{5}f(x)</math> با یکدیگر برابر است.</p> <p>ب) اگر تابعی یک به یک باشد، آنگاه اکیداً یکنوا است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>الف) درست (صفحه ۲۱)      ب) نادرست (صفحه ۱۰) هر مورد ۰/۲۵</p>	۴
شهریور ۱۴۰۳	<p>الف) تابع <math>y = f(x)</math> با دامنه <math>\mathbb{R}</math> مفروض است. برد تابع های <math>y = f(3x)</math> و <math>y = f(5x)</math> یکسان است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>الف) درست ص ۲۱ هر مورد ۰/۲۵</p>	۵
خرداد ۱۴۰۳	<p>ج) در تابع <math>f(x) = 4 + \sqrt{x-1}</math> دامنه تابع <math>y = (f^{-1} \circ f)(x)</math> برابر <math>[1, +\infty)</math> است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>ج) درست (۰/۲۵) (صفحه ۲۵)</p>	۶
دی ۱۴۰۲	<p>درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) نمودار تابع <math>y = f\left(\frac{x}{3}\right)</math>، از انقباض افقی نمودار تابع <math>y = f(x)</math> به دست می آید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>الف) نادرست فصل ۱ هر مورد ۰/۲۵</p>	۷
شهریور ۱۴۰۲	<p>الف) تابع <math>y = \sqrt{3}x^3 - \pi x + 1</math> یک دامنه تابع چند جمله ای است.</p> <p>ب) تابع <math>y = \frac{1}{x}</math> در دامنه اش یکنواست.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>الف) درست (۰/۲۵)      ب) نادرست (۰/۲۵)</p>	۸

		صفحات ۲ و ۸	
خرداد ۱۴۰۲	الف) بی شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. پاسخ: الف) درست (۰/۲۵) فصل ۱		۹
دی ۱۴۰۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چند جمله ای از درجه سوم است. ب) نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایین تر از، نمودار تابع $y = x^3$ است. پ) هر تابع یکنوا، یک به یک است. پاسخ: الف) درست (۰/۲۵) فصل ۱ ب) نادرست (۰/۲۵) فصل ۱ پ) نادرست (۰/۲۵) فصل ۱		۱۰
خرداد ۱۴۰۱	الف) تابع $f(x) = \sqrt{2}x - x^2$ یک تابع درجه دوم است. ب) تابع $f(x) = x^3$ ، تابعی اکیدا صعودی است. پاسخ: الف) درست ب) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحات ۲ و ۷		۱۱
دی ۱۴۰۰	الف) تابع $y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x$ یک چند جمله ای از درجه ۳ است. ب) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$ . ج) دو تابع $f(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند. پاسخ: الف) درست ب) درست ج) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحات ۲ و ۲۲ و ۲۹		۱۲
شهریور ۱۴۰۰	الف) دامنه توابع چند جمله ای برابر $\mathbb{R}$ است. ب) دو تابع با ضابطه های $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند. پ) تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ در دامنه اش اکیدا نزولی است. پاسخ: الف) درست ب) درست پ) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحات ۲ و ۷ و ۲۶		۱۳
دی ۹۹	الف) دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است. پاسخ: الف) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۵		۱۴

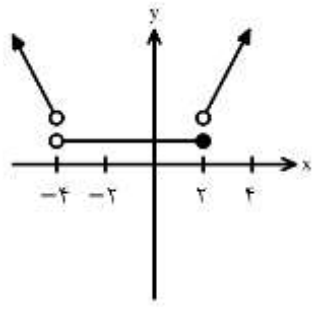
شهریور ۹۹	الف) دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است. پاسخ: الف) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۵	۱۵
خرداد ۹۹	الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. پاسخ: الف) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۷	۱۶
دی ۹۸	الف) برد تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است. پاسخ: الف) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۵	۱۷
شهریور ۹۸	الف) تابع $y = -x^3 + 2$ در دامنه ی تعریفش صعودی است. پاسخ: الف) نادرست (صفحه ۹) ۰/۲۵	۱۸
خرداد ۹۸	الف) دو تابع $f(x) = -\frac{2x+6}{y}$ و $g(x) = \frac{-y}{y}x - 3$ وارون یکدیگرند. (درست ، نادرست) پاسخ: الف) درست ۰/۲۵ صفحه ۲۹	۱۹
 <b>عبارت های زیر را با کلمات مناسب تکمیل کنید.</b>		
شهریور ۱۴۰۳	الف) تابع ..... هم صعودی و هم نزولی است. پاسخ: الف) ثابت ص ۷ هر مورد ۰/۲۵ در قسمت الف کلمه «ثابت» یا هر مثالی از تابع ثابت نمره لحاظ گردد.	۲۰
خرداد ۱۴۰۳	الف) تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار $a$ برابر ..... است. پاسخ: الف) ۲ (۰/۲۵) (صفحه ۱۰)	۲۱
دی ۱۴۰۲	الف) اگر $f(x) = \frac{ x }{1+ x }$ ، مقدار $f \circ f(1)$ برابر ..... است. پاسخ: الف) $\frac{1}{3}$ فصل ۱ هر مورد ۰/۲۵	۲۲

خرداد ۱۴۰۲	الف) اگر $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر با ..... است. ب) نقطه $(-2, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ می باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = f(2x)$ برابر ..... است.	۲۳
	پاسخ: الف) ۵ (۰/۲۵) فصل ۱ ب) $(-1, 4)$ (۰/۲۵) فصل ۱	
دی ۱۴۰۱	الف) اگر $f(x) = 2x^3 - 1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر ..... است.	۲۴
	پاسخ: الف) ۲ (۰/۲۵) فصل ۱	
شهریور ۱۴۰۱	الف) ضابطه تابع وارون $y = x^3$ برابر ..... است.	۲۵
	پاسخ: الف) $\sqrt[3]{x}$ (الف) هر مورد (۰/۲۵) صفحه ۲۹	
خرداد ۱۴۰۱	درجاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) اگر $f = \{(2, 3), (3, 5)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(3)$ برابر ..... است.	۲۶
	پاسخ: الف) ۲ (الف) هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۲۴	
دی ۹۹	الف) در بازه $(0, 1)$ ، نمودار تابع $y = x^3$ ، ..... نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.	۲۷
	پاسخ: الف) پایین (الف) هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۴	
شهریور ۹۹	الف) توابع اکیداً یکنوا، همواره ..... هستند.	۲۸
	پاسخ: الف) یکنوا (الف) هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۷	
دی ۹۸	الف) تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود، تابع ..... نامیده می شود.	۲۹
	پاسخ: الف) ثابت (الف) هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۷	
	<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	
	گزینه مناسب را انتخاب کنید.	
خرداد ۱۴۰۱	الف) برد تابع $f$ بازه $[-3, 1]$ است. برد تابع $y = -2f(3x-1) + 3$ کدامیک از موارد زیر است؟ الف) $[-8, 0]$ ب) $[-12, 0]$ پ) $[1, 9]$ ت) $[-10, 2]$	۳۰
	پاسخ: الف) پ هر مورد ۰/۵ نمره صفحه ۲۰	

دی ۱۴۰۰	الف) نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ ، ..... از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالتر - پایین تر) پاسخ: الف) پایین تر هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۴	۳۱
------------	--	----

خرداد ۹۸	الف) تابع $y = (x + 1)^3$ در دامنه ی تعریف خود ..... (صعود، نزولی) است. پاسخ: الف) صعودی ۰/۲۵ صفحه ۷	۳۲
-------------	--	----

  
ارتباط هر یک از مفاهیم زیر را کشف کنید

خرداد ۱۴۰۴	با توجه به نمودار تابع $f$ ، در جدول زیر برای هر یک از قسمت های ستون «A»، قسمت صحیح از ستون «B» را انتخاب کنید. (یکی از قسمت های ستون «B» اضافه است.)  <table border="1" data-bbox="646 750 1428 1052"> <thead> <tr> <th>B</th> <th>A</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(1) <math>(-\infty, -4)</math></td> <td>الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.</td> </tr> <tr> <td>(2) <math>(2, +\infty)</math></td> <td>ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.</td> </tr> <tr> <td>(3) <math>(-1, +\infty)</math></td> <td>پ) تابع در این بازه ثابت است.</td> </tr> <tr> <td>(4) <math>(-4, 2]</math></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> پاسخ: الف) ۲ یا $(2, +\infty)$ (۰/۲۵) ب) ۱ یا $(-\infty, -4)$ (۰/۲۵) پ) ۴ یا $(-4, 2]$ (۰/۲۵) صفحه ۱۰	B	A	(1) $(-\infty, -4)$	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.	(2) $(2, +\infty)$	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.	(3) $(-1, +\infty)$	پ) تابع در این بازه ثابت است.	(4) $(-4, 2]$		۳۳
B	A											
(1) $(-\infty, -4)$	الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.											
(2) $(2, +\infty)$	ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.											
(3) $(-1, +\infty)$	پ) تابع در این بازه ثابت است.											
(4) $(-4, 2]$												

  
مسائل

دی ۱۴۰۴	اگر $f(x) = \frac{1}{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ آنگاه: الف) ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید. ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. پاسخ: (ص ۱۳) الف) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-3}}$ (0/25) ب) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ (0/25) , $D_g = [3, +\infty)$ (0/25)	۳۴
------------	--	----

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [3, +\infty) \mid g(x) \in \mathbb{R} - \{1\}\} = \{x \geq 3 \mid \sqrt{x-3} \neq 1\}$$

(۰/۲۵)

$$= \underbrace{[3, +\infty) - \{4\}}_{(۰/۲۵)}$$

توجه: اگر دانش آموز به جای نوشتن  $D_g$  و  $D_f$  به صورت جداگانه، عبارت زیر را بنویسد. (۰/۷۵) نمره تعلق گیرد.

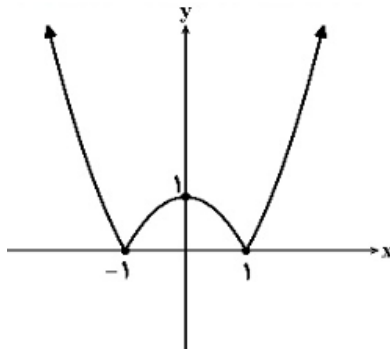
$$\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [3, +\infty) \mid g(x) \in \mathbb{R} - \{1\}\}$$

نمودار تابع  $f(x) = |1 - x^2|$  را رسم کنید. ۳۵

پاسخ:

(ص ۱۷)

رسم نمودار نهایی با هر روش (۰/۵)



دی  
۱۴۰۴

ضابطه تابع وارون  $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + 5$  را بنویسید. ۳۶

پاسخ:

(ص ۲۷)

روش اول:

$$y = \sqrt[3]{x-2} + 5 \rightarrow \underbrace{y-5}_{(0/25)} = \sqrt[3]{x-2} \rightarrow \underbrace{(y-5)^3}_{(0/25)} = x-2 \rightarrow \underbrace{(y-5)^3 + 2}_{(0/25)} = x \rightarrow$$

$$\underbrace{f^{-1}(x) = (x-5)^3 + 2}_{(0/25)}$$

روش دوم:

$$y = \sqrt[3]{x-2} + 5 \rightarrow \underbrace{x-5}_{(۰/۲۵)} = \sqrt[3]{y-2} \rightarrow \underbrace{(x-5)^3}_{(۰/۲۵)} = y-2 \rightarrow \underbrace{y = (x-5)^3 + 2}_{(۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{f^{-1}(x) = (x-5)^3 + 2}_{(۰/۲۵)}$$

دی  
۱۴۰۴

اگر  $f = \{(-2, 4), (0, -1)\}$  و  $g(x) = \sqrt{x+5}$ ، تابع  $g \circ f$  را به صورت زوج مرتب بنویسید. ۳۷

پاسخ:

$$g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(4) = 3 \quad (۰/۲۵)$$

$$g \circ f(0) = g(f(0)) = g(-1) = 2 \quad (۰/۲۵)$$

شهریور  
۱۴۰۴

	$gof = \left\{ \underbrace{(-2, 3)}_{\cdot/25}, \underbrace{(0, 2)}_{\cdot/25} \right\}$ <p>ص (۱۳)</p> <p>اگر دانش آموزی دو مرحله اول را ننوشت ولی <math>gof</math> را درست نوشته باشد نمره کامل تعلق گیرد.</p>	
شهریور ۱۴۰۴	<p>نقطه <math>A(-3, 2)</math> روی نمودار تابع <math>y = f(x)</math> قرار دارد. مختصات نقطه متناظر آن روی نمودار <math>y = f(3x) + 1</math> را بیابید.</p> <p>پاسخ:</p> <p><math>(-1, 3)</math></p> <p>توجه: برای طول و عرض نقطه هر مورد (۰/۲۵) تعلق گیرد. (ص ۲۰)</p>	۳۸
شهریور ۱۴۰۴	<p>تابع <math>f(x) = x^2 - 6x</math>، با دامنه <math>(-\infty, 3]</math> را در نظر بگیرید و ضابطه تابع وارون <math>f</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>روش اول:</p> $y = (x - 3)^2 - 9 \Rightarrow \sqrt{y + 9} = -(x - 3) \quad (0/5)$ $\sqrt{x + 9} = -(y - 3) \quad (0/5) \Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 9} \quad (0/25)$ <p>توجه: اگر دانش آموز مرحله دوم را ننوشت ولی دو مرحله آخر را کامل نوشت نمره تعلق گیرد.</p> <p>روش دوم:</p> $y = (x - 3)^2 - 9 \Rightarrow x = (y - 3)^2 - 9 \quad (0/25)$ $\sqrt{x + 9} = -(y - 3) \Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 9} \quad (0/25)$ <p>روش سوم:</p> $y = x^2 - 6x \Rightarrow x^2 - 6x - y = 0$ $x_1 = \frac{6 - \sqrt{36 + 4y}}{2} = 3 - \sqrt{y + 9} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 9} \quad (0/25)$ $x_2 = \frac{6 + \sqrt{36 + 4y}}{2} = 3 + \sqrt{y + 9} \quad (0/25) \quad \text{غ ق ق}$ <p>(ص ۲۹)</p>	۳۹
خرداد ۱۴۰۴	<p>اگر <math>f(x) = 3\sqrt{x} + 2</math> و <math>f(g(x)) = 3x^2 - 4</math>، آنگاه ضابطه تابع <math>g(x)</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $f(g(x)) = 3\sqrt{g(x)} + 2$ $3x^2 - 4 = 3\sqrt{g(x)} + 2 \Rightarrow \sqrt{g(x)} = x^2 - 2 \Rightarrow g(x) = (x^2 - 2)^2,  x  \geq \sqrt{2}$ <p>توجه: به روش های درست دیگر به تناسب نمره داده شود.</p> <p>صفحه ۲۲</p>	۴۰
خرداد	<p>اگر <math>f(x) = \sqrt{x - 2}</math> باشد، آنگاه:</p>	۴۱

الف) دامنه تابع  $f^{-1} \circ f$  را به دست آورید.  
 ب) مقدار  $(f^{-1}(5))$  را محاسبه کنید.

پاسخ:

الف)

روش اول:

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = \underbrace{[2, +\infty)}_{\cdot/25}$$

روش دوم:

$$D_{f^{-1} \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_{f^{-1}}\} = \underbrace{\{x \in D_f | f(x) \in R_f\}}_{\cdot/25} = D_f = [2, +\infty) \quad (\cdot/25)$$

توجه: در صورتی که دانش آموز فقط به بازه  $[2, +\infty)$  اشاره کند، نمره کامل و به نوشتن بازه به صورت  $(2, +\infty)$ .  
 نمره تعلق گیرد.  $(\cdot/25)$

$$\underbrace{f^{-1}(x) = x^2 + 2}_{\cdot/25} \Rightarrow f^{-1}(5) = 27 \quad (\cdot/25) \quad \text{ب) روش اول:}$$

$$f^{-1}(5) = x \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 5 \quad (\cdot/25) \Rightarrow x = 27 \quad (\cdot/25) \quad \text{روش دوم:}$$

صفحات ۲۵ و ۲۹

۱۴۰۴

۴۲ تابع های  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  و  $g(x) = \sqrt{x-2}$  را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع  $(f \circ g)(x)$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار  $(g \circ f^{-1})(2)$  را محاسبه کنید.

پاسخ:

دی

۱۴۰۳

$$\text{الف) } D_g = (2, +\infty] \quad (\cdot/25) \quad D_f = R - \{2\} \quad (\cdot/25)$$

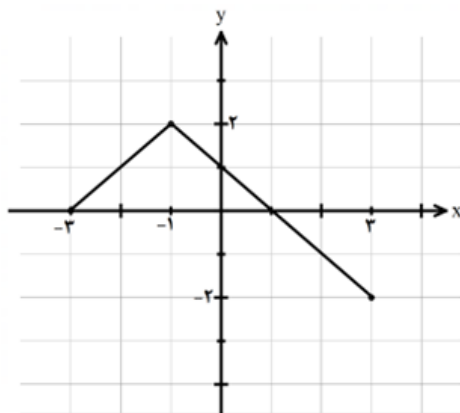
$$D_{f \circ g} = \underbrace{\left\{x \in [2, +\infty] | \sqrt{x-2} \neq 2\right\}}_{(\cdot/25)} = \underbrace{\left\{x \in [2, +\infty] | x \neq 6\right\}}_{(\cdot/25)} = \underbrace{[2, +\infty) - \{6\}}_{(\cdot/25)}$$

$$\text{ب) } g \circ f^{-1}(2) = g(5) = \sqrt{3} \quad (\cdot/25) \quad (\cdot/25)$$

(صفحه ۲۲)

۴۳ نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است.

نمودار تابع  $y = -f(3x) + 1$  را رسم کنید.

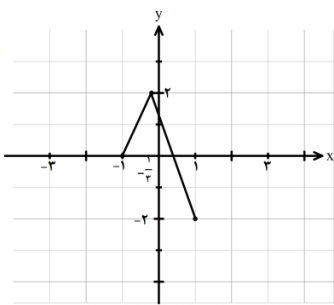
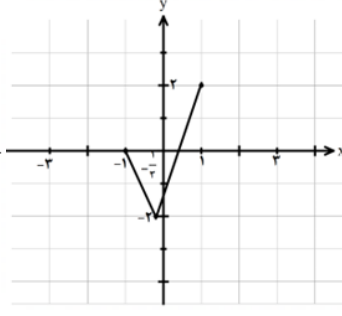
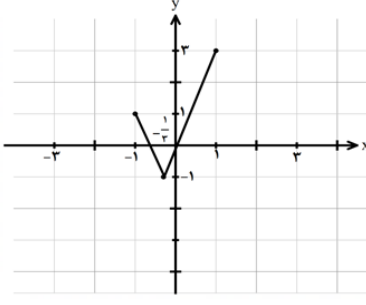
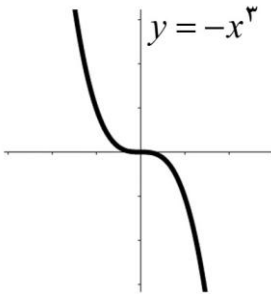
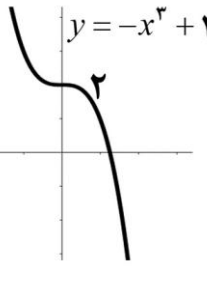


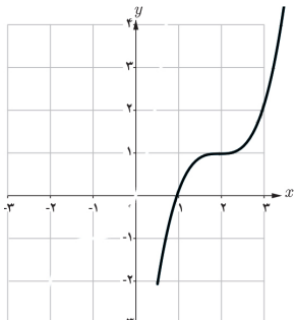
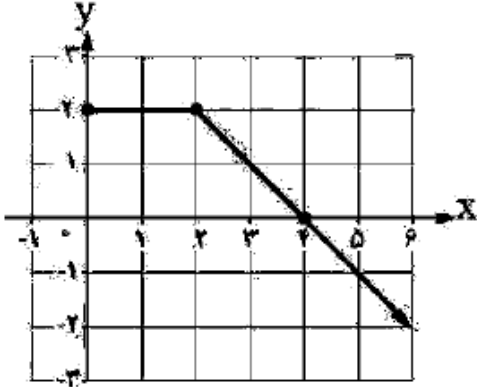
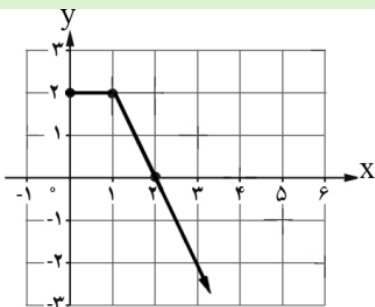
پاسخ:

(در صورتی که شکل نهایی درست رسم شود، نمره کامل تعلق گیرد.)

دی

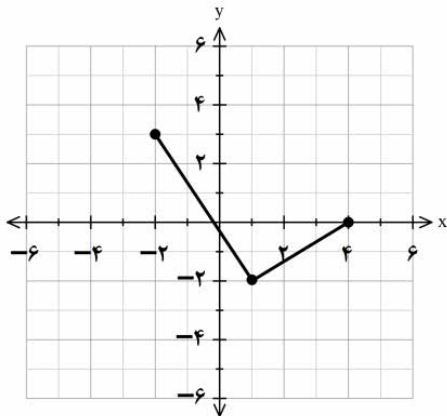
۱۴۰۳

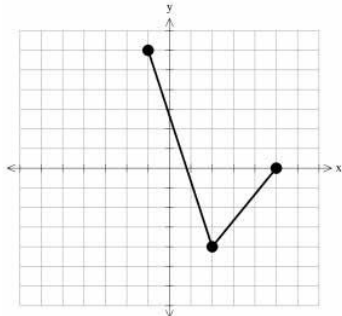
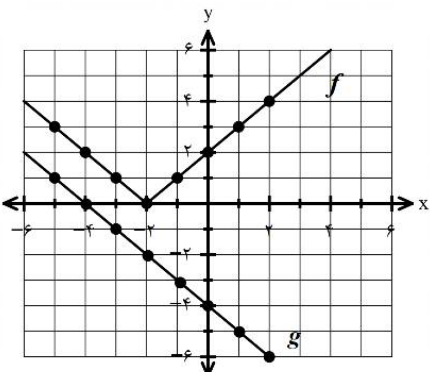
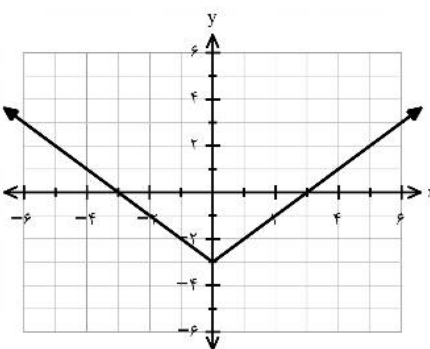
	<p>(۰/۲۵)</p>  <p>(۰/۲۵)</p>  <p>(۰/۲۵)</p>  <p>(صفحه ۲۳)</p>	
شهریور ۱۴۰۳	<p>نمودار تابع <math>y = -x^3 + 2</math> را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>تابع اکیداً نزولی است. (۰/۲۵)</p>   <p>(۰/۲۵) (۰/۲۵)</p> <p>توجه ۱: در صورتی که دانش آموز از کلمه «نزولی» استفاده کند، نمره تعلق گیرد.</p> <p>توجه ۲: با رسم شکل نهایی نمره کامل شکل لحاظ شود.</p> <p>صفحه ۹</p>	۴۴
شهریور ۱۴۰۳	<p>اگر <math>f(x) = \frac{2}{x-1}</math> و <math>g(x) = \sqrt{x+1}</math> باشند آنگاه <math>D_{f \circ g}</math> را با استفاده از تعریف به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{ x \geq -1 \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} - \{1\} \right\}$ <p><math>\sqrt{x+1} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>D_{f \circ g} = [-1, 0) \cup (0, +\infty)</math> یا <math>[-1, +\infty) - \{0\}</math> (۰/۲۵)</p> <p>صفحه ۲۲</p>	۴۵
شهریور ۱۴۰۳	<p>فرض کنید <math>f(x) = 1 + \sqrt{x-2}</math> و <math>g(x) = x^3 - 1</math> باشند. در این صورت <math>(g \circ f)^{-1}(7)</math> را بیابید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>روش اول:</p> $(g \circ f)^{-1}(7) = \overbrace{(f^{-1} \circ g^{-1})(7)}^{(۰/۲۵)} = \overbrace{f^{-1}(2)}^{(۰/۲۵)} = \overbrace{3}^{(۰/۲۵)}$ <p>روش دوم:</p> $(g \circ f)(x) = 7 \Rightarrow \underbrace{((1 + \sqrt{x-2})^3 - 1)}_{(۰/۲۵)} = 7 \Rightarrow \underbrace{x = 3}_{(۰/۲۵)}$ <p>روش سوم:</p>	۴۶

	$(gof)(x) = (1 + \sqrt{x-2})^3 - 1 \quad (./25) \Rightarrow (gof)^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x+1} - 1)^2 + 2 \quad (./25)$ $\Rightarrow (gof)^{-1}(7) = 3 \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">روش چهارم:</p> $(gof)^{-1}(x) = \underbrace{(f^{-1}og^{-1})(x)}_{(./25)} = \underbrace{(\sqrt[3]{x+1} - 1)^2 + 2}_{(./25)} \stackrel{x=7}{=} \underbrace{3}_{(./25)}$ <p style="text-align: right;">صفحه ۲۹</p>	
<p>خرداد ۱۴۰۳</p>	<p>به کمک انتقال نمودار تابع <math>y = x^3</math> نمودار تابع <math>f(x) = (x-2)^3 + 1</math> را رسم کنید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ: (صفحه ۵)</p> 	<p>۴۷</p>
<p>خرداد ۱۴۰۳</p>	<p>در شکل روبرو نمودار تابع <math>f</math> رسم شده است.</p> <p>الف) نمودار تابع <math>g</math> با ضابطه <math>g(x) = f(2x)</math> را رسم کنید.</p> <p>ب) مقدار <math>gof(\cdot)</math> را بدست آورید.</p>  <p style="text-align: right;">پاسخ: الف) (./۵)</p>  <p>ب) <math>g(f(\cdot)) = g(2) = \cdot \quad (./25)</math></p> <p style="text-align: right;">(ب)</p>	<p>۴۸</p>
<p>خرداد ۱۴۰۳</p>	<p>تابع <math>f(x) = \sqrt{x+4} - 1</math> را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $y = \sqrt{x+4} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+4} \Rightarrow (y+1)^2 = x+4 \Rightarrow (y+1)^2 - 4 = x$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 4 \quad (./75)$ $D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty) \quad (./5)$ <p style="text-align: right;">(صفحه ۲۹)</p>	<p>۴۹</p>

<p>دی ۱۴۰۲</p>	<p>نمودار تابع <math>f</math> به صورت مقابل است. دامنه و برد تابع <math>g(x) = 2f(-x)</math> را بنویسید.</p> <p>پاسخ: <math>D_g = [0, 5]</math> (۰/۵) , <math>R_g = [-4, 6]</math> (۰/۵) فصل ۱</p>	<p>۵۰</p>
<p>دی ۱۴۰۲</p>	<p>ضابطه و دامنه تابع وارون تابع زیر را به دست آورید. <math>f(x) = -x^2 - 2</math> ; <math>x \geq 0</math>.</p> <p>پاسخ: <math>y = -x^2 - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y - 2}</math> (۰/۷۵) <math>\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x - 2}</math> (۰/۲۵) <math>D_{f^{-1}} = (-\infty, -2]</math> (۰/۵) فصل ۱</p>	<p>۵۱</p>
<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>نمودار تابع <math>f(x) = \sqrt{x}</math> را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می کنیم. ضابطه تابع جدید را بنویسید.</p> <p>پاسخ: <math>y = \frac{2}{\sqrt{25}} \sqrt{x - 3}</math> ص ۱۵</p>	<p>۵۲</p>
<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>اگر <math>f(g(x)) = 4x^2 + 1</math> و <math>f(x) = \frac{x}{2} - 1</math>، آنگاه ضابطه تابع <math>g(x)</math> را بیابید.</p> <p>پاسخ: <math>f(g(x)) = \frac{g(x)}{2} - 1 \rightarrow \frac{g(x)}{2} - 1 = 4x^2 + 1</math> <math>g(x) = 8x^2 + 4</math> (۰/۲۵) ص ۲۲</p>	<p>۵۳</p>
<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>اگر دامنه تابع <math>f(x) = x^2 + 4x + 3</math> برابر <math>[-2, +\infty)</math> باشد، ضابطه و دامنه تابع وارون را به دست آورید.</p> <p>پاسخ: <math>f(x) = (x + 2)^2 - 1 \rightarrow y + 1 = (x + 2)^2 \xrightarrow{x \geq -2}</math> <math>\sqrt{y + 1} = x + 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2 \rightarrow D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)</math> (۰/۲۵) ص ۲۹</p>	<p>۵۴</p>
<p>خرداد ۱۴۰۲</p>	<p>اگر <math>f(x) = \sqrt{x + 1}</math> و <math>g(x) = x - 1</math>، آنگاه: الف) دامنه تابع <math>f \circ g</math> را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) ضابطه تابع <math>f \circ g</math> را بنویسید.</p> <p>پاسخ:</p>	<p>۵۵</p>

	$D_{f \circ g} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}   x - 1 \geq -1\}}_{\cdot/5} = [0, +\infty) \quad (\cdot/25) \text{ الف}$ $f(g(x)) = \underbrace{\sqrt{x-1+1}}_{\cdot/25} = \sqrt{x} \quad (\cdot/25) \text{ ب}$	فصل ۱
دی ۱۴۰۱	<p>اگر <math>f(x) = 7 - 4x^2</math> و <math>g(x) = \sqrt{x+3}</math> باشد:</p> <p>الف) دامنه تابع <math>f \circ g</math> را با استفاده از تعریف به دست آورید.</p> <p>ب) مقدار <math>(g \circ f)(1)</math> را محاسبه کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $D_{f \circ g} = \underbrace{\{x \in D_g   g(x) \in D_f\}}_{\cdot/25} = \underbrace{\{x \in [-3, +\infty)   \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}\}}_{\cdot/25} = [-3, +\infty) \quad (\cdot/25) \text{ الف}$ <p>ب) <math>(g \circ f)(1) = \underbrace{g(3)}_{(\cdot/25)} = \sqrt{6} \quad (\cdot/25)</math> فصل ۱</p>	۵۶
دی ۱۴۰۱	<p>اگر دامنه تابع <math>y = f(x)</math> برابر <math>[-1, 3]</math> و برد آن <math>(0, 2]</math> باشد، دامنه و برد تابع <math>y = f(\frac{x}{2})</math> را بیابید.</p> <p>پاسخ:</p> $D_{f(\frac{x}{2})} \Rightarrow \underbrace{-1 < \frac{x}{2} \leq 3}_{(\cdot/25)} \rightarrow D_{f(\frac{x}{2})} = (-2, 6] \quad (\cdot/25)$ <p>برد تغییر نمی کند. (۱۰/۲۵) فصل ۱</p>	۵۷
شهریور ۱۴۰۱	<p>اگر <math>f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}</math> و <math>g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}</math> ، تابع <math>g \circ f</math> را در صورت وجود بنویسید.</p> <p>پاسخ:</p> $g \circ f = \{(0, 4), (3, 7), (5, 0)\} \quad (\cdot/75)$ <p>صفحه ۱۳</p>	۵۸
شهریور ۱۴۰۱	<p>نمودار تابع <math>f</math> به صورت روبرو است:</p> <p>الف) نمودار تابع <math>g(x) = 2f(x-1)</math> را رسم کنید.</p> <p>ب) دامنه تابع <math>g</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p>	۵۹



	<p>الف) رسم دقیق نمودار (۱/۵)          ب) <math>(-1, 5]</math> (۰/۵)          صفحه ۲۳</p> 	
<p>خرداد          ۱۴۰۱</p>	<p>اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟          خروجی <math>\rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow x</math> ورودی</p> <p>پاسخ:</p> <p><math>x = 3 \rightarrow 2(3) - 2 = 4</math> (۰/۲۵) <math>\rightarrow \frac{4}{\sqrt{4} + 1} = \frac{4}{3}</math> (۰/۵)</p> <p>صفحه ۱۲</p>	<p>۶۰</p>
<p>دی          ۱۴۰۰</p>	<p>الف) با توجه به نمودار توابع <math>f</math> و <math>g</math>، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.          ۱) <math>(g \circ f)(-1)</math>      ۲) <math>(g^{-1} \circ f^{-1})(2)</math>          ب) نمودار تابع <math>f(x - 2) - 3</math> را رسم کنید.</p>  <p>پاسخ:</p> <p>الف)</p> <p>۱) <math>(g \circ f)(-1) = g(1) = -5</math> (۰/۵)      ۲) <math>(g^{-1} \circ f^{-1})(2) = g^{-1}(0) = -4</math> (۰/۵)</p> <p>ب) رسم درست نمودار یک نمره          صفحات ۲۳ و ۲۹</p> 	<p>۶۱</p>
<p>شهریور          ۱۴۰۰</p>	<p>نمودار تابع با ضابطه <math>f(x) = x^2 - 2x + 1</math> را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله ی آخر نسبت به محور <math>x</math> ها قرینه می کنیم. ضابطه ی نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.</p> <p>پاسخ:</p>	<p>۶۲</p>

مرحله ۱	مرحله ۲	مرحله ۳
$f(x) - 2 = (x - 1)^2$ $- 2(0/25)$	$f(x + 1) - 2 = x^2$ $- 2(0/25)$	$-f(x + 1) + 2$ $= -x^2$ $+ 2(0/25)$

صفحه ۲۳

۶۳ با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

الف)  $(gof)(1)$       ب)  $(f \circ (f + g))(0)$

x	-1	0	1	2
f(x)	0	-1	2	-5
g(x)	2	3	4	-2

پاسخ:

الف)  $g(f(1)) = g(2) = -2$  (0/5)

ب)  $(f + g)(0) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow (f \circ (f + g))(0) = f(2) = -5$   
(0/5)

صفحه ۲۳

۶۴ اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = 2x^2 - 1$  باشد،

الف) دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار  $(gof)(2)$  را تعیین کنید.

پاسخ:

الف)

$D_f = [1, +\infty), D_g = R$  (0/25)

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in R | 2x^2 - 1 \in D_f\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  (0/25)

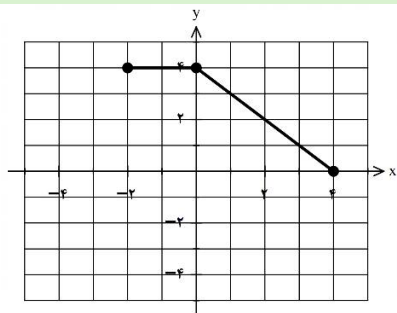
ب)  $(gof)(2) = 1$  (0/5)

صفحه ۱۴

۶۵ با توجه به نمودار تابع  $y = f(x)$ ، نمودار تابع  $y = f(-x) + 2$  را رسم کنید.

پاسخ:

رسم شکل (۰/۷۵)



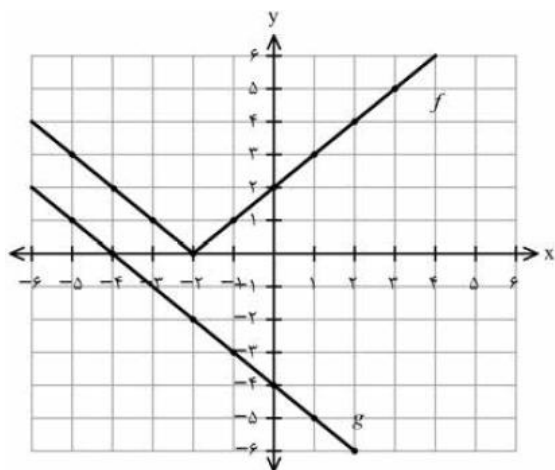
صفحه ۲۳

با توجه به نمودارهای تابع  $f$ ،  $g$  به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مقدار  $f \circ g(-1)$  را محاسبه کنید.

ب) اگر  $g(3t - 1) = 0$  آنگاه مقدار  $t$  را به دست آورید.

پ) با محدود کردن دامنه  $f$ ، بازه ای را مشخص کنید که تابع  $f$  یک به یک شود.



پاسخ:

الف)

$$f(-3) = 1 \quad (۰/۵)$$

ب)

$$3t - 1 = -4 \Rightarrow t = -1 \quad (۰/۵)$$

پ) بازه  $[-2, +\infty)$  (۰/۵)

صفحه ۲۳ و ۲۹

ضابطه وارون تابع  $g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1}$  را به دست آورید.

پاسخ:

$$-5 - \sqrt{3x + 1} = y \Rightarrow 3x + 1 = (y + 5)^2 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow x = \frac{(y + 5)^2 - 1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{(x + 5)^2 - 1}{3} \quad (۰/۵) \quad D_{g^{-1}} = (-\infty, -5]$$

صفحه ۲۹

اگر  $f(x) = \sqrt{x - 1}$  و  $g(x) = 2x^2 - 1$  باشد،

الف) دامنه تابع  $f \circ g$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه تابع  $f \circ g$  را بنویسید.

دی

۹۹

دی

۹۹

شهریور

۹۹

پاسخ:

(الف)

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R} \quad (./\text{۲۵}) \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} \quad (./\text{۲۵})$$

$$= \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\} \quad (./\text{۲۵}) \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \quad (./\text{۵})$$

(ب)

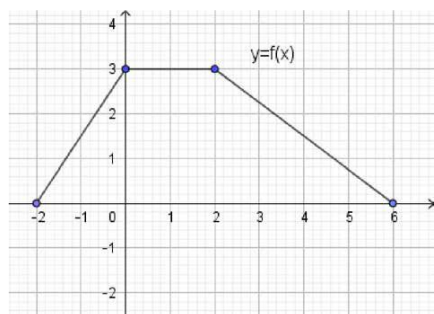
$$f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 2} \quad (./\text{۵})$$

صفحه ۱۴

۶۹

نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل زیر رسم شده است.

نمودار تابع  $y = \frac{1}{3}f(2x)$  را رسم کنید.

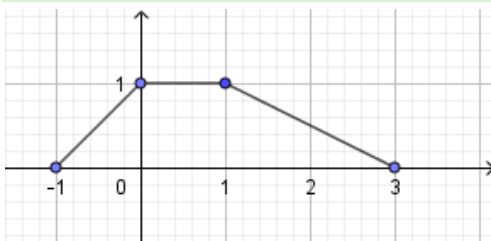


شهریور

۹۹

پاسخ:

(./۵) نمره



ص ۲۳

۷۰

ضابطه وارون تابع  $f(x) = -\frac{y}{x} - 3$  را به دست آورید.

پاسخ:

شهریور

۹۹

$$f(x) = -\frac{y}{x} - 3 = y \quad (./\text{۲۵}) \Rightarrow -\frac{y}{x} = 3 + y \quad (./\text{۲۵}) \Rightarrow x = -\frac{2y+6}{y} \quad (./\text{۲۵}) \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2x+6}{x} \quad (./\text{۲۵})$$

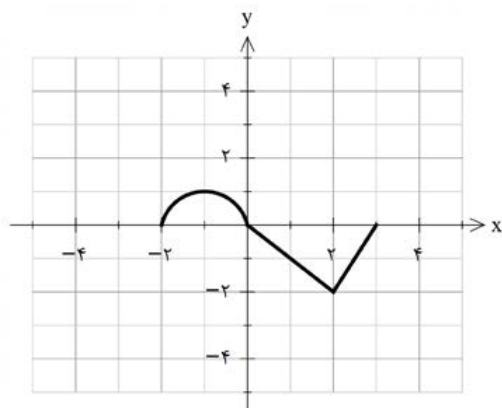
صفحه ۲۹

۷۱

نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل زیر رسم شده است.

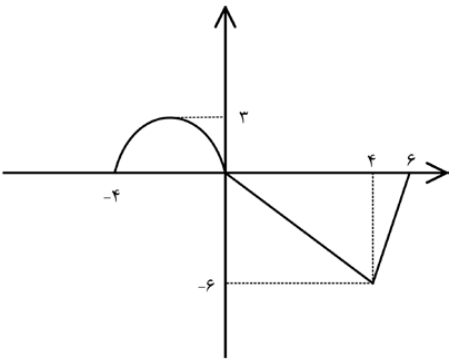
(الف) نمودار تابع  $y = 3f(\frac{1}{3}x)$  را رسم کنید.

(ب) دامنه تابع  $y = 3f(\frac{1}{3}x)$  را تعیین کنید.



خرداد

۹۹

	<p>پاسخ:</p> <p>الف) رسم شکل (۰/۵)</p> <p>ب) <math>D = [-۴, ۶]</math> (۰/۲۵)</p> <p>صفحه ۲۰</p> 	
<p>خرداد</p> <p>۹۹</p>	<p>اگر <math>f(x) = ۳x - ۴</math> و <math>f(g(x)) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴</math> ضابطه تابع <math>g(x)</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> <p><math>f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴</math> (۰/۵) <math>\Rightarrow g(x) = x^۲ - ۲x + ۶</math> (۰/۵)</p> <p>صفحه ۲۲</p>	<p>۷۲</p>
<p>خرداد</p> <p>۹۹</p>	<p>اگر <math>f(x) = \sqrt{۴ - ۲x}</math> و <math>g(x) = x^۲ + ۲x - ۱</math> باشد،</p> <p>الف) دامنه تابع <math>g \circ f</math> را با استفاده از تعریف به دست آورید.</p> <p>ب) مقدار <math>g \circ f(۲) - \frac{f}{g}(۰)</math> تعیین کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p><math>D_{g \circ f} = \{x \in D_f   f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, ۲]   \sqrt{۴ - ۲x} \in R\} = (-\infty, ۲]</math> (۰/۲۵) (۰/۵)</p> <p>ب) <math>g \circ f(۲) - \frac{f}{g}(۰) = -۱ - (-۲) = ۱</math> (۰/۷۵) صفحه ۲۲</p>	<p>۷۳</p>
<p>دی</p> <p>۹۸</p>	<p>اگر <math>f(x) = x^۲ - ۵</math> و <math>g(x) = \sqrt{x + ۶}</math> باشد،</p> <p>الف) دامنه تابع <math>f \circ g</math> را با استفاده از تعریف به دست آورید.</p> <p>ب) با محدود کردن دامنه تابع <math>f</math> تابعی وارون پذیر بسازید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف)</p> <p><math>D_{f \circ g} = \{x \in D_g   g(x) \in D_f\} = \{x \in [-۶, +\infty)   \sqrt{x + ۶} \in R\} = [-۶, +\infty)</math> (۰/۲۵) (۰/۵)</p> <p>ب) <math>h(x) = x^۲ - ۵ \quad x \geq ۰</math> (۰/۵)</p> <p>صفحه ۲۲ و ۲۹</p>	<p>۷۴</p>
<p>دی</p> <p>۹۸</p>	<p>نشان دهید توابع <math>f(x) = ۳x - ۴</math> و <math>g(x) = \frac{x+۴}{۳}</math> وارون یکدیگرند.</p> <p>پاسخ:</p> <p><math>f \circ g(x) = f\left(\frac{x+۴}{۳}\right) = ۳\left(\frac{x+۴}{۳}\right) - ۴ = x</math> (۰/۵)</p> <p><math>g \circ f(x) = g(۳x - ۴) = \frac{۳x - ۴ + ۴}{۳} = x</math> (۰/۵)</p>	<p>۷۵</p>

۷۶ اگر  $f(x) = \sqrt{x-1}$  و  $g(x) = 2x^2 - 1$  باشد، دامنه ی تابع  $f \circ g(x)$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

پاسخ:

صفحه ۱۴

شهریور

۹۸

$$D_f = [1, +\infty) \cdot / ۲۵ \quad , \quad D_g = \mathbb{R} \cdot / ۲۵$$

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \underbrace{\{x | x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\}}_{\cdot / ۲۵} = \underbrace{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)}_{\cdot / ۵}$$

۷۷ نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر است. با استفاده از آن نمودار  $y = -2f\left(\frac{1}{3}x\right)$  را رسم کنید.

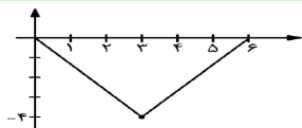


شهریور

۹۸

پاسخ:

صفحه ۱۵ و ۲۳



۷۸ اگر  $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$  و  $g(x) = x^3$  باشد، مقدار  $g^{-1} \circ f^{-1}(5)$  را به دست آورید.

پاسخ:

صفحه ۲۹

شهریور

۹۸

$$f^{-1}(x) = 8x + 24 \cdot / ۲۵ \quad \rightarrow \quad f^{-1}(5) = 64 \cdot / ۲۵$$

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \cdot / ۲۵$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4 \cdot / ۲۵$$

۷۹ دو تابع  $f(x) = \sqrt{x-4}$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$  را در نظر بگیرید. دامنه ی تابع  $g \circ f$  را با استفاده از تعریف به دست آورید.

پاسخ:

صفحه ۱۴

خرداد

۹۸

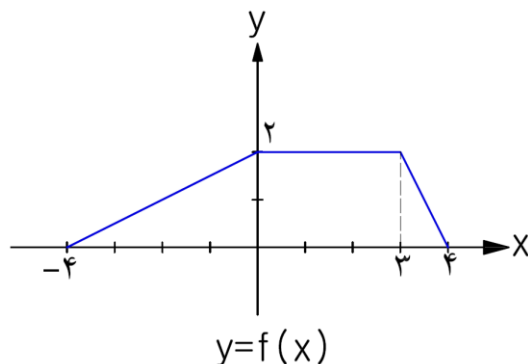
$$D_{g \circ f} = \underbrace{\{x \in D_f | f(x) \in D_g\}}_{\cdot / ۲۵} = \underbrace{\{x \geq 4 | \sqrt{x-4} \neq \pm 1\}}_{\cdot / ۵} = \underbrace{[4, 5) \cup (5, +\infty)}_{\cdot / ۲۵}$$

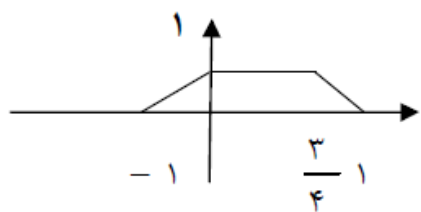
۸۰ با استفاده از نمودار تابع  $y = f(x)$ ، نمودار  $y = \frac{1}{3}f(4x)$  را رسم کنید.

رسم کنید.

خرداد

۹۸






# فصل ۲



## فصل ۲



درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با (ص/غ) مشخص کنید

دی ۱۴۰۴	<p>(ب) خط <math>x = \pi</math> نمودار تابع <math>y = \tan x</math> را قطع می‌کند.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) درست (۰/۲۵) (ص ۳۹)</p>	۸۱
دی ۱۴۰۳	<p>(پ) بازه ای که تابع تانژانت در آن نزولی باشد، وجود ندارد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) درست (صفحه ۳۹) هر مورد (۰/۲۵)</p>	۸۲
شهریور ۱۴۰۳	<p>(ب) تابع <math>y = \tan x</math> در بازه <math>(\pi, 2\pi)</math> صعودی است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) نادرست ص ۳۹ هر مورد ۰/۲۵</p>	۸۳
دی ۱۴۰۲	<p>(ب) فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آن <math>\frac{2}{5}</math> باشد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) نادرست فصل ۲ هر مورد ۰/۲۵</p>	۸۴
شهریور ۱۴۰۲	<p>(پ) خط <math>y = \frac{1}{p}</math>، نمودار تابع <math>y = \sin x</math> را در فاصله <math>[0, 2\pi]</math> در یک نقطه قطع می‌کند.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) نادرست (۰/۲۵) ۳۹</p>	۸۵
دی ۱۴۰۱	<p>(ت) مقدار عددی عبارت <math>\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ</math> برابر <math>\frac{\sqrt{3}}{4}</math> است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ت) درست (۰/۲۵) فصل ۲</p>	۸۶
شهریور ۹۹	<p>(ب) برد تابع <math>f(x) = \tan x</math> برابر بازه <math>[-1, 1]</math> است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۳۹</p>	۸۷
شهریور ۹۸	<p>(ب) دامنه ی تابع <math>y = \tan x</math> برابر <math>\left\{x \mid x \in R, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}</math> است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) درست (صفحه ۳۹) ۰/۲۵</p>	۸۸
 <p>عبارت های زیر را با کلمات مناسب تکمیل کنید.</p>		

شهریور ۱۴۰۴	الف) برد تابع $y = \tan x$ برابر با ..... است. پاسخ: الف) مجموعه اعداد حقیقی یا $\mathbb{R}$ یا $(-\infty, +\infty)$ (ص ۳۹) (۰/۲۵)	۸۹
دی ۱۴۰۳	الف) تعداد جواب های معادله $\sin x = \frac{1}{3}$ در بازه $(0, \pi)$ برابر ..... است. پاسخ: الف) ۲ (صفحه ۴۴) هر مورد (۰/۲۵)	۹۰
خرداد ۱۴۰۳	ب) مقدار عددی عبارت $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ برابر ..... است. پاسخ: ب) $\frac{1}{4}$ (۰/۲۵) (صفحه ۴۳)	۹۱
دی ۱۴۰۲	جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید. ب) اگر $\alpha$ یک زاویه حاده و $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ ، حاصل $\cos 2\alpha$ برابر ..... است. پاسخ: ب) $\frac{17}{25}$ فصل ۲ هر مورد ۰/۲۵	۹۲
خرداد ۹۹	درجای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) برد تابع $y = \tan x$ برابر ..... است. پاسخ: الف) $\mathbb{R}$ هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۳۹	۹۳
دی ۹۸	درجای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. ب) دوره تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر ..... است. پاسخ: ب) $\pi$ هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۳۹	۹۴
خرداد ۹۸	ب) دوره ی تناوب تابع $y = \tan x$ برابر $2\pi$ است. پاسخ: ب) نادرست ۰/۲۵ صفحه ۳۹	۹۵
 <b>(سوالات تشریحی)</b>		
دی ۱۴۰۴	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = 2 - 3\sin \frac{\pi}{4}x$ را محاسبه کنید. پاسخ: (ص ۳۵)	۹۶

	$T = 8 \quad (./25) \quad \max = 5 \quad (./25) \quad \min = -1 \quad (./25)$	
دی ۱۴۰۴	<p>معادله <math>\sin x = \frac{1}{2 \cos x}</math> را حل کنید و جواب های کلی آن را بنویسید.</p> <p>پاسخ: (ص ۴۷)</p> $2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow \underbrace{\sin 2x = 1}_{(./5)} \rightarrow \underbrace{2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}_{(./25)}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \underbrace{x = k\pi + \frac{\pi}{4}}_{(./25)}, k \in \mathbb{Z}$	۹۷
دی ۱۴۰۴	<p>مقدار <math>\cos \frac{\pi}{12}</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ: (ص ۴۸) روش اول:</p> $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \rightarrow \underbrace{\cos(2 \times \frac{\pi}{12})}_{(./25)} = \underbrace{2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1}_{(./25)} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \rightarrow$ $\underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}}_{(./25)} \rightarrow \underbrace{\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2}}_{(./25)}$ <p>روش دوم:</p> $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2} \rightarrow \underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\cos(2 \times \frac{\pi}{12}) + 1}{2}}_{(./5)} \rightarrow \underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}}_{(./25)}$ $\rightarrow \underbrace{\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2}}_{(./25)}$	۹۸
شهریور ۱۴۰۴	<p>دوره تناوب و مقدار ماکزیمم تابع <math>f(x) = 1 - 3 \cos(\frac{\pi}{3}x)</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ: روش اول: <math>T = \frac{2\pi}{ \frac{\pi}{3} } = 6 \quad (./5) \quad \max =  -3  + 1 = 4 \quad (./5)</math></p> <p>روش دوم: اگر دانش آموز با رسم شکل، مقدار ماکزیمم و دوره تناوب را پیدا کرد آنگاه نمره کامل تعلق گیرد. (ص ۴۰)</p>	۹۹
شهریور	<p>الف) مقدار عددی A را محاسبه کنید. (۵/۰ نمره)</p> $A = \cos^2 22/5^\circ - \sin^2 22/5^\circ$	۱۰۰

(ب) معادله مثلثاتی  $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$  را حل کنید و جواب های کلی آن را بنویسید. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ:

$$A = \frac{\cos 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25)$$

الف) روش اول: (ص ۴۳)

روش دوم:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 22/5^\circ &= \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\ \sin^2 22/5^\circ &= \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned} \right\} (0/25) \Rightarrow A = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} - \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25)$$

(ب) روش اول:

$$\underbrace{\cos x (\cos x - 2) = 0}_{0/25} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \quad (0/25) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (0/25) \\ \cos x = 2 \quad (0/25) \quad \text{غ ق ق} \quad (0/25) \end{cases}$$

روش دوم:

$$\underbrace{t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t-2) = 0}_{0/25} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ t = 2 \Rightarrow \cos x = 2 \quad (0/25) \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(ص ۴۸)

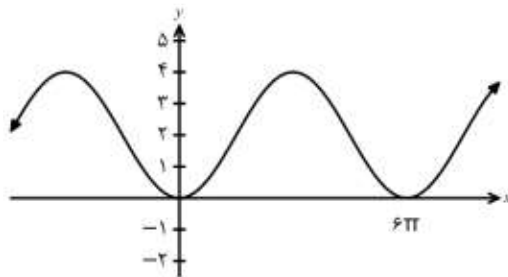
توجه اگر جواب  $\cos x = 0$  به صورت  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$  نوشته شود، نمره نعلق بگیرد.

نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه  $f(x) = a \cos(bx) + 2$

یا  $f(x) = a \sin(bx) + 2$  است. با دقت در شکل نمودار و

محاسبه مقادیر  $a$  و  $b$ ، ضابطه مربوط به این تابع را به دست

آورید.



۱۰۱

خرداد

۱۴۰۴

پاسخ:

روش اول:

$$\underbrace{|a| + 2 = 4 \Rightarrow |a| = 2}_{0/25} \xrightarrow{a < 0} a = -2 \quad (0/25)$$

$$\underbrace{T = \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}}_{0/25}$$

$$f(x) = -2 \cos\left(\frac{x}{3}\right) + 2 \quad (0/25)$$

تشخیص این که تابع سینوسی است. (۰/۲۵)

۲

روش دوم:

$$|a| = \frac{4-0}{2} = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2 \quad (0/25)$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3} \quad (0/25)$$

$$f(x) = -2 \cos\left(\frac{x}{3}\right) + (0/25)$$

تشخیص این که تابع کسینوسی است. (0/25)

۲

روش سوم:

با توجه به نمودار، تابع  $f$  کسینوسی است (0/25)

$$f(0) = 0 \Rightarrow a \cos(0) + 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = -2} \quad (0/25)$$

$$f(6\pi) = 0 \Rightarrow \underline{-2 \cos(6\pi b) + 2 = 0} \Rightarrow 6\pi b = 2k\pi \Rightarrow b = \frac{k}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{T=6\pi} b = \pm \frac{1}{3} \quad (0/25)$$

توجه ۱: در صورتی که دانش آموز هر یک از موارد  $|b| = \frac{1}{3}$  یا  $b = \frac{1}{3}$  یا  $b = -\frac{1}{3}$  را نوشته باشد، نمره (0/25) تعلق گیرد.

توجه ۲: در صورتی که دانش آموز ضابطه تابع را به صورت  $f(x) = -2 \cos\left(-\frac{x}{3}\right) + 2$  بنویسد، نمره (0/25) تعلق گیرد.

صفحات ۴۰ و ۴۱

معادله مثلثاتی  $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$  را حل کنید و جواب های کلی آن را بنویسید.

۱۰۲

پاسخ:

روش اول:

$$2 \sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \underline{\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (0/25) \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \quad (0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (0/25) \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (0/25) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

روش دوم:

$$\frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \underline{\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

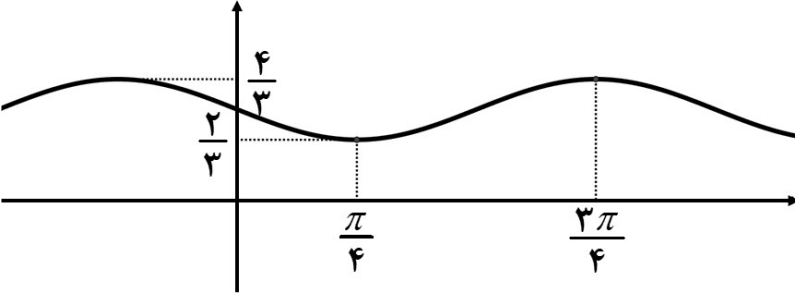
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (0/25) \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \quad (0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (0/25) \\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (0/25) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

توجه: اگر دسته دوم جواب در هر دو روش به صورت  $x = k\pi + \frac{3\pi}{8}$  نوشته شده باشد، نمره تعلق گیرد.

صفحه ۴۷

مقدار مینیمم و دوره تناوب تابع  $f(x) = c - 2 \sin(bx)$  به ترتیب ۴ و  $\frac{\pi}{b}$  است، مقادیر  $|b|$  و  $c$  را محاسبه کنید.

۱۰۳

۱۴۰۳	<p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $\min = \underbrace{-2 + c = 4}_{(./25)} \rightarrow \underbrace{c = 6}_{(./25)}$ $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{\pi}{2} \rightarrow  b  = 4 \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">(صفحه ۴۱)</p>	
دی ۱۴۰۳	<p style="text-align: center;">معادله مثلثاتی <math>\cos 2x - 3 \cos x - 1 = 0</math> را حل کنید و جواب های کلی آن را بنویسید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0 \quad (./25)$ $\begin{cases} \cos x = 2 & \text{غ ق ق} \quad (./25) \\ \cos x = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow & \end{cases} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (./25) \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \quad (./25) \end{cases}$ <p style="text-align: right;">(صفحه ۴۸)</p>	۱۰۴
شهریور ۱۴۰۳	<p style="text-align: center;">نمودار تابع <math>y = a \sin(bx) + c</math> به صورت زیر است. ضابطه آن را مشخص کنید.</p>  <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $\begin{cases}  a  + c = \frac{4}{3} \\ - a  + c = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} c = \frac{\max + \min}{2} \Rightarrow \underbrace{c = 1}_{(./25)} \\  a  = \frac{\max - \min}{2} \Rightarrow \underbrace{ a  = \frac{1}{3}}_{(./25)} \end{cases}$ $T = \frac{2\pi}{ b } \Rightarrow  b  = 2 \quad (./25)$ $\Rightarrow y = -\frac{1}{3} \sin(2x) + 1 \quad \text{یا} \quad y = \frac{1}{3} \sin(-2x) + 1 \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">صفحه ۳۵ و ۳۶</p>	۱۰۵
شهریور ۱۴۰۳	<p>الف) با توجه به محورهای کسینوس و تانژانت، اگر <math>\frac{\pi}{4} &lt; \alpha &lt; \frac{\pi}{2}</math> باشد آنگاه مقادیر <math>\cos \alpha</math> و <math>\tan \alpha</math> را با هم مقایسه کنید.</p> <p>ب) معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.</p> $\cos 2x - 13 \cos x - 6 = 0$ <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">الف) صفحه ۴۱</p> $\tan \alpha > \cos \alpha \quad (./25)$	۱۰۶

$$2 \cos^2 x - 1 - 13 \cos x - 6 = 0 \Rightarrow \overbrace{2 \cos^2 x - 13 \cos x - 7}^{(./25)} = 0$$

(ب)

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \overbrace{\cos x = -\frac{1}{2}}^{(./25)} \\ \cos x = +7 \end{cases}}_{(./25)} \quad \text{غ ق ق} \quad \Rightarrow \overbrace{\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}^{(./25)} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}}^{(./25)} \\ \overbrace{x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}}^{(./25)} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

صفحه ۴۸

اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع  $y = a \sin(\lambda x) + c$  به ترتیب ۹ و ۳ باشد.

الف) مقادیر  $|a|$  و  $c$  را بیابید. (ب) دوره تناوب تابع را بدست آورید.

پاسخ:

الف)

روش اول:

$$|a| = \frac{Max - Min}{2} = \frac{9 - 3}{2} = 3 \quad (./5) \quad c = \frac{Max + Min}{2} = \frac{9 + 3}{2} = 6 \quad (./5)$$

روش دوم:

$$\begin{cases} |a| + c = 9 & (./25) \\ -|a| + c = 3 & (./25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 & (./25) \\ |a| = 3 & (./25) \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\frac{\lambda}{2}} \quad (./5) \quad \text{(ب)}$$

(صفحه ۴۱)

جواب های معادله  $\cos(2x) = \frac{1}{2}$  را در بازه  $(0, \pi)$  بدست آورید.

پاسخ:

روش اول:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (./25) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}) \quad (./5)$$

$$\xrightarrow{x \in (0, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (./5)$$

روش دوم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \xrightarrow{(./\pi)} 2x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \xrightarrow{(./\pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (1/25)$$

روش سوم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2} \quad (./25) \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (./25) \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2} \quad (./25)$$

$$\xrightarrow{(\cdot, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (\cdot/5)$$

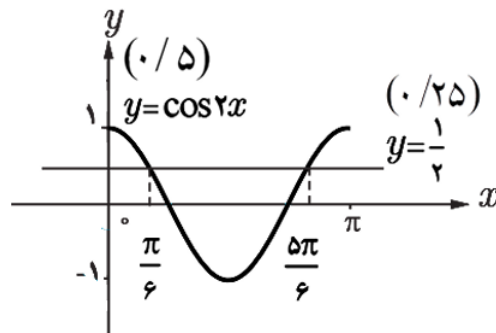
روش چهارم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2} \quad (\cdot/25) \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (\cdot/25) \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\cdot/25)$$

$$\xrightarrow{(\cdot, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (\cdot/5)$$

روش پنجم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \xrightarrow{(\cdot, \pi)} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad (\cdot/5)$$



(صفحه ۴۶)

توجه: به راه حل های درست دیگر هم نمره داده شود.

و دوره تناوب را به دست آورید.  $|a|$  برابر ۶ می باشد.  $f(x) = a \cos \frac{x}{2} + 3$  مقدار ماکزیمم تابع

۱۰۹

دی

۱۴۰۲

پاسخ:

$$|a| + 3 = 6 \quad (\cdot/25) \Rightarrow |a| = 3 \quad (\cdot/25) \quad T = \frac{2\pi}{|b|} \quad (\cdot/25) \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad (\cdot/25) \quad \text{فصل ۲}$$

هستند؟  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  را به دست آورید. کدام جواب ها در بازه  $\sin 4x = 1$  جواب های معادله مثلثاتی

۱۱۰

دی

۱۴۰۲

پاسخ:

$$\sin 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \quad (\cdot/5)$$

$$4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \quad (\cdot/5) \quad x = \frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{24} \quad (\cdot/5)$$

فصل ۲

دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

۱۱۱

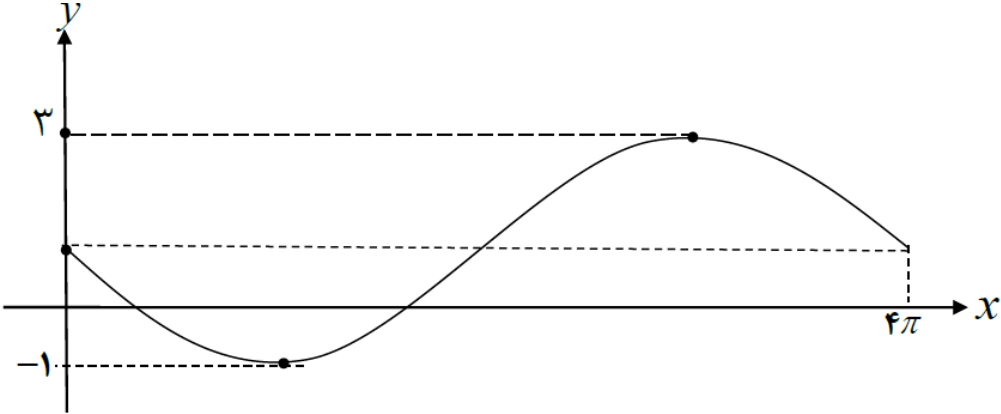
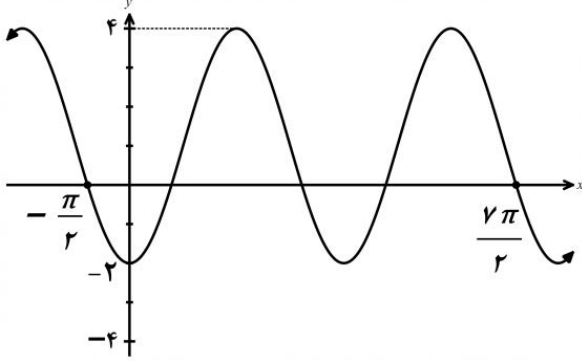
$$y = \sqrt{3} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

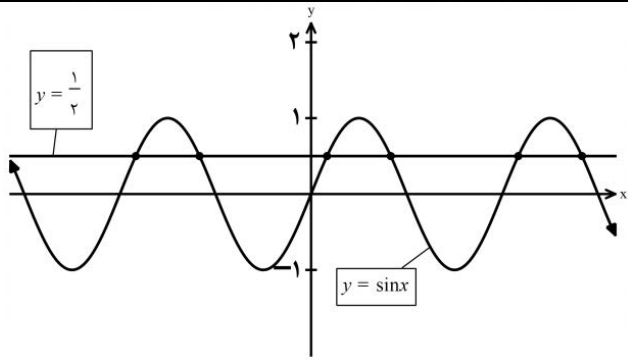
پاسخ:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \quad \text{Max: } |a| + c = 1 + \sqrt{3} \quad (\cdot/5)$$

$$\text{Min: } -|a| + c = -1 + \sqrt{3} \quad (\cdot/5)$$

ص ۳۵

<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>معادله مثلثاتی <math>2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}</math> را حل کنید. پاسخ:</p> <p><math>\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}</math> (۰/۲۵)</p> $\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (۰/۵) \quad \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (۰/۵)$ <p>ص ۴۷</p>	<p>۱۱۲</p>
<p>خرداد ۱۴۰۲</p>	<p>نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع <math>y = a \sin bx + 1</math> است. حاصل <math>ab</math> را بیابید.</p>  <p>پاسخ:</p> $\frac{2\pi}{ b } = 4\pi \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$ $ a  = \frac{3 - (-1)}{2} = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \quad (۰/۲۵)$ <p>با توجه به نمودار تابع، <math>ab</math> باید عددی منفی شود بنابراین <math>ab = -1</math> (۰/۲۵) فصل ۲</p>	<p>۱۱۳</p>
<p>خرداد ۱۴۰۲</p>	<p>جواب (های) معادله مثلثاتی <math>\cos 2x - \cos x = 0</math> را در بازه <math>(0, \pi)</math> مشخص کنید. پاسخ:</p> $\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ <p>فصل ۲</p>	<p>۱۱۴</p>
<p>دی ۱۴۰۱</p>	<p>نمودار تابع با ضابطه <math>y = a \cos bx + c</math> به صورت مقابل رسم شده است. مقادیر <math>a</math>، <math>b</math> و <math>c</math> را به دست آورید. پاسخ:</p>  $2T = \frac{7\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi \quad (۰/۲۵) \rightarrow T = 2\pi \quad (۰/۲۵) \rightarrow \frac{2\pi}{ b } = 2\pi \quad (۰/۲۵) \rightarrow b = \pm 1 \quad (۰/۲۵)$	<p>۱۱۵</p>

	$c = \frac{4+(-2)}{2} = 1 \quad (./25)$ $ a  = \frac{4-(-2)}{2} = 3 \rightarrow a = -3 \quad (./25) \quad 2 \text{ فصل}$	
دی ۱۴۰۱	 <p>نمودار تابع با ضابطه <math>y = \sin x</math> و خط به معادله <math>y = \frac{1}{2}</math> در دستگاه مختصات زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید.</p> <p>پاسخ:</p> $\sin x = \frac{1}{2} \quad (./25) \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \quad (./25) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (./25) \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (./25) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ <p>فصل ۲</p>	۱۱۶
شهریور ۱۴۰۱	<p>دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع <math>y = 3 \cos(\pi x) + 2</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{ \pi } = 2 \quad (./5) \quad \max =  a  + c = 5 \quad (./5) \quad \min = - a  + c = -1 \quad (./5)$ <p>صفحه ۳۵</p>	۱۱۷
شهریور ۱۴۰۱	<p>معادله زیر را حل کنید.</p> $\cos 2x - 3 \sin x + 4 = 0$ <p>پاسخ:</p> $1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 4 = 0 \quad (./25) \Rightarrow -2 \sin^2 x - 3 \sin x + 5 = 0 \quad (./25)$ $\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{5}{2} \quad \text{غ ق ق} \quad (./25) \\ \sin x = 1 \quad (./25) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (./5) \end{cases}$ <p>صفحه ۴۸</p>	۱۱۸
خرداد ۱۴۰۱	<p>معادله ی یک تابع سینوسی <math>y = a \sin(bx) + c</math> را بنویسید که برد آن <math>[-4, 4]</math> و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.</p> <p>پاسخ:</p> $ b  = \frac{2\pi}{2} = \pi \rightarrow b = \pm \pi \quad (./25)$ $\rightarrow y = \pm 4 \sin(\pm \pi x) \quad (./25)$ $ a  = \frac{4-(-4)}{2} = 4 \rightarrow a = \pm 4 \quad (./25)$ $c = \frac{4+(-4)}{2} = 0 \quad (./25)$ <p>به هر کدام از پاسخ های یافته شده توسط دانش آموز نمره کامل تعلق گیرد.</p>	۱۱۹

معادله مثلثاتی  $\sin 2x = \sin x$  را حل کنید.

۱۲۰

پاسخ:

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \quad (./25) \rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (./25) \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \quad (./25) \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (./25) \end{cases}$$

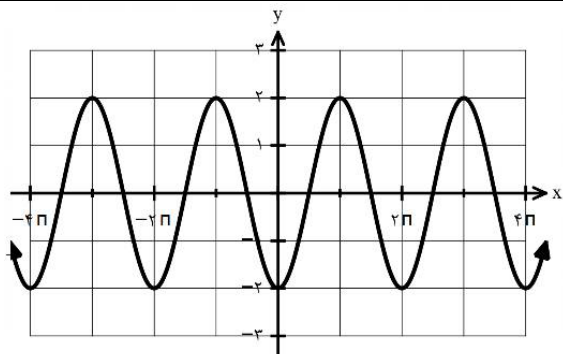
صفحه ۴۷

نمودار زیر برای تابعی با ضابطه  $f(x) = a \cos bx + c$ 

است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص کنید.

۱۲۱



پاسخ:

$$\begin{aligned} |a| &= \frac{2 - (-2)}{2} = 2 & a &= -2 \quad (./5) \\ |b| &= \frac{2\pi}{2\pi} = 1 & b &= 1 \quad (./5) & f(x) &= -2 \cos x \quad (./25) \\ c &= \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \quad (./25) \end{aligned}$$

صفحه ۴۰

معادله مثلثاتی  $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$  را حل کنید.

۱۲۲

پاسخ:

$$\underbrace{2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0}_{(./25)} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \quad (./25) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (./25) \\ \sin x = \frac{1}{2} \quad (./25) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (./25) \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad (./25) \end{cases} \end{cases}$$

صفحه ۴۸

معادله  $y = a \sin(bx) + c$  یک تابع سینوسی  $y = a \sin(bx) + c$  را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن -۱ و دوره تناوب آن  $8\pi$  است.

۱۲۳

پاسخ:

$$\begin{aligned} |a| &= \frac{5 - (-1)}{2} = 3 \Rightarrow a = \pm 3, \quad c = \frac{5 + (-1)}{2} = 2 \quad (./25) \\ |b| &= \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4} \quad (./25) & y &= \pm 3 \sin\left(\pm \frac{1}{4}x\right) + 2 \quad (./25) \end{aligned}$$

نوشتن یک معادله سینوسی نمره کامل تعلق گیرد.

خرداد

۱۴۰۱

دی

۱۴۰۰

دی

۱۴۰۰

شهریور

۱۴۰۰

۱۲۴ حاصل عبارت  $4 \sin x \cos x \cos 2x$  را به ازای  $x = 7/5^\circ$  را محاسبه نمایید.

پاسخ:

$$4 \sin 2x \cos 2x \quad (./25) = \frac{\sin 4x}{(./25)} = \frac{\sin 4(7/5^\circ)}{(./25)} = \frac{1}{2} \quad (./25)$$

صفحه ۴۳

۱۲۵ مثلثی با مساحت  $8\sqrt{2}$  سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه ی دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی متر باشند، آن گاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟

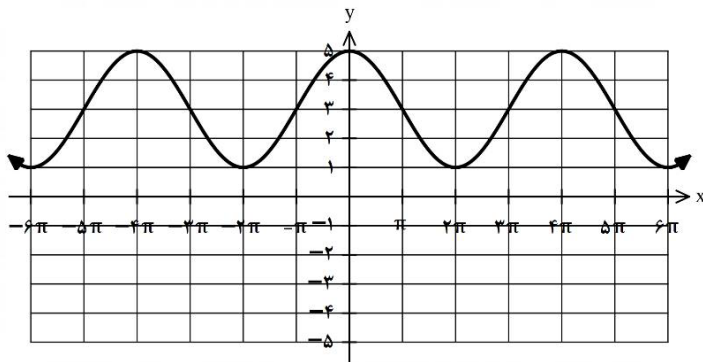
پاسخ:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 \sin \theta = 8\sqrt{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ, \theta = 135^\circ \quad (./5)$$

دو مثلث میتوان رسم کرد (./25)

صفحه ۴۷

۱۲۶ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه  $y = a \cos bx + c$  است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.



پاسخ:

$$c = \frac{5+1}{2} = 3 \quad (./5) \quad b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \quad (./25) \rightarrow y = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3$$

$$\rightarrow y = 2 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 3 \quad (./25) \quad \text{یا}$$

صفحه ۳۶

۱۲۷ معادله مثلثاتی  $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$  را حل کنید.

پاسخ:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \quad (./25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} & \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \quad (./25) \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} & \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (./25) \end{cases}$$

صفحه ۴۷

<p>دی ۹۹</p>	<p>الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)</p> $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ <p>ب) مقدار عددی <math>\sin 15^\circ</math> را محاسبه کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف)</p> $\begin{aligned} \min &= - a  + c & (\cdot/25) & \quad \max = 8 & (\cdot/25) & \quad \min = -8 & (\cdot/25) & \quad T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi & (\cdot/5) \\ \max &=  a  + c & & & & & & & \end{aligned}$ $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad (\cdot/25) \quad \text{ب)}$ <p>صفحه ۴۰ و ۴۳</p>	<p>۱۲۸</p>
<p>دی ۹۹</p>	<p>معادله مثلثاتی <math>\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}</math> را حل کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\cdot/25) \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow (\cdot/5) \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} & (\cdot/25) \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} & (\cdot/25) \end{cases}$ <p>صفحه ۴۷</p>	<p>۱۲۹</p>
<p>شهریور ۹۹</p>	<p>دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)</p> $y = \pi \sin(-x) + 1$ <p>پاسخ:</p> $\begin{aligned} \max &=  a  + c = \pi + 1 & (\cdot/5) & \quad T = \frac{2\pi}{ -1 } = 2\pi & (\cdot/5) \\ \min &= - a  + c = -\pi + 1 & & & & \end{aligned}$ <p>صفحه ۳۵</p>	<p>۱۳۰</p>
<p>شهریور ۹۹</p>	<p>مقدار <math>\sin 15^\circ</math> را بیابید.</p> <p>پاسخ:</p> $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad (\cdot/5)$ <p>صفحه ۴۳</p>	<p>۱۳۱</p>
<p>شهریور ۹۹</p>	<p>معادله مثلثاتی <math>\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}</math> را حل کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \quad (\cdot/25) \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \quad (\cdot/25) \Rightarrow$ $\sin x = \frac{1}{4} \quad (\cdot/25) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (\cdot/5)$ <p><math>\sin x = -\frac{3}{4}</math> غ.ق.ق. (۰/۲۵)</p>	<p>۱۳۲</p>

		صفحه ۴۸
۱۳۳	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.	
خرداد ۹۹	$y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$ <p>پاسخ:</p> $\max =  a  + c = 1 + \sqrt{3} \quad (\cdot/5) \quad T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \quad (\cdot/25)$ $\min = - a  + c = -1 + \sqrt{3}$	صفحه ۴۰
۱۳۴	معادله مثلثاتی $5 = (2 \cos x - 9) \cos x$ را حل کنید.	
خرداد ۹۹	<p>پاسخ:</p> $2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \quad (\cdot/25) \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \quad (\cdot/25) \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (\cdot/25)$ $\cos x = 5 \quad (\cdot/25)$ <p>غ ق ق ۵ <math>\cos x = 5</math> صفحه ۴۸</p>	
۱۳۵	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)	
دی ۹۸	$y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ <p>پاسخ:</p> $(\cdot/25) \max = \pi - 2 \quad (\cdot/25) \min = -\pi - 2 \quad (\cdot/25) T = \frac{2\pi}{ b } = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad (\cdot/5)$ $\min = - a  + c$ $\max =  a  + c$	صفحه ۴۰
۱۳۶	معادله مثلثاتی $0 = \cos 2x - \cos x + 1$ را حل کنید.	
دی ۹۸	<p>پاسخ:</p> $2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow (\cdot/5)$ $\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\cdot/5) \\ \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (\cdot/5) \end{cases}$	صفحه ۴۸
۱۳۷	الف) مقدار $\sin 22/5^\circ$ را به دست آورید. ب) دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos 2\pi x + 1$ را به دست آورید. ج) معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ مثلثاتی را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید.	
شهریور ۹۸	<p>پاسخ:</p> <p>الف) (صفحه ۴۸)</p>	

$$\sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

(ب) (صفحه ۴۰)

$$T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1 \cdot /5, \max = |-3| + 1 = 4 \cdot /25, \min = -|-3| + 1 = -2 \cdot /25$$

(ج) (صفحه ۴۷)

$$2 \times (\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}) \rightarrow \frac{\sin 2x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\sin 2x}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \cdot /25, \quad 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \cdot /25$$

الف) مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع  $y = 1 - 2 \sin(\frac{-\pi}{3} x)$  را به دست آورید.

ب) معادله مثلثاتی  $1 = \cos 2\alpha - \sin \alpha + 1$  را حل کرده، جواب های کلی آن را بنویسید.

پاسخ:

صفحات ۴۰ و ۴۸

$$\text{الف) } \max = \frac{|-2| + 1}{2} = 3, \quad \min = \frac{-|-2| + 1}{2} = -1$$

ب)

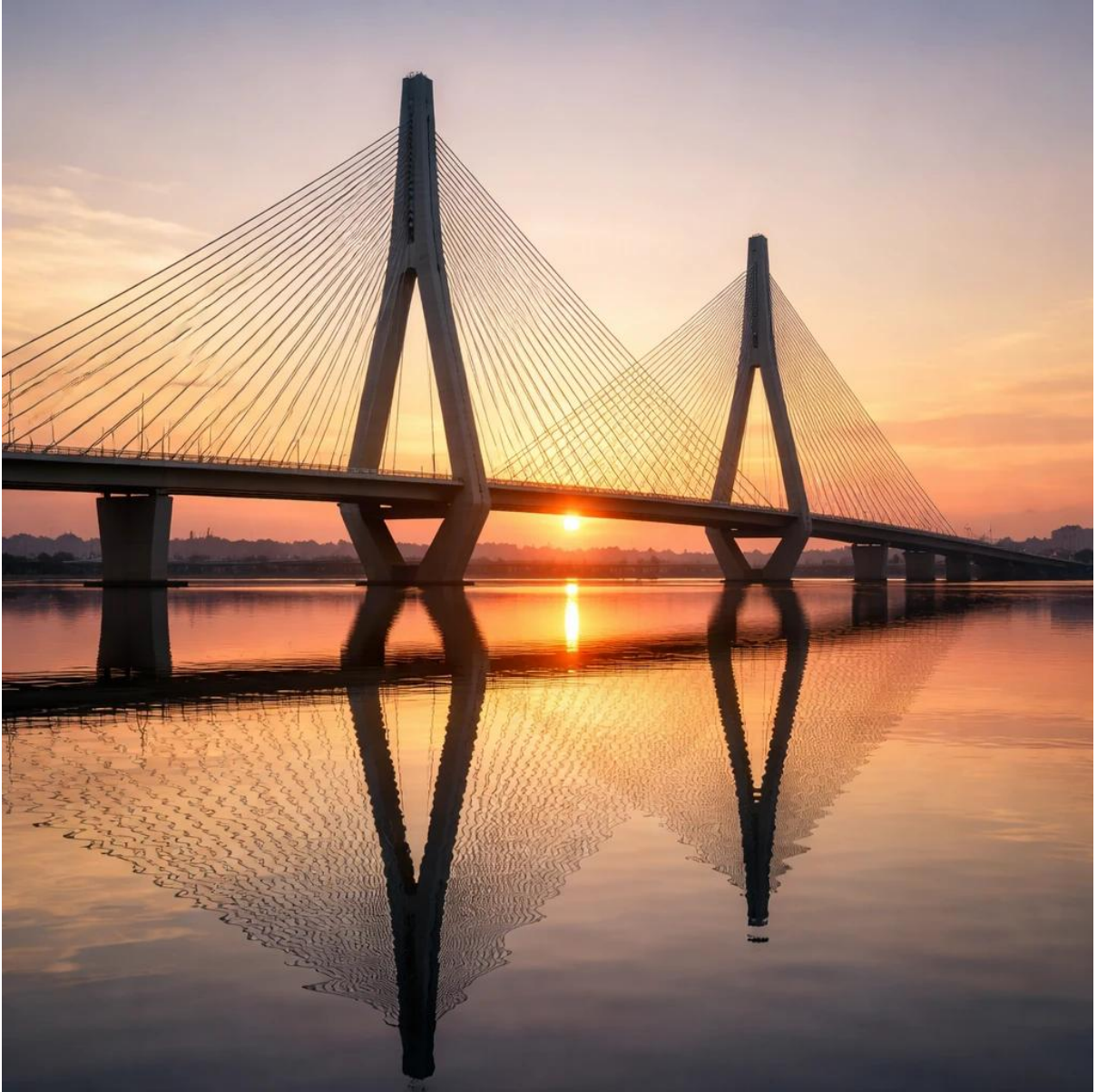
$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha + 1}{2} = 1 \rightarrow 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \cdot /5$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \alpha = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

خرداد  
۹۸

۱۳۸

# فصل ۳



## فصل ۳



درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با (ص/غ) مشخص کنید

شهریور ۱۴۰۴	<p>(ب) مجموعه <math>(۲,۴)</math> یک همسایگی محذوف عدد ۲ است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) نادرست (ص ۵۳) (۰/۲۵)</p>	۱۳۹
دی ۱۴۰۲	<p>(پ) باقیمانده تقسیم چند جمله ای <math>P(x) = ۲x^۳ - x^۲ + ۱</math> بر <math>x - ۱</math> برابر ۲ است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) درست فصل ۳ هر مورد ۰/۲۵</p>	۱۴۰
شهریور ۱۴۰۱	<p>(الف) بازه <math>(۲,۵)</math>، یک همسایگی ۴ است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(الف) درست هر مورد (۰/۲۵) صفحه ۵۳</p>	۱۴۱
دی ۹۹	<p>(ب) در تقسیم چند جمله ای <math>p(x)</math> بر <math>x - a</math>، باقیمانده برابر <math>p(a)</math> است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۵۰</p>	۱۴۲
دی ۹۸	<p>(ب) چند جمله ای <math>f(x) = ۲x^۳ + ۵x^۲ - ۳x - ۱۰</math> بر دو جمله ای <math>x + ۲</math> بخش پذیر است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۵۱</p>	۱۴۳
 <p>عبارت های زیر را با کلمات مناسب تکمیل کنید.</p>		
دی ۱۴۰۴	<p>(الف) حد راست تابع <math>y = \tan x</math> در <math>x = \frac{\pi}{۴}</math> برابر ..... است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(الف) <math>-\infty</math> (۰/۲۵) (ص ۵۵)</p>	۱۴۴
دی ۱۴۰۳	<p>هریک از جمله های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.</p> <p>(ب) باقیمانده تقسیم چند جمله ای <math>۴x^۳ - ۵x + ۲</math> بر <math>x + ۱</math> برابر ..... است.</p> <p>(پ) بازه <math>(۷,۹)</math> یک همسایگی راست عدد ..... است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) ۳ (صفحه ۵۱) (پ) ۷ (صفحه ۵۳) هر مورد (۰/۲۵)</p>	۱۴۵

شهریور ۱۴۰۳	هریک از جمله های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. (ب) در تقسیم چند جمله ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر $x + 2$ ، باقی مانده تقسیم برابر ..... است. پاسخ: (ب) صفر ص ۵۰ و ۵۱ هر مورد ۰/۲۵	۱۴۶
دی ۱۴۰۲	(پ) بازه $(-2, 0)$ ، یک همسایگی چپ برای عدد ..... است. پاسخ: (پ) صفر فصل ۳ هر مورد ۰/۲۵	۱۴۷
دی ۱۴۰۱	(ب) حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2-1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ میل می کند برابر ..... است. پاسخ: (ب) $\frac{2}{3}$ (۰/۲۵) فصل ۳	۱۴۸
خرداد ۱۴۰۱	درجاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (ب) باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر ..... است. پاسخ: (ب) ۴ هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۵۰	۱۴۹
دی ۱۴۰۰	(ب) چند جمله ای $p(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله ای ..... بخش پذیر است. $((x + 1), (x - 1))$ پاسخ: (ب) $(x + 1)$ هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۵۰	۱۵۰
خرداد ۹۹	(ب) حد تابع $f(x) = \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ وقتی که $x \rightarrow -\infty$ برابر ..... است. پاسخ: (ب) صفر هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۶۳	۱۵۱
شهریور ۹۸	(الف) حد تابع $f(x) = \frac{-3x^7+5x^2}{2x^3+9}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل می کند برابر ..... می باشد. پاسخ: (الف) $-\infty$ (صفحه ۶۳) ۰/۲۵	۱۵۲
 <b>مسائل</b>		
دی ۱۴۰۴	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{x-4}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+x+x^2}{x^3 - 2x^2 + 2}$	۱۵۳

پاسخ:

(ص ۵۲)

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x-4} \times \frac{3 + \sqrt{x+5}}{3 + \sqrt{x+5}}$$

(۰/۲۵)

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{9 - x - 5}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)}{(x-4)(3 + \sqrt{x+5})} = \frac{-1}{6} \quad (۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)

(ب)  $-\infty$  (۰/۵)

توجه: اگر به جای  $-\infty$  یکی از عبارات های  $\infty$  یا  $+\infty$  نوشته شود، (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد. (ص ۵۷)

(پ) (ص ۶۴)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7}{x^7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)

حد های زیر را محاسبه کنید.

۱۵۴

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 1}$  (نمره ۰/۷۵)

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + x}{3x^6 + x^2}$  (نمره ۰/۵)

پ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{4}} \frac{1}{\cos x}$  (نمره ۰/۵)

پاسخ:

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵)$

(ص ۵۳)

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6}{3x^6} = \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵)$

(ص ۶۴) روش اول:

روش دوم:

پ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6(1 + \frac{1}{x^6})}{3x^6(1 + \frac{1}{3x^6})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6}{3x^6} = \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵)$

(ص ۵۷)

(پ)  $-\infty$  (۰/۵)

توجه ۱: به علامت منفی (۰/۲۵) و به بی نهایت هم (۰/۲۵) تعلق می گیرد.

توجه ۲: اگر دانش آموزی به جای  $-\infty$  فقط  $\frac{1}{3}$  را نوشته باشد، (۰/۲۵) به آن تعلق گیرد.

شهریور

۱۴۰۴

الف)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$       ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5+4}{x^3+x^5}$       پ)  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x]-4}{4-x}$

پاسخ:

الف) روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 12 \quad (./25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 12 \quad (./25) \quad \text{روش دوم:}$$

$$\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3 \quad (./25)$$

روش سوم:

خرداد  
۱۴۰۴

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{t^3-8}{t-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{t-2} = 12 \quad (./25)$$

صفحه ۵۲

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5+4}{x^3+x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{x^5} = 2 \quad (./25) \quad \text{روش اول:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5+4}{x^3+x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5(2+\frac{4}{x^5})}{x^5(\frac{1}{x^2}+1)} = 2 \quad (./25) \quad \text{روش دوم:}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x]-4}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{4-x} = -\infty \quad \text{صفحه ۶۴}$$

توجه: اگر دانش آموز جواب را تنها  $-\infty$  نوشته بود، نمره کامل و اگر  $+\infty$  نوشته بود (./25) نمره تعلق گیرد.

صفحه ۵۷

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[-x]+1}{|x-2|}$       ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+1}{-x^5+2x^2-3}$

پاسخ:

دی  
۱۴۰۳

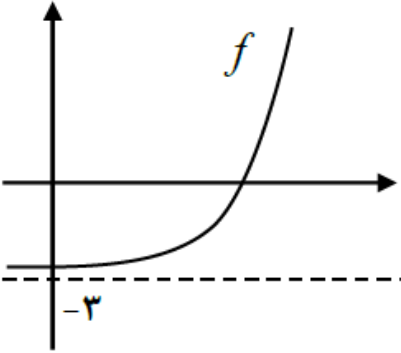
$$\text{الف) } \frac{2(-2)+1}{|2-2|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \quad (./25)$$

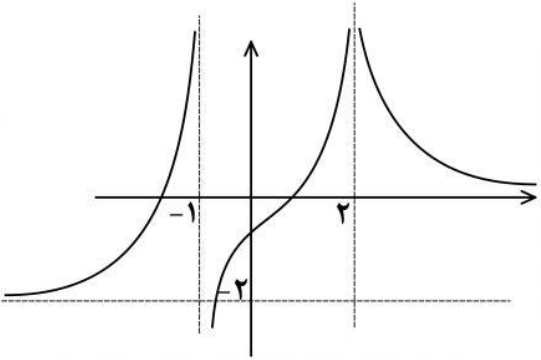
(صفحه ۵۷)

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-x^3} = 0 \quad (./25)$$

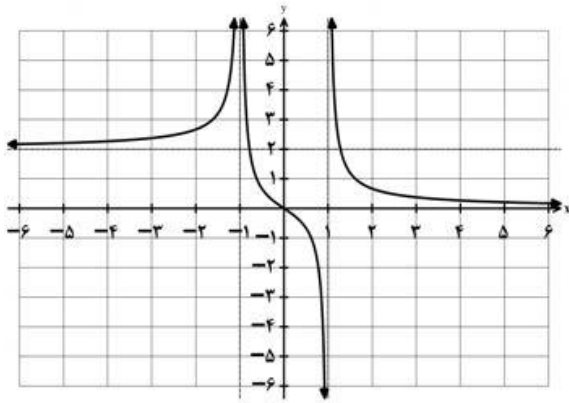
(صفحه ۶۴)

<p>شهریور ۱۴۰۳</p>	<p>حدود زیر را محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{-1}}{2 - \frac{1}{x^2}} =</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} \frac{1}{\sin x} =</math></p> <p>پ) <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt[3]{x+1}} =</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>\frac{-1}{2} \quad (./25)</math>      ب) <math>\frac{1}{(.)^-} = -\infty \quad (./25)</math></p> <p>پ) <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)}{\sqrt[3]{x+1}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x+1}}}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x+1}}} \quad (./25)</math>      <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x+1}})}{(x+1)} = \frac{0}{3} \quad (./25)</math></p> <p>توجه: در قسمت «ب» در صورتی که دانش آموز فقط جواب آخر را نوشته است نمره کامل تعلق گیرد.</p> <p>الف) صفحه ۶۴      ب) صفحه ۵۷      پ) صفحه ۵۳</p>	<p>۱۵۷</p>
<p>خرداد ۱۴۰۳</p>	<p>حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد [ ] علامت جزء صحیح است.)</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4}</math></p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3}</math>      د) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = 2 \quad (./5)</math>      (صفحه ۵۲)</p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x-5)^4} = \frac{1}{.+) = +\infty \quad (./5)</math>      (صفحه ۵۷)</p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-[x]}{x-3} = \frac{1}{.-} = -\infty \quad (./5)</math>      (صفحه ۵۷)</p> <p>د) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3}{2x^3} = -3 \quad (./5)</math>      (صفحه ۶۴)</p>	<p>۱۵۸</p>
<p>دی ۱۴۰۲</p>	<p>حدهای زیر را محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x-2}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-4x^2}{3x+2x^2}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x-2} = \frac{1}{(./)} = \frac{-\infty}{(./5)}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-4x^2}{3x+2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{2x^2} = \frac{-2}{(./5)}</math>      (./25)</p> <p>فصل ۳</p>	<p>۱۵۹</p>
<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{ 2-x }</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>\frac{3}{.+} = +\infty \quad (./25)</math></p>	<p>۱۶۰</p>

	$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} \times \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overset{./25}{3x+1-4}}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overset{./25}{3(x-1)}}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \frac{3}{4} \cdot \overset{./25}{1}$ <p>به روش های هم ارزی و هوییتال نمره تعلق نمیگیرد. ص ۵۷</p>	
<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>با توجه به نمودار تابع <math>f</math>، حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots</math></p>  <p>پاسخ: الف) -۳ (۰/۲۵)      ب) <math>+\infty</math> (۰/۲۵)</p> <p>ص ۶۲</p>	<p>۱۶۱</p>
<p>خرداد ۱۴۰۲</p>	<p>آیا مقدار <math>\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x]-1}</math> وجود دارد؟ چرا؟ پاسخ: خیر (۰/۲۵) - زیرا تابع <math>f(x) = \frac{1}{[x]-1}</math> در همسایگی راست <math>x = 1</math> تعریف نشده است. (۰/۲۵) فصل ۳</p>	<p>۱۶۲</p>
<p>خرداد ۱۴۰۲</p>	<p>حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}</math> ب) <math>\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{ \sin x }</math> پ) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+4x^5}{x^3-x}</math></p> <p>پاسخ: الف) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = 3</math> (۰/۲۵) ب) <math>\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{ \sin x } = \frac{-2}{0^+} = -\infty</math> (۰/۲۵) پ) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+4x^5}{x^3-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5}{x^3} = +\infty</math> (۰/۲۵)</p> <p>فصل ۳</p>	<p>۱۶۳</p>

<p>دی ۱۴۰۱</p>	<p>نمودار تابع <math>f</math> به شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)</math></p> <p>پ) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)</math></p>  <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>-\infty</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) <math>+\infty</math> (۰/۲۵)</p> <p>فصل ۳      پ) <math>-2</math> (۰/۲۵)</p>	<p>۱۶۴</p>
<p>دی ۱۴۰۱</p>	<p>حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>فصل ۳ (۰/۲۵)      <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)\sqrt{x}+1} = \frac{1}{4}</math> (۰/۵)</p>	<p>۱۶۵</p>
<p>شهریور ۱۴۰۱</p>	<p>حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x}</math>      پ) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{5x+4}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{6}</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{.-} = -\infty</math> (۰/۵)</p> <p>پ) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{5x} = -\frac{1}{5}</math> (۰/۵)</p> <p>صفحات ۵۷ و ۶۴</p>	<p>۱۶۶</p>
<p>خرداد ۱۴۰۱</p>	<p>حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 7x + 3}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x-1)} = \frac{1}{5}</math> (۰/۲۵)</p> <p>صفحه ۵۳</p>	<p>۱۶۷</p>

نمودار تابع  $f$  به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده



را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$

ت)  $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) =$

خرداد

۱۴۰۱

پاسخ:

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  (۰/۲۵)

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  (۰/۲۵)

پ)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$  (۰/۲۵)

ت)  $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) = -\infty$  (۰/۲۵)

صفحه ۶۴

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

پاسخ:

دی

۱۴۰۰

الف)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x)(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} \quad (۰/۰) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(x)}{(2x+1)} = \frac{1}{4}$  (۰/۲۵)

ب)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$  (۰/۲۵)

صفحات ۵۳ و ۵۷

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \tan x$

پ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^5 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

پاسخ:

شهریور

۱۴۰۰

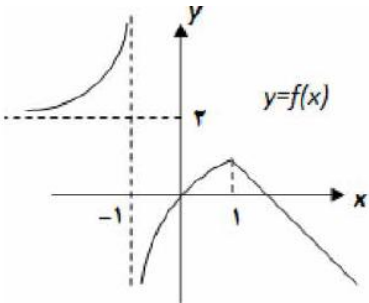
الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} \quad (۰/۰) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} \quad (۰/۰) = \frac{1}{6}$  (۰/۲۵)

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$  (۰/۲۵)

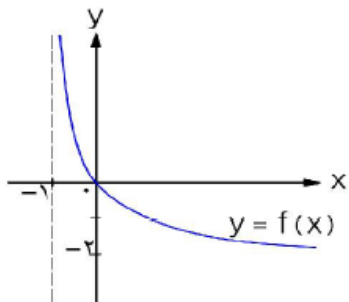
پ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5(-4 + \frac{5}{x^3})}{x^3(2 + \frac{9}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{2x^3} = -\infty$  (۰/۲۵)

صفحات ۵۲ و ۵۷ و ۶۴

<p>خرداد ۱۴۰۰</p>	<p>حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})} \frac{[x]}{ 3x+1 }</math>      ج) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} \text{ (./25)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4} \text{ (./5)}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{-1}{ 3x+1 } = \frac{-1}{\overset{+}{3}} = -\infty \text{ (./25)}</math></p> <p>مخرج در نزدیکی <math>\frac{1}{3} -</math> با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم در <math>\frac{1}{3} -</math> برابر ۱- است. بنابراین جواب حد برابر <math>-\infty</math> می شود.</p> <p>ج) <math>\frac{3+0}{-5} = -\frac{3}{5} \text{ (./5)}</math></p> <p>صفحات ۵۲ و ۵۷ و ۶۴</p>	<p>۱۷۱</p>
<p>دی ۹۹</p>	<p>حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2 - \sqrt{x-1})(2 + \sqrt{x-1})}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} \text{ (./5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{4} \text{ (./5)}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-3} \text{ (./25)} = \frac{-1}{-} = +\infty \text{ (./5)}</math></p> <p>صفحه ۵۲ و ۵۷</p>	<p>۱۷۲</p>
<p>شهریور ۹۹</p>	<p>حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{ 2x-1 }</math></p> <p>پ) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2 + \sqrt{x+1})}{(2 - \sqrt{x+1})(2 + \sqrt{x+1})} \text{ (./5)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2 + \sqrt{x+1})}{-(x-3)} = -24 \text{ (./5)}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{ 2x-1 } = \frac{-3}{. +} = -\infty \text{ (./5)}</math></p> <p>پ) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{6x^3} = \frac{1}{3} \text{ (./5)}</math></p> <p>صفحات ۵۶ و ۵۷ و ۶۳</p>	<p>۱۷۳</p>

<p>شهریور ۹۹</p>		<p>با توجه به نمودار <math>y = f(x)</math> : الف) حدود خواسته شده را بنویسید. ۱) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)</math> ۲) <math>\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)</math></p> <p>پاسخ: ۱) ۲ (۰/۲۵)      ۲) <math>-\infty</math> (۰/۲۵) صفحه ۶۴</p>
<p>خرداد ۹۹</p>	<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+6}}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}</math></p>	<p>حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. پاسخ: الف) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{x^2 - x - 6} \quad (۰/۷۵) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{(x+2)(x-3)} = \frac{24}{5} \quad (۰/۵)</math> ب) <math>\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{.-} = +\infty \quad (۰/۵)</math> صفحات ۵۷ و ۵۳</p>
<p>دی ۹۸</p>	<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{ x-3 }</math></p>	<p>حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. پاسخ: الف) <math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2 - 2x - 3} \quad (۰/۷۵) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+1)(x-3)} = -1 \quad (۰/۵)</math> ب) <math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{ x-3 } = \frac{2}{.+} = +\infty \quad (۰/۵)</math> صفحات ۵۷ و ۵۳</p>
<p>شهریور ۹۸</p>	<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}</math></p>	<p>حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. پاسخ: صفحه ۵۷ الف) <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{(x-4)(x+4)} \times \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\overset{۰/۲۵}{4-x}}{(x-4)(x+4)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{\underset{۰/۲۵}{(x+4)(2+\sqrt{x})}} = \frac{-1}{\underset{۰/۲۵}{32}}</math> ب) <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{\underset{۰/۲۵}{+}} = \overset{۰/۲۵}{+\infty}</math></p>
<p>خرداد ۹۸</p>	<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} =</math>      ب) <math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} =</math></p>	<p>الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. ۱۷۸</p>

ب) با استفاده از نمودار تابع  $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



آ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$

پاسخ:

الف) صفحات ۵۳ و ۵۷ و ۶۴

آ)  $\frac{-1}{\underbrace{-\frac{1}{25}}_{\cdot/25}} = \underbrace{+\infty}_{\cdot/25}$

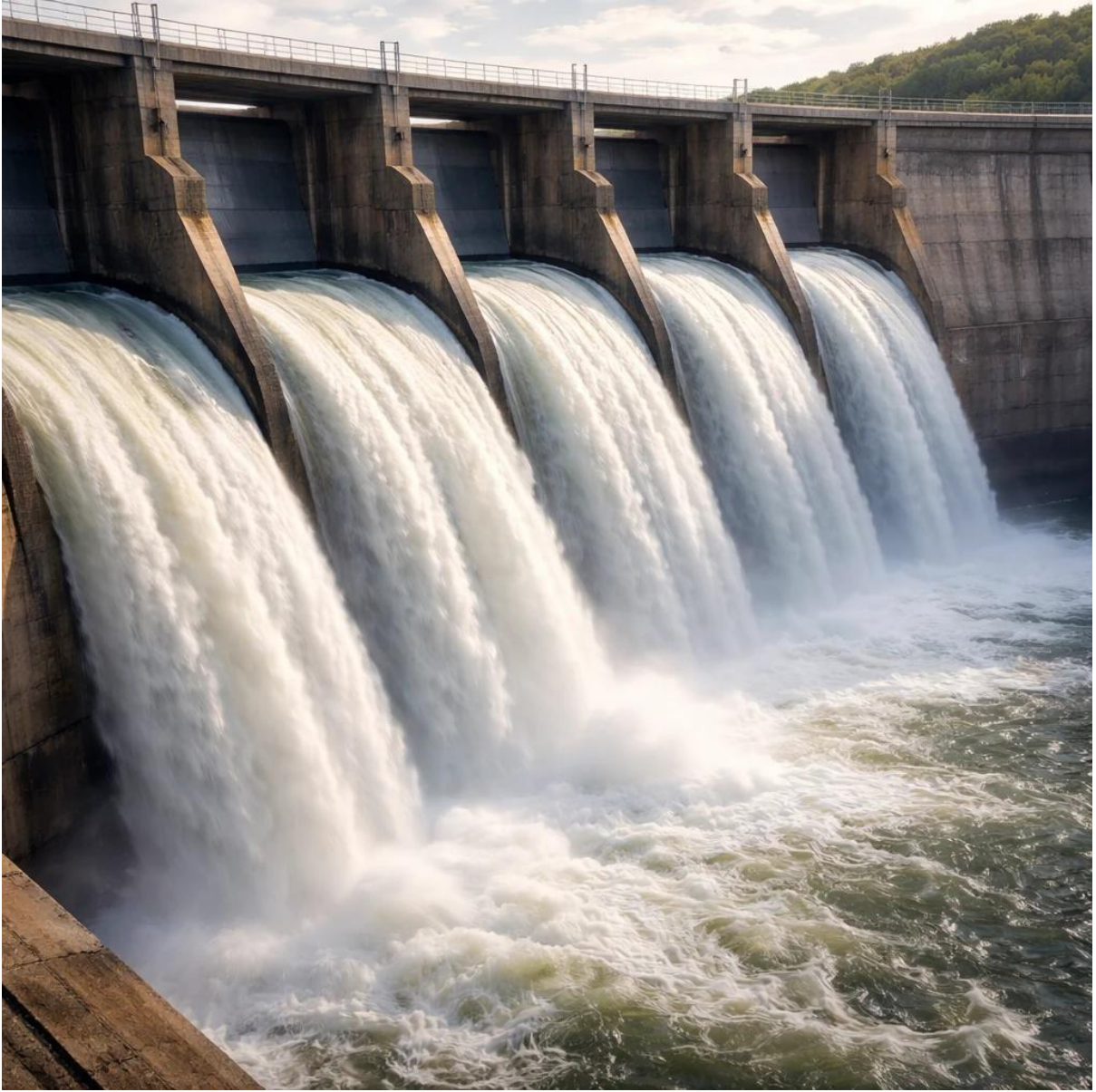
ب)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \underbrace{+\frac{1}{6}}_{\cdot/25}$

آ)  $\underbrace{-2}_{\cdot/25}$

ب)  $\underbrace{+\infty}_{\cdot/25}$

ب)

# فصل ۴



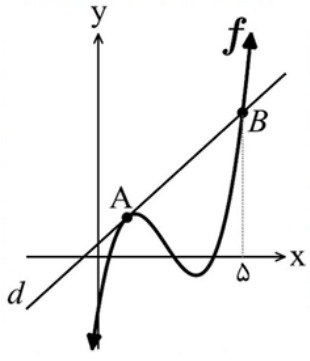


## فصل ۴

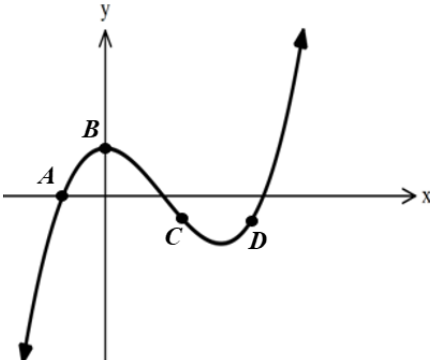


درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با (ص/غ) مشخص کنید

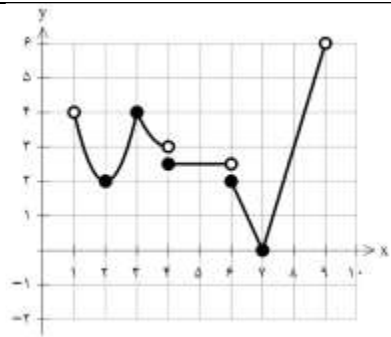
شهریور ۱۴۰۳	<p>(پ) تابع <math>f(x) =  x - 1 </math> در تمام نقاط حقیقی پیوسته است پس در <math>\mathbb{R}</math> مشتق پذیر است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) نادرست ص ۷۸ هر مورد ۰/۲۵</p>	۱۷۹
خرداد ۱۴۰۳	<p>(ب) تابع <math>f(x) = \sqrt[3]{x}</math> در <math>x = 0</math> مشتق پذیر است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۸۰)</p>	۱۸۰
خرداد ۱۴۰۲	<p>(ب) نقطه <math>(1, 1)</math> یک نقطه گوشه ای برای تابع <math>f(x) =  2 - x^2 </math> است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) نادرست (۰/۲۵) فصل ۴</p>	۱۸۱
شهریور ۱۴۰۱	<p>(ب) تابع <math>y = [x]</math> در صفر مشتق پذیر است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) نادرست هر مورد (۰/۲۵) صفحه ۸۰</p>	۱۸۲
خرداد ۹۹	<p>(ب) اگر تابع <math>f</math> در <math>x = a</math> پیوسته باشد، آنگاه <math>f</math> در <math>a</math> مشتق پذیر است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۷۸</p>	۱۸۳
<p>عبارت های زیر را با کلمات مناسب تکمیل کنید.</p>		
دی ۱۴۰۴	<p>(ب) تعداد نقاط گوشه ای تابع <math>y = x +  x </math> برابر ..... است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) یک (۰/۲۵) (ص ۸۱)</p>	۱۸۴
شهریور ۱۴۰۴	<p>(ب) اگر <math>f(x) = 4x^5 + 2</math>، مقدار <math>f''(1)</math> برابر با ..... است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) ۸۰ (ص ۹۰) (۰/۲۵)</p>	۱۸۵
شهریور ۱۴۰۲	<p>(الف) اگر <math>f(x) = -x^3</math> آنگاه <math>f''(1)</math> برابر است با .....</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p>	۱۸۶

		الف) ۶- (۰/۲۵) صفحه ۹۰	
دی ۹۹	ب) اگر $h(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1$ باشد، آنگاه $h''(1)$ برابر ..... است. پاسخ: ب) ۴۰ هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۹۲	۱۸۷	
شهریور ۹۹	ب) اگر تابع $f$ در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه $f$ در $a$ ، ..... است. پاسخ: ب) پیوسته هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۷۸	۱۸۸	
خرداد ۹۹	ج) تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را ..... منحنی می نامیم. پاسخ: ج) مماس قائم هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۸۰	۱۸۹	
 <p>گزینه مناسب را انتخاب کنید.</p>			
خرداد ۱۴۰۱	۱. کدامیک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ قرار دارد؟ الف) $(0, 0)$ ب) $(1, 0)$ پ) $(0, -1)$ ت) $(-1, 0)$ پاسخ: ا. ب هر مورد ۰/۵ نمره صفحه ۶۹	۱۹۰	
 <p>مسائل</p>			
دی ۱۴۰۴	در شکل زیر خط $d$ در نقطه $A = (1, 3)$ بر نمودار تابع $f$ مماس است. اگر $f'(1) = 2$ باشد، آنگاه عرض نقطه $B$ را بیابید. 	۱۹۱	
	پاسخ: (ص ۷۶) روش اول:		

	$\underbrace{f'(1) = 2 = m = \frac{y_B - 3}{5 - 1} = \frac{y_B - 3}{4}}_{(0/25)} \rightarrow y_B = 11 \quad (0/25)$ <p style="text-align: right;">روش دوم:</p> $\underbrace{m = f'(1) = 2}_{(0/25)} \rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow y_B = 11 \quad (0/25)$	
<p>دی ۱۴۰۴</p>	<p>۱۹۲</p> <p>مشتق پذیری تابع <math>f(x) = \begin{cases} 3x^2 + [x] &amp; x &gt; 1 \\ 6x - 2 &amp; x \leq 1 \end{cases}</math> را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول ۱ بررسی کنید. [ ] علامت جزء صحیح است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ص ۸۰)</p> <p style="text-align: right;">روش اول:</p> $\underbrace{f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 1 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)}}_{(0/25)} = 6 \quad (0/25)$ $\underbrace{f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{6x - 2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{6(x-1)}{(x-1)}}_{(0/25)} = 6 \quad (0/25)$ <p style="text-align: right;">بنابراین تابع <math>x = 1</math> مشتق پذیر است. (۰/۲۵)</p> <p style="text-align: right;">روش دوم:</p> $\underbrace{f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h)^2 + [1+h] - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(3h+6)}{h}}_{(0/25)} = 6 \quad (0/25)$ $\underbrace{f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{6(1+h) - 2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{6h}{h}}_{(0/25)} = 6 \quad (0/25)$ <p style="text-align: right;">بنابراین تابع در <math>x = 1</math> مشتق پذیر است. (۰/۲۵)</p>	
<p>دی ۱۴۰۴</p>	<p>۱۹۳</p> <p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) <math>f(x) = \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1404}</math>      ب) <math>g(x) = \sqrt[3]{5x+3}</math></p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ص ۹۲)</p> <p style="text-align: right;">(الف)</p>	

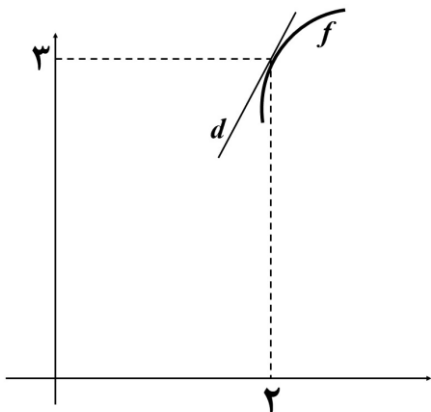
	$f'(x) = \frac{14.4}{(0.25)} \left( \frac{2x-1}{x} \right)^{14.3} \left( \frac{\overbrace{2(x)}^{(0.25)} - \overbrace{1(2x-1)}^{(0.25)}}{\underbrace{x^2}_{(0.25)}} \right)$ <p style="text-align: right;">(ب)</p> $g'(x) = \frac{\overbrace{\delta}^{(0.25)}}{\underbrace{3}_{(0.25)} \left( \underbrace{\sqrt{5x+3}}_{(0.25)} \right)^2}$	
<p>دی ۱۴۰۴</p>	<p>یک توده باکتری بعد از <math>t</math> ساعت دارای جرم <math>m(t) = \sqrt{4t+1} + \frac{t^3}{3}</math> گرم است. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع <math>m</math> در بازه زمانی <math>[0, 2]</math> را به دست آورید. ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه <math>t = 2</math> را محاسبه کنید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ: (ص ۱۰۰) (الف)</p> <p>آهنگ تغییر متوسط: <math>\frac{m(2) - m(0)}{2 - 0} = \frac{7 - 1}{2} = \frac{3}{2}</math></p> <p>آهنگ تغییر لحظه ای: <math>m'(t) = \frac{4}{2\sqrt{4t+1}} + \frac{3t^2}{3} \rightarrow m'(2) = \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3}</math></p>	<p>۱۹۴</p>
<p>شهریور ۱۴۰۴</p>	 <p>نقاط A, B, C و D روی نمودار تابع <math>f</math>، به صورت زیر مشخص شده اند. الف) در کدام نقطه مقدار مشتق مثبت و مقدار تابع صفر است؟ ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق هر دو منفی است؟</p> <p style="text-align: right;">پاسخ: (الف) A (ص ۷۶) (ب) C (ص ۷۶)</p>	<p>۱۹۵</p>
<p>شهریور ۱۴۰۴</p>	<p>شیب نیم مماس چپ <math>f(x) =  x^2 - 4 </math> در نقطه <math>x = 2</math> را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورده سپس معادله نیم مماس چپ را بنویسید.</p>	<p>۱۹۶</p>

	<p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>روش اول: <math>f'_- = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x^2 - 4  - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4 \quad (0/25)</math></p> <p><math>y = -4x + 8 \quad (0/5)</math></p> <p>روش دوم:</p> <p><math>f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ (2+h)^2 - 4  - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h(4+h)}{h} = -4 \quad (0/25)</math></p> <p style="text-align: right;"><math>y = -4x + 8 \quad (0/5)</math></p>	
<p>شهریور ۱۴۰۴</p>	<p>۱۹۷ مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) <math>f(x) = (5\sqrt{x} + 2)\left(\frac{1}{x}\right)</math> (یک نمره)</p> <p>ب) <math>g(x) = (2x^3 + 5)^4</math> (نمره ۰/۷۵)</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>روش اول:</p> <p>برای قالب کلی مشتق (۰/۲۵) در نظر گرفته شود.</p> <p>روش دوم: اگر دانش آموزی در محاسبه مشتق، <math>\sqrt{x}</math> را <math>x^{\frac{1}{2}}</math> در نظر بگیرد با شرط <math>x &gt; 0</math> داریم:</p> <p>برای قالب کلی مشتق (۰/۲۵) در نظر گرفته شود.</p> <p>الف) <math>f'(x) = \left(\frac{5}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)(5\sqrt{x} + 2)</math></p> <p>ب) <math>g'(x) = 4(2x^3 + 5)^3(6x^2)</math> (ص ۹۲)</p>	<p>۱۹۷</p>
<p>شهریور ۱۴۰۴</p>	<p>۱۹۸ اگر <math>f(x) = 2x^2 - 1</math>، آهنگ تغییر متوسط تابع از <math>x = 2</math> تا <math>x = 5</math> را به دست آورید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>(ص ۱۰۰) <math>\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{49 - 7}{3} = 14 \quad (0/25)</math></p>	<p>۱۹۸</p>
<p>خرداد ۱۴۰۴</p>	<p>۱۹۹ مشتق تابع <math>f(x) = x^2 + 1</math> را در <math>x = 2</math> با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p>روش اول: <math>f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \quad (0/25)</math></p> <p>روش دوم:</p> <p><math>f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 1 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h} = 4 \quad (0/25)</math></p>	<p>۱۹۹</p>

	<p>روش سوم:</p> $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - x^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x \quad (./25)$ $\Rightarrow \underline{f'(2) = 2 \times 2 = 4} \quad (./25)$ <p>صفحه ۷۳</p>	
<p>خرداد ۱۴۰۴</p>	<p>نمودار تابع <math>f</math> در زیر رسم شده است. الف) تابع <math>f</math> در چند نقطه از دامنه اش مشتق ناپذیر است؟ ب) آیا تابع <math>f</math> روی بازه <math>[4, 6]</math> مشتق پذیر است؟ چرا؟</p>  <p>پاسخ:</p> <p>الف) ۴ نقطه (./۲۵) صفحه ۸۲ ب) خیر (./۲۵) زیرا در <math>x = 6</math> مشتق چپ (پیوستگی چپ) ندارد. (./۲۵) صفحه ۸۹</p>	<p>۲۰۰</p>
<p>خرداد ۱۴۰۴</p>	<p>اگر <math>g(2) = 5</math>، <math>g'(2) = 3</math> و <math>\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}</math> باشد، آنگاه مشتق تابع <math>h(x) = (f \circ g)(x)</math> را در <math>x = 2</math> به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>صفحه ۸۷</p> $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = f'(5) = 4 \quad (./25)$ $h'(2) = g'(2) f'(g(2)) = 3 \times f'(5) = 12 \quad (./25)$	<p>۲۰۱</p>
<p>خرداد ۱۴۰۴</p>	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) <math>f(x) = (x^3 + 6x)\sqrt[3]{x}</math> ب) <math>g(x) = \frac{2x+3}{5x^2+4}</math></p> <p>پاسخ:</p> $f'(x) = \frac{(3x^2 + 6)(\sqrt[3]{x})}{./25} + \frac{(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(x^3 + 6x)}{./25}$ <p>تذکر: با توجه به اینکه دانش آموز ممکن است فرجه ۳ را توان در نظر بگیرد، به روش زیر نمره تعلق گیرد:</p> $f'(x) = \frac{3(x^3 + 6x)^2 (3x^2 + 6)\sqrt{x}}{./25} + \frac{1}{./25} \frac{(x^3 + 6x)^3}{2\sqrt{x}}$	<p>۲۰۲</p>

	$g'(x) = \frac{\frac{0.25}{(2)(5x^2+4)} - \frac{0.25}{(1 \cdot x)(2x+3)}}{\frac{(5x^2+4)^2}{0.25}}$	صفحه ۹۲
خرداد ۱۴۰۴	تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان میدهد، که در آن $x$ مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ لحظه ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی به دست آورید.	۲۰۳ پاسخ: صفحه ۹۶
دی ۱۴۰۳	شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 - x$ در نقطه $x = 3$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.	۲۰۴ پاسخ: $f'(x) = \frac{y}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25) = \frac{y}{10}$
دی ۱۴۰۳	در صورت استفاده از تعریف دیگر مشتق به تناسب نمره داده شود.	۲۰۴ پاسخ: $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \frac{5}{0.25}$ (صفحه ۷۲)
دی ۱۴۰۳	مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $f(x) = (2x^6 + \sqrt{2x})^7$ ب) $g(x) = \frac{2x^3 - 1}{-x^2 + 2x}$	۲۰۵ پاسخ: $f'(x) = \frac{y}{0.25} \left( \frac{2x^6 + \sqrt{2x}}{0.25} \right)^6 \left( \frac{12x^5}{0.25} + \frac{2}{2\sqrt{2x}} \right)$ $g'(x) = \frac{\frac{6x^2(-x^2+2x)}{0.25} - \frac{(-2x+2)(2x^3-1)}{0.25}}{(-x^2+2x)^2} \cdot 0.25$ (صفحه ۹۲)
دی ۱۴۰۳	تابع $f(x) = x^3 + x - 5$ را در نظر بگیرید. الف) آهنگ تغییر متوسط تابع $f$ را در بازه $[0, 3]$ به دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه ای تابع $f$ در چه نقطه ای از بازه $[0, 3]$ برابر ۱۳ است؟	۲۰۶ پاسخ: $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{25 - (-5)}{3} = 10$ $f'(x) = 3x^2 + 1 = 13 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x = 2$

با توجه به شکل، اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\Delta f(x) - 15}{x - 2} = 10$  باشد معادله ی خط  $d$  را به دست آورید.



شهریور  
۱۴۰۳

۲۰۷

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\Delta(f(x) - f(2))}{x - 2} = \Delta f'(2) \begin{matrix} (./25) \\ (./5) \end{matrix} \rightarrow \overbrace{f'(2) = 2}^{(./25)} \rightarrow \overbrace{y = 2x - 1}^{(./25)}$$

صفحه ۷۲ و ۷۳

مشتق تابع داده شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$h(x) = \left( \frac{\sqrt{1-3x}}{7+x} \right)^6$$

پاسخ:

$$h'(x) = \begin{matrix} (./25) \\ 6 \end{matrix} \left( \frac{\overbrace{\left( \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}} \right) (7+x) - (1)(\sqrt{1-3x})}^{(./25)}}{\underbrace{(7+x)^2}_{(./25)}} \right)$$

شهریور  
۱۴۰۳

۲۰۸

صفحه ۸۸ و ۹۲

مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 2 \\ 6x - 4 & x = 2 \\ 2\sqrt{x-1} + 6 & x > 2 \end{cases}$  را در نقطه ی  $x = 2$  بررسی کنید.

پاسخ:

روش اول:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x & x < 2 \\ 2 \left( \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{f'_+(2) = 1}^{(./25)}, \overbrace{f'_-(2) = 8}^{(./25)} \quad (./25) \text{ در } x = 2 \text{ پیوسته است.}$$

پس در  $x = 2$  مشتق پذیر نیست. (./25)

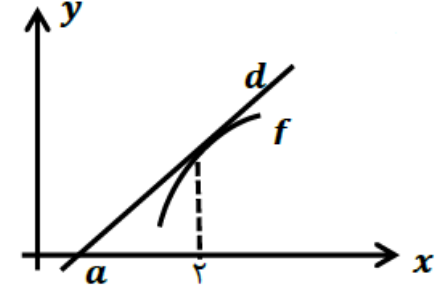
صفحه ۹۱

شهریور  
۱۴۰۳

۲۰۹

روش دوم:

	$\begin{cases} f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2\sqrt{x-1} + 6) - 8}{x-2} = 1 & (0/25) \\ f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2x^2) - 8}{x-2} = 8 & (0/25) \end{cases}$ <p>در <math>x = 2</math> پیوسته است. (0/25)  پس در <math>x = 2</math> مشتق پذیر نیست. (0/25)  توجه: اگر دانش آموز از روش دیگر تعریف مشتق استفاده کند به تناسب، نمره تعلق گیرد.  صفحه ۹۱</p>	
شهریور ۱۴۰۳	<p>گنجایش ظرفی ۲۰ لیتر مایع است. در لحظه <math>t = 0</math> سوراخی در ظرف ایجاد می شود اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از <math>t</math> ثانیه از رابطه <math>V = 20 \cdot (1 - \frac{t}{5})^2</math> به دست آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه <math>[0, 50]</math> می شود؟</p> <p>پاسخ:</p> <p>(0/5) <math>-\frac{4}{5} \cdot (1 - \frac{t}{5})</math> یا <math>20 \cdot (2) \cdot (1 - \frac{t}{5}) \cdot (-\frac{1}{5})</math> آهنگ لحظه ای</p> <p>(0/25) <math>-\frac{2}{5}</math> آهنگ متوسط = <math>\frac{-20}{50}</math> (0/25) = <math>-\frac{2}{5}</math> (0/25)</p> <p>از برابری آهنگ متوسط و لحظه ای نتیجه میگیریم <math>\frac{(0/25)}{t = 25}</math></p> <p>صفحه ۱۰۰</p>	۲۱۰
خرداد ۱۴۰۳	<p>اگر نمودار تابع <math>f</math> از نقطه <math>A(2, 4)</math> بگذرد و <math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3</math> باشد، معادله خط مماس بر نمودار <math>f</math> را در نقطه <math>A</math> بدست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>روش اول:</p> <p>فرض کنیم <math>y = ax + b</math>، خط مماس بر منحنی <math>f</math> در نقطه <math>(2, 4)</math> واقع بر آن باشد:</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \quad (0/25) \Rightarrow a = 3 \quad (0/25)</math></p> <p><math>y = 3x + b \xrightarrow{(2,4)} b = -2 \quad (0/25) \Rightarrow y = 3x - 2 \quad (0/25)</math></p> <p>روش دوم:</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3 \Rightarrow f'(2) = 3 \quad (0/25) \Rightarrow m = 3 \quad (0/25)</math></p> <p><math>y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{(2,4)} y - 4 = 3(x - 2) \quad (0/5)</math></p> <p>(صفحه ۷۶)</p>	۲۱۱
خرداد ۱۴۰۳	<p>با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم مماس چپ تابع <math>f(x) =  x^2 - 4 </math> را در <math>x = 2</math> بیابید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>روش اول:</p>	۲۱۲

	$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x^2 - 4  - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2}$ $= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4 \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">روش دوم:</p> $f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ (2+h)^2 - 4  - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ h^2 + 4h }{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(h^2 + 4h)}{h} = -4 \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">(صفحه ۷۹)</p>	
<p>خرداد ۱۴۰۳</p>	<p>مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> $f(x) = (x - 6)^3 + \frac{5x + 3}{\sqrt{2x - 1}}$ <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $f'(x) = \frac{3(x-6)^2}{(./25)} + \frac{\frac{5(\sqrt{2x-1}) - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}(5x+3)}{(\sqrt{2x-1})^2}}{(./25)} \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">(صفحه ۸۸)</p>	<p>۲۱۳</p>
<p>خرداد ۱۴۰۳</p>	<p>تابع <math>f(x) = x^2 - x</math> را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) آهنگ تغییر متوسط تابع <math>f</math> را در بازه <math>[0, 2]</math> بدست آورید.</p> <p>ب) حدود <math>x</math> را چنان بیابید که آهنگ تغییر لحظه ای تابع <math>f</math> از آهنگ تغییر متوسط آن، در بازه <math>[0, 2]</math> بزرگتر باشد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $\text{الف) آهنگ متوسط در بازه } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2} = 1 \quad (./25)$ $\text{ب) آهنگ لحظه ای} = f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 1 \Rightarrow x > 1 \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">(صفحه ۱۰۰)</p> <p>توجه: اگر دانش آموزی جواب بدست آمده در قسمت (ب) را با بازه <math>[0, 2]</math> اشتراک گرفت نمره کامل داده شود.</p>	<p>۲۱۴</p>
<p>دی ۱۴۰۲</p>	<p>خط <math>d</math> در نقطه با طول <math>x = 2</math> بر نمودار تابع <math>f(x) = x^2 + 6x - 5</math> مماس است. با توجه به شکل مقدار <math>a</math> (نقطه برخورد خط <math>d</math> با محور <math>x</math>) را بیابید.</p>  <p style="text-align: right;">پاسخ:</p>	<p>۲۱۵</p>

	$f'(x) = -2x + 6 \quad (./25) \rightarrow f'(2) = 2 \quad (./25)$ $d: (2,3), (a, 0) \quad (./25): 2 = \frac{-3}{a-2} \quad (./5) \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad (./25)$	فصل ۴
دی ۱۴۰۲	<p>مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) <math>f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^2 - 2x)</math>      ب) <math>g(x) = \frac{3x+1}{x^5-x+1}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>f'(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{(./25)} (x^2 - 2x) + \underbrace{(4x^2 - 2)}_{(./25)} (2\sqrt{x} + 1)}_{(./5)}</math></p> <p>ب) <math>g'(x) = \frac{3(x^5-x+1) - (5x^4-1)(3x+1)}{(x^5-x+1)^2} \quad (./5)</math></p>	فصل ۴ ب)
دی ۱۴۰۲	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت <math>f(t) = 2t^3 + t - 1</math> است.</p> <p>الف) سرعت متوسط متحرک در بازه <math>[1, 2]</math> را محاسبه کنید.</p> <p>ب) سرعت لحظه ای متحرک در لحظه <math>t = 2</math> چقدر است؟</p> <p>پاسخ:</p> <p>فصل ۴    الف) <math>\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 15 \quad (./25)</math>      ب) <math>f'(t) = 6t^2 + 1 \quad (./5) \rightarrow f'(2) = 25 \quad (./25)</math></p>	۲۱۷
شهریور ۱۴۰۲	<p>اگر <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> تعریف مشتق نشان دهید: <math>f'(x) = -\frac{1}{x^2}</math>.</p> <p>پاسخ:</p> <p>ص ۸۴</p> <p>الف) <math>f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}</math></p>	۲۱۸
شهریور ۱۴۰۲	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) <math>g(x) = \frac{(2x-1)^4}{x^3+8}</math>      ب) <math>f(x) = \sqrt[3]{2x+1}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>g'(x) = \frac{4 \times 2 \times (2x-1)^3 (x^3+8) - 3x^2 (2x-1)^4}{(x^3+8)^2}</math></p> <p>ب) <math>f'(x) = \frac{2(./25)}{3 \sqrt[3]{(2x+1)^2}} \quad (./25)</math></p>	ص ۹۲
شهریور ۱۴۰۲	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت <math>f(t) = t^2 + 2t + 3</math> بر حسب متر در بازه زمانی <math>[0, 2]</math> (ت بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی <math>[0, 2]</math> با هم برابرند؟</p> <p>پاسخ:</p> <p><math>f'(t) = 2t + 2 \quad (./25)</math></p>	۲۲۰

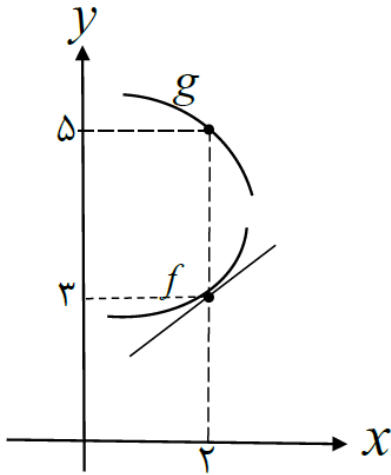
$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{11-3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \frac{2t+2=4 \rightarrow t=1}{\cdot/25}$$

ص ۱۰۰

با توجه به نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2}$  چند برابر  $f'(2)$  است؟

۲۲۱

خرداد  
۱۴۰۲



پاسخ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - f(2)g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 5f'(2) \quad (\cdot/25) \end{aligned}$$

فصل ۴

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۲۲۲

الف)  $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+4)$

ب)  $g(x) = \frac{-7x^2+1}{x-6}$

پ)  $h(x) = (2x^5 - 1)^4$

خرداد  
۱۴۰۲

پاسخ:

الف)  $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+4) + 3x^2(\sqrt{3x+2}) \quad (\cdot/25)$

ب)  $g'(x) = \frac{(-14x)(x-6) - (1)(-7x^2+1)}{(x-6)^2} \quad (\cdot/25)$

پ)  $h'(x) = \frac{4(2x^5-1)^3}{\cdot/25} (1 \cdot x^4) \quad (\cdot/25)$

فصل ۴

آهنگ تغییر لحظه ای تابع  $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$  در نقطه ای به طول  $x = 2$  چند برابر تغییر متوسط آن در بازه  $[-2, 0]$  است؟

۲۲۳

خرداد  
۱۴۰۲

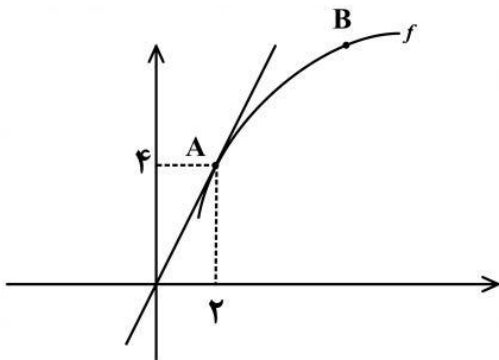
پاسخ:

$f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow f'(2) = 13 \quad (\cdot/25)$

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = \frac{1-(-1)}{2} = 1 \quad (0/25)$$

پس آهنگ تغییر لحظه ای تابع در نقطه  $x = 2$ ، برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه  $[-2, 0]$  است. (0/25)

فصل ۴



نمودار تابع  $f$  به صورت زیر رسم شده است. اگر خط  $d$  در نقطه  $A$

بر نمودار تابع  $f$  مماس باشد:

الف) حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$  را بیابید.

ب) شیب خط های مماس در نقاط  $A$  و  $B$  را مقایسه کنید.

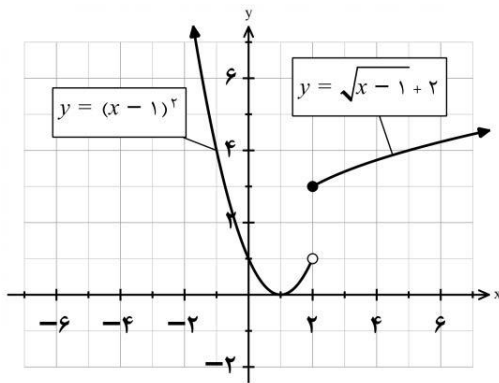
پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 2 \quad (0/5)$$

الف)

$$m_A > m_B \quad (0/25) \quad \text{فصل ۴}$$

ب)



نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 2 & x \geq 2 \\ (x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$  به صورت مقابل

است:

الف) آیا تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  مشتق پذیر است؟

ب) آیا تابع در بازه  $(-\infty, 2)$  مشتق پذیر است؟ چرا؟

پ) مشتق راست تابع  $f$  در نقطه  $x = 2$  را به دست آورید.

پاسخ:

الف) خیر (0/25)

ب) بله، در تمام نقاط بازه  $(-\infty, 2)$  مشتق پذیر است. (0/5)

پ)

$$x \geq 2: f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2} \quad (0/25)$$

فصل ۴

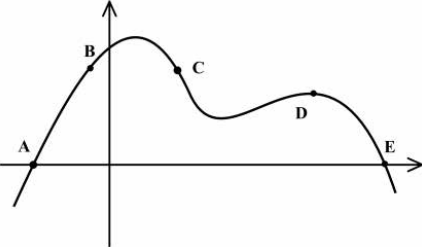
مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف)  $f(x) = x(x-1)(x+1)$

ب)  $g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$

پاسخ:

الف)  $f(x) = x^3 - x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \quad (0/25)$

	$\text{ب) } g'(x) = \frac{3\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2}{(0/5)} \cdot \frac{(2(x+1)-1)(2x-1)}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{(0/5)}$ <p>در قسمت الف به سایر روش های صحیح نمره تعلق گیرد. فصل ۴</p>	
<p>دی ۱۴۰۱</p>	<p>جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله <math>h(t) = -4t^2 + 40t</math> به دست می آید.</p> <p>الف) سرعت متوسط در بازه <math>[2, 4]</math> را بیابید.</p> <p>ب) در چه زمانی سرعت لحظه ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟</p> <p>پاسخ:</p> $\text{الف) سرعت متوسط} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16 \quad (0/5)$ $\text{ب) } h'(t) = -8t + 40 = 16 \quad (0/25) \rightarrow t = 3 \quad (0/25)$ <p>فصل ۴</p>	<p>۲۲۷</p>
<p>شهریور ۱۴۰۱</p>	<p>از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:</p> <p>الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟</p> <p>ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟</p>  <p>پاسخ:</p> <p>الف) A (0/25)      ب) C (0/25)</p> <p>صفحه ۷۶</p>	<p>۲۲۸</p>
<p>شهریور ۱۴۰۱</p>	<p>معادله نیم مماس راست تابع <math>f(x) =  x^2 - 1 </math> را در نقطه ای به طول <math>x = 1</math> واقع بر منحنی بنویسید.</p> <p>پاسخ:</p> $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ x^2 - 1  - 0}{x - 1} = 2 \quad (0/25) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1) \quad (0/5)$ <p>صفحه ۷۹</p>	<p>۲۲۹</p>
<p>شهریور ۱۴۰۱</p>	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) <math>f(x) = \frac{-2x+3}{x+4}</math>      ب) <math>g(x) = (\sqrt{3x+1})(x^2 + 2x)</math></p> <p>پاسخ:</p> $\text{الف) } f'(x) = \frac{-2(x+4) - 1(-2x+3)}{(x+4)^2} \quad (0/5)$ $\text{ب) } g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2 + 2x) + (2x + 2)(\sqrt{3x+1}) \quad (0/5)$ <p>صفحه ۹۲</p>	<p>۲۳۰</p>

<p>شهریور ۱۴۰۱</p>	<p>تابع <math>f(x) = 7\sqrt{x} + 50</math> قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود شصت ماهگی نشان می دهد، که در آن مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی <math>[0, 25]</math> چقدر است؟</p> <p>پاسخ:</p> $\text{آهنگ متوسط رشد} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5} \quad (0/25)$ <p>صفحه ۹۶</p>	<p>۲۳۱</p>
<p>خرداد ۱۴۰۱</p>	<p>اگر توابع <math>f, g</math> مشتق پذیر باشند و <math>f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6</math> حاصل <math>(fg)'(2)</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $(fg)'(2) = \overbrace{f'(2)g(2) + f(2)g'(2)}^{(0/5)} = 5 \times 8 + 3(-6) = 22 \quad (0/5)$ <p>صفحه ۸۷</p>	<p>۲۳۲</p>
<p>خرداد ۱۴۰۱</p>	<p>مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> $f(x) = \sqrt{\frac{9x - 2}{x + 1}}$ <p>پاسخ:</p> $f'(x) = \frac{\frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{(x+1)^2} (0/5)}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}} (0/25)}$ <p>صفحه ۸۸</p>	<p>۲۳۳</p>
<p>خرداد ۱۴۰۱</p>	<p>اگر <math>f(x) = \begin{cases} ax + 1 &amp; x &lt; 0 \\ x^2 + 3x + 1 &amp; x \geq 0 \end{cases}</math> در <math>x = 0</math> مشتق پذیر باشد، مقدار <math>a</math> را محاسبه کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>تابع <math>f</math> در نقطه <math>x = 0</math> پیوسته است. <math>(0/25)</math></p> $f'(+) = 3 \quad (0/5) \rightarrow a = 3 \quad (0/25)$ $f'(-) = a \quad (0/5)$ <p>صفحه ۹۱</p>	<p>۲۳۴</p>
<p>خرداد ۱۴۰۱</p>	<p>معادله حرکت متحرکی به صورت <math>f(t) = t^2 - t + 10</math> بر حسب متر در بازه <math>[0, 5]</math> (بر حسب ثانیه) داده شده است. <u>سرعت متوسط</u> را در بازه زمانی <math>[0, 5]</math> و <u>سرعت لحظه ای</u> را در لحظه <math>t = 2</math> به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4 \quad (0/25)$ $f'(t) = 2t - 1 \quad (0/25) \rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3 \quad (0/25)$ <p>صفحه ۱۰۰</p>	<p>۲۳۵</p>

مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه  $x = -1$  بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$$

پاسخ:

تابع در  $x = 1$  پیوسته است. (۰/۲۵)

دی

۱۴۰۰

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - (-1)} = -2 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1) \quad (۰/۲۵)$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 6 - 4}{x - (-1)} = 2 \quad (۰/۵)$$

$f'(-1)$  موجود نیست. صفحه ۹۱

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف)  $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5$       ب)  $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$

پاسخ:

دی

۱۴۰۰

الف)  $f'(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^4(2x + 2)$  (۰/۷۵)

ب)  $g'(x) = \underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)}_{(۰/۵)}(x^3 + 1) + \underbrace{(\sqrt{3x+2})(3x^2)}_{(۰/۵)}$

صفحه ۹۲

اگر توابع  $f, g$  مشتق پذیر باشند و  $f'(1) = 3, g'(1) = 5$  مقادیر  $(3f + 2g)'(1)$  را به دست آورید.

پاسخ:

دی

۱۴۰۰

$$\underbrace{3f'(1)}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{2g'(1)}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{9}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{10}_{(۰/۲۵)} = 19 \quad (۰/۲۵) \quad \text{صفحه ۹۲}$$

معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 10$  بر حسب متر در بازه  $[0, 5]$  (ت بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی  $[0, 5]$  با هم برابرند؟

پاسخ:

دی

۱۴۰۰

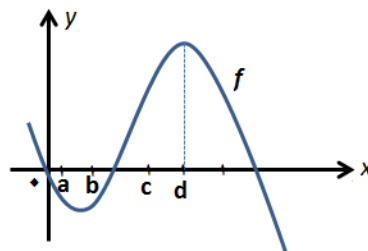
سرعت متوسط  $\Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4$  (۰/۲۵)

سرعت لحظه ای  $\Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4$  (۰/۲۵)  $t = \frac{5}{2}$  (۰/۲۵)

صفحه ۱۰۰

با در نظر گرفتن نمودار تابع  $f$  در شکل زیر، نقاط به طول های  $a, b, c, d$  را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید.

$x$	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵

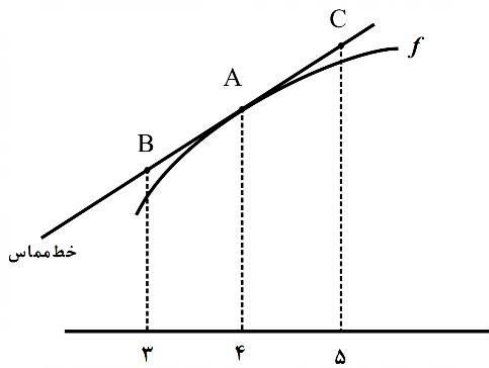


شهریور

۱۴۰۰

	<p>پاسخ:</p> <p>هر مورد (۰/۲۵)</p> <p>صفحه ۷۵</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>a</td> <td>b</td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td><math>f'(x)</math></td> <td>-۰/۵</td> <td>۰/۵</td> <td>۲</td> <td>۰</td> </tr> </table>	x	a	b	c	d	$f'(x)$	-۰/۵	۰/۵	۲	۰	
x	a	b	c	d								
$f'(x)$	-۰/۵	۰/۵	۲	۰								
<p>شهریور ۱۴۰۰</p>	<p>اگر <math>f(x) = \begin{cases} x^2 &amp; x &lt; 0 \\ x &amp; x \geq 0 \end{cases}</math> نشان دهید <math>f'_+(\cdot)</math> و <math>f'_-(\cdot)</math> موجودند ولی <math>f'(\cdot)</math> موجود نیست.</p> <p>پاسخ:</p> <p>تابع در <math>x = 0</math> پیوسته است. (۰/۲۵)</p> <p><math>f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 1</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)</math> پس مشتق تابع در <math>x = 0</math> موجود نیست. (۰/۲۵) صفحه ۹۰</p>	<p>۲۴۱</p>										
<p>شهریور ۱۴۰۰</p>	<p>مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).</p> <p>الف) <math>f(x) = (x^2 + 2x + 1)^5</math>      ب) <math>g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+2}}</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>f'(x) = \overset{(۰/۲۵)}{5} \overset{(۰/۲۵)}{(x^2 + 2x + 1)^4} \overset{(۰/۲۵)}{(2x + 2)}</math></p> <p>ب) <math>g'(x) = \frac{\overset{(۰/۵)}{(1)(\sqrt{3x+2}) - \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}}}}{\overset{(۰/۲۵)}{(\sqrt{3x+2})^2}}</math></p> <p>صفحه ۹۲</p>	<p>۲۴۲</p>										
<p>شهریور ۱۴۰۰</p>	<p>تابع با ضابطه <math>f(x) = 7\sqrt{x} + 50</math> متوسط قد کودکان تا شصت ماهگی را نشان می دهد که در آن <math>x</math> مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است.</p> <p>الف) آهنگ تغییر متوسط رشد در بازه ی زمانی <math>[0, 25]</math> چقدر است؟</p> <p>ب) آهنگ لحظه ای تغییر قد در ۴۹ ماهگی چقدر است؟</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف)</p> <p><math>\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{7}{5}</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب)</p> <p><math>f'(49) = \frac{7}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{49}} = \frac{1}{2}</math> (۰/۲۵)</p> <p>صفحه ۹۸</p>	<p>۲۴۳</p>										

برای تابع  $f$  در شکل روبرو داریم  $f(4) = 24$  و  $f'(4) = 1/5$   
با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.



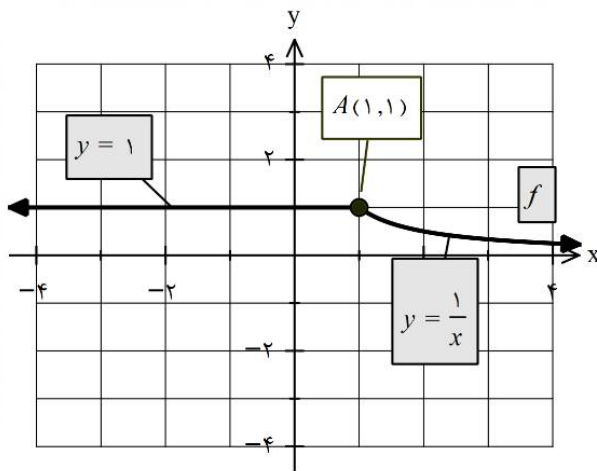
خرداد  
۱۴۰۰

پاسخ:

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5) \quad (0/5) \quad \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C = (5, 25/5) \quad (0/5)$$

صفحه ۷۶

با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع  $f$  در نقطه A،  
نشان دهید که تابع  $f$  در نقطه A مشتق پذیر نیست.



خرداد  
۱۴۰۰

پاسخ:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1 \quad (0/25) \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \quad (0/25)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 1}{x - 1} = 0 \quad (0/25)$$

$f'(1)$  موجود نیست. (۰/۲۵) صفحه ۹۰

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف)  $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

ب)  $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$

پاسخ:

خرداد  
۱۴۰۰

الف)  $f'(x) = \frac{\frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}}{(0/25)}$

ب)  $g'(x) = \frac{(6x)(2x-5)^3}{(0/25)} + \frac{(3)(2)(2x-5)^2(3x^2-4)}{(0/5)}$

صفحات ۹۲

جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله  $h(t) = -5t^2 + 40t$  به دست می آید:

الف) سرعت متوسط جسم را در بازه  $[5, 8]$  به دست آورید.

ب) مشخص کنید در چه لحظه ای سرعت جسم  $35 \text{ m/s}$  است.

پاسخ:

الف)

خرداد

۱۴۰۰

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{-(75)}{3} = -25 \quad (0/25)$$

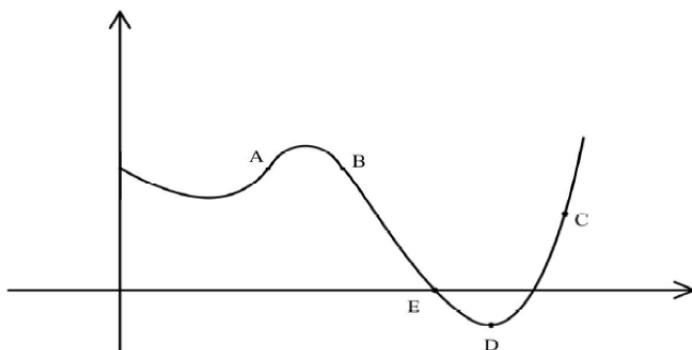
ب)

$$\overbrace{h'(t) = -10t + 40}^{(0/5)} = 35 \Rightarrow t = 0.5 \quad (0/25)$$

صفحه ۹۸

نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی است.)

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
۱	



پاسخ:

هر مورد درست (۰/۲۵)

نقطه	A	D	B	E
شیب	۱	۰	-۱	-۳

صفحه ۷۵

دی

۹۹

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف)  $f(x) = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$

ب)  $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

پاسخ:

دی

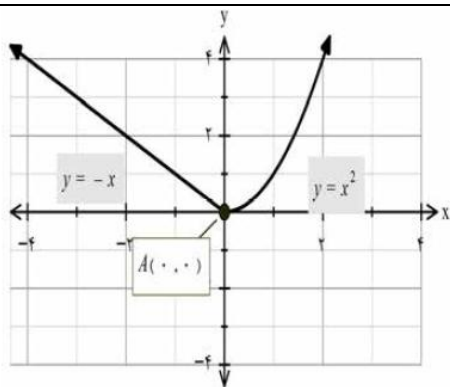
۹۹

الف)  $f'(x) = \underbrace{5\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4}_{(0/25)} \cdot \underbrace{\left(\frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2}\right)}_{(0/5)}$

ب)  $g'(x) = \underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)}_{(0/25)}(x^3+1) + \underbrace{3x^2(\sqrt{3x+2})}_{(0/25)}$

صفحه ۸۸ و ۹۲

با محاسبه مشتق چپ و راست تابع داده شده در نقطه A، نشان دهید این تابع در نقطه A مشتق پذیر نیست.



دی  
۹۹

پاسخ:

$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x^2 - \cdot}{x - \cdot} = \cdot \quad (\cdot/5) \quad \Rightarrow f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot) \quad (\cdot/25)$$

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{-x - \cdot}{x - \cdot} = -1 \quad (\cdot/5)$$

$f'(\cdot)$  موجود نیست. صفحه ۹۲

معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 10$  بر حسب متر در بازه زمانی  $[0, 5]$  (t بر حسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی  $[0, 5]$  با هم برابرند؟

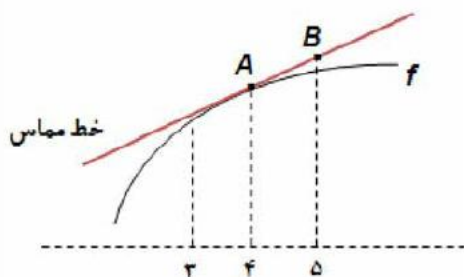
دی  
۹۹

پاسخ:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} \quad (\cdot/25) = 4 \quad (\cdot/25) \Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4 \quad (\cdot/25) \Rightarrow t = \frac{5}{2} \quad (\cdot/25)$$

صفحه ۱۰۰

برای تابع  $f$  در شکل رو به رو داریم:  $f(4) = 25$  و  $f'(4) = \frac{3}{2}$ . با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B را بیابید.



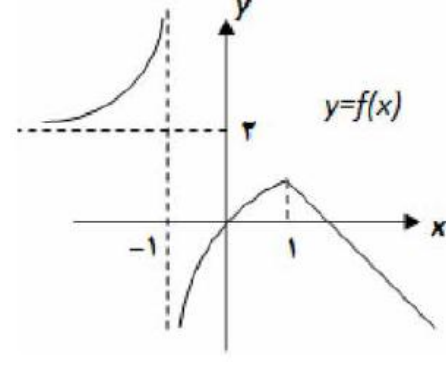
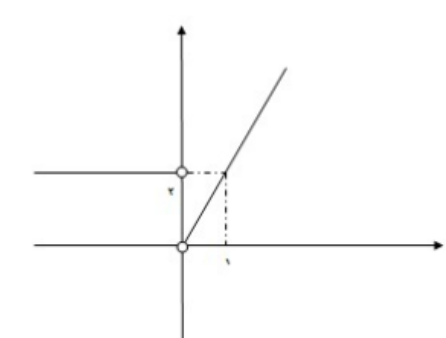
شهریور  
۹۹

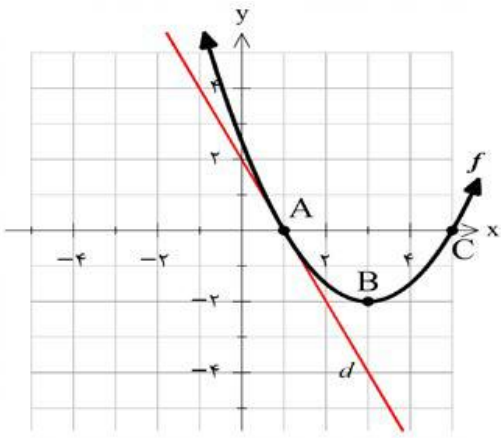
پاسخ:

$$A(4, 25) \quad (\cdot/25)$$

$$\frac{3}{2} = \frac{y_B - 25}{5 - 4} \quad (\cdot/5) \quad B(5, 26/5) \quad (\cdot/25)$$

صفحه ۷۶

شهریور ۹۹	<p>با توجه به نمودار <math>y = f(x)</math>:</p>  <p>(ب) تابع <math>y = f(x)</math> در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده، مشتق پذیر نیست؟</p> <p>پاسخ:</p> <p>(ب) تابع در <math>x = 1</math>، <math>x = -1</math> مشتق پذیر نیست. (۰/۵)</p> <p>صفحه ۸۲</p>	۲۵۳
شهریور ۹۹	<p>تابع <math>f(x) = \begin{cases} x^2 &amp; x \geq 0 \\ 2x + 1 &amp; x &lt; 0 \end{cases}</math> داده شده است:</p> <p>(الف) نشان دهید که <math>f'(0)</math> وجود ندارد.</p> <p>(ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.</p> <p>(پ) نمودار تابع <math>f'</math> را رسم کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(الف) تابع <math>f</math> در صفر پیوسته نیست. بنابراین <math>f'(0)</math> موجود نیست. (۰/۵)</p> <p>(ب) <math>f'(x) = \begin{cases} 2x &amp; x &gt; 0 \\ 2 &amp; x &lt; 0 \end{cases}</math> (۰/۵)</p>  <p>(پ) (۰/۵) نمره</p> <p>صفحه ۹۰</p>	۲۵۴
شهریور ۹۹	<p>مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>(الف) <math>f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}</math></p> <p>(ب) <math>g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x^2 + 5x)^4</math></p> <p>پاسخ:</p> <p>(الف) <math>f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+1)}{(\sqrt{x})^2}</math> (۰/۷۵)</p> <p>(ب) <math>g'(x) = \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2 + 5x)^4}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)(4)(2x + 5)(x^2 + 5x)^3}_{(۰/۷۵)}</math></p> <p>صفحات ۸۸ و ۹۲</p>	۲۵۵
شهریور ۹۹	<p>خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله <math>d(t) = -5t^2 + 20t</math> حرکت میکند، که در آن <math>0 \leq t \leq 5</math> بر حسب ثانیه است، سرعت لحظه ای در <math>t = 2</math> چقدر است؟</p>	۲۵۶

	<p>پاسخ:</p> $d'(t) = -1 \cdot t + 20 \quad (0/25) \Rightarrow d'(2) = 0 \quad (0/25)$ <p>صفحه ۹۴</p>	
<p>خرداد ۹۹</p>	<p>در نمودار مقابل خط <math>d</math> در نقطه <math>x = 1</math> بر نمودار <math>f</math> مماس شده است:</p> <p>الف) مشتق تابع <math>f</math> را در نقطه <math>x = 1</math> محاسبه کنید. ب) شیب نمودار را در نقاط <math>B, C</math> مقایسه کنید.</p>  <p>پاسخ:</p> $\text{الف) } f'(1) = \frac{2-0}{1-1} = -2 \quad (0/5) \quad \text{ب) } m_g < m_c \quad (0/5)$ <p>صفحه ۷۶</p>	<p>۲۵۷</p>
<p>خرداد ۹۹</p>	<p>به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع <math>f(x) =  x^2 - 4 </math> را در نقطه <math>x = -2</math> بررسی کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>تابع در <math>x = -2</math> پیوسته است. <math>(0/25)</math></p> $f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{ x^2 - 4  - 0}{x + 2} = 4 \quad (0/25)$ $f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{ x^2 - 4  - 0}{x + 2} = -4 \quad (0/25)$ <p><math>\Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \quad (0/25)</math></p> <p><math>f'(-2)</math> موجود نیست. <math>(0/25)</math> صفحه ۹۱</p>	<p>۲۵۸</p>
<p>خرداد ۹۹</p>	<p>مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) <math>f(x) = \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8</math>      ب) <math>g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(\sqrt{3x+2})</math></p> <p>پاسخ:</p> $\text{الف) } f'(x) = 8 \left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^7 \times \frac{(-3(x^2+5) - 2x(-3x+1))}{(x^2+5)^2}$ $\text{ب) } g'(x) = \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)(\sqrt{3x+2})}_{(0/25)} + \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)}_{(0/5)}$ <p>صفحات ۸۸ و ۹۲</p>	<p>۲۵۹</p>
<p>خرداد ۹۹</p>	<p>یک توده باکتری پس از <math>t</math> ساعت دارای جرم <math>m(t) = \sqrt{t} + 2t^3</math> گرم است. الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی <math>1 \leq t \leq 4</math> چند گرم افزایش می یابد؟</p>	<p>۲۶۰</p>

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه  $t = 4$  چقدر است؟

پاسخ:

الف)

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{13 - 3}{4 - 1} = \frac{10}{3} \quad (0/25)$$

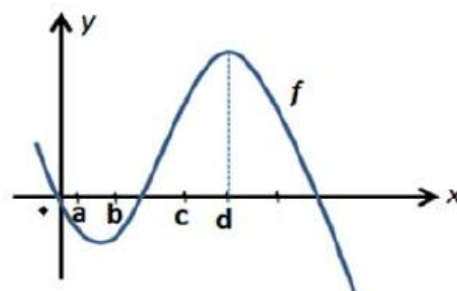
ب)

$$m'(4) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \stackrel{t=4}{=} \frac{1}{4} + 96 \quad (0/25)$$

صفحه ۱۰۰

با در نظر گرفتن نمودار  $f$  در شکل، نقاط به طول های  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  را با مشتق های داده در جدول نظیر کنید.

$x$	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵



پاسخ:

هر مورد درست (۰/۲۵) صفحه ۷۵

$x$	$d$	$b$	$c$	$a$
$f'(x)$	۰	۰/۵	۲	-۰/۵

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف)  $f(x) = (x^2 + 1)^3(5x - 1)$

ب)  $g(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

پاسخ:

الف)  $f'(x) = \overbrace{3(2x)(x^2 + 1)^2(5x - 1)}^{(0/75)} + \overbrace{5(x^2 + 1)^3}^{(0/25)}$

ب)  $g'(x) = \frac{\overbrace{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}^{(0/5)}}{\overbrace{(\sqrt{x})^2}^{(0/25)}}$

صفحه ۸۸ و ۹۲

اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$  نشان دهید  $f'_+(0)$  و  $f'_-(0)$  موجودند ولی  $f'(0)$  موجود نیست.

پاسخ:

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \quad (0/5) \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0) \quad (0/25)$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x^2 - 0} = 0 \cdot (0/5)$$

$f'(0)$  موجود نیست. صفحه ۹۲

تابع  $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$  قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان میدهد، که در آن  $x$  مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی  $[0, 25]$  چقدر است؟

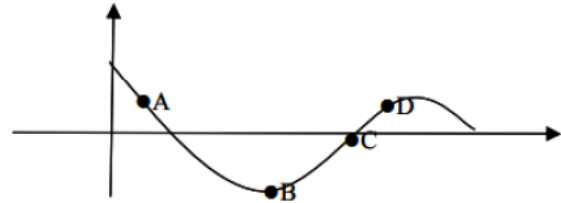
پاسخ:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(25) - f(0)}{25 - 0} = \frac{85 - 50}{25} = \frac{35}{25} = 1/4 \quad (0/25)$$

صفحه ۹۶

نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه				



پاسخ:

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه	C	B	D	A

صفحه ۷۵

مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$  را در نقطه  $x = 1$  بررسی کنید.

پاسخ:

$$f'_+(x) = 2x + 1 \rightarrow f'_+(1) = 3 \quad 0/5$$

$$f'_-(x) = 3 \rightarrow f'_-(1) = 3 \quad 0/5$$

$$f'_+(1) = f'_-(1) = 3 \quad 0/5$$

در نقطه  $x = 1$  مشتق پذیر است.

صفحه ۹۱

مشتق تابع  $y = \frac{1}{x}(2\sqrt{x} - 1)^4$  را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

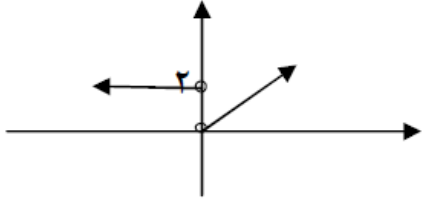
پاسخ:

$$y' = \frac{-1}{x^2} \times \frac{(2\sqrt{x} - 1)^4}{0/25} + \frac{4(2\sqrt{x} - 1)^3}{0/25} \times \left( \frac{2}{2\sqrt{x}} - 0 \right) \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{0/25}$$

صفحه ۹۹

آهنگ تغییر متوسط تابع  $f(x) = \sqrt{x+2}$  را وقتی متغیر از  $x_1 = 2$  به  $x_2 = 7$  تغییر میکند به دست آورید.

پاسخ:

	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$	صفحه ۹۴
۹۸ خرداد	<p>مشتق تابع <math>f(x) = x^3 - 2</math> را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول <math>x = -1</math> به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3$	۲۶۹ صفحه ۷۶
۹۸ خرداد	<p>تابع <math>f(x) = \begin{cases} 2x - 1 &amp; x &lt; 0 \\ x^2 - 1 &amp; x \geq 0 \end{cases}</math> را در نظر بگیرید:</p> <p>(الف) نشان دهید <math>f'(0)</math> وجود ندارد.</p> <p>(ب) ضابطه ی تابع مشتق را بنویسید.</p> <p>(ج) نمودار تابع <math>f'</math> را رسم کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(الف) در <math>x = 0</math> گوشه ای و مشتق ناپذیر است. <math>0/5</math> (در صورتی که با مقدار مشتق چپ و راست بررسی کند نمره تعلق می گیرد)</p> <p>(ب) <math>f'(x) = \begin{cases} 2 &amp; x &lt; 0 \\ 2x &amp; x &gt; 0 \end{cases}</math> <math>0/5</math></p> <p>(ج)</p> 	۲۷۰ صفحه ۹۰
۹۸ خرداد	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)</p> <p>الف) <math>f(x) = (x^4 - 3x)^5</math>      ب) <math>g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-x}</math></p> <p>پاسخ:</p> $\text{الف) } f'(x) = 5(x^4 - 3x)^4 (4x^3 - 3)$ $\text{ب) } g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) - (-1)\sqrt{x}}{(1-x)^2}$	صفحات ۸۸ و ۹۲
۹۸ خرداد	<p>معادله ی حرکت متحرکی به صورت <math>f(t) = 2t^2 - t</math>، بر حسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه ی زمانی <math>[0, 4]</math> با هم برابرند.</p> <p>پاسخ:</p>	۲۷۲

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7, \quad f'(t) = 4t - 1 \rightarrow 4t - 1 = 7 \rightarrow t = 2$$

صفحه ۱۰۰

# فصل ۵




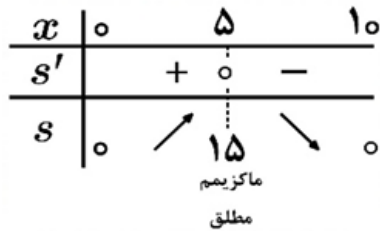
## فصل ۵



درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با (ص/غ) مشخص کنید

دی ۱۴۰۳	<p>(ت) هر نقطه اکسترمم مطلق، اکسترمم نسبی نیز هست.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(ت) نادرست (صفحه ۱۱۰) هر مورد (۰/۲۵)</p>	۲۷۳
خرداد ۱۴۰۳	<p>(الف) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(الف) درست (۰/۲۵) (صفحه ۱۰۶)</p>	۲۷۴
خرداد ۱۴۰۲	<p>(پ) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن تابع است.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(پ) درست (۰/۲۵) فصل ۵</p>	۲۷۵
شهریور ۱۴۰۱	<p>(پ) هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه بحرانی است.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(پ) درست هر مورد (۰/۲۵) صفحه ۱۱۲</p>	۲۷۶
خرداد ۱۴۰۰	<p>(الف) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(الف) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۰۶</p>	۲۷۷
شهریور ۹۹	<p>(پ) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(پ) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۰۶</p>	۲۷۸
خرداد ۹۹	<p>(ج) تابع <math>f(x) = x^3 - 3x</math> در بازه <math>(-1, 1)</math> اکیداً صعودی است.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(ج) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۰۴</p>	۲۷۹
<p>عبارت‌های زیر را با کلمات مناسب تکمیل کنید.</p>		
خرداد ۱۴۰۴	<p>(ب) نقطه به طول <math>c</math> از دامنه تابع <math>f</math> که در آن <math>f'(c) = 0</math> یا <math>f'(c)</math> موجود نباشد را یک نقطه ..... می‌نامیم.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(ب) بحرانی (۰/۲۵) صفحه ۱۰۶</p>	۲۸۰

<p>خرداد ۱۴۰۰</p>	<p>الف) بزرگترین بازه ای که تابع <math>f(x) = x^3 - 3x</math> در آن اکیدا نزولی است برابر ..... است. پاسخ: الف) <math>(-1, 1)</math> یا <math>[-1, 1]</math> هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۰۴</p>	<p>۲۸۱</p>
 <b>مسائل</b>		
<p>دی ۱۴۰۴</p>	<p>اگر نقطه <math>(3, 2)</math> نقطه اکسترم نسبی تابع <math>f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2</math> باشد، آنگاه مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را به دست آورید. پاسخ: (ص ۱۱۲) <math>f'(x) = 3x^2 + 2ax + b</math> , <math>f'(3) = 0 \rightarrow 6a + b = -27</math> (۰/۲۵) <math>f(3) = 2 \rightarrow 9a + 3b = -27</math> یا <math>3a + b = -9</math> (۰/۲۵) <math>\rightarrow \begin{cases} 6a + b = -27 \\ 3a + b = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases}</math> (۰/۲۵)</p>	<p>۲۸۲</p>
<p>دی ۱۴۰۴</p>	<p>اگر در مستطیلی با طول <math>x</math> و عرض <math>y</math> رابطه <math>3x + 5y = 30</math> برقرار باشد، آنگاه ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن شود. (رسم جدول تغییرات الزامی است). پاسخ: (ص ۱۱۴) روش اول: <math>3x + 5y = 30 \rightarrow y = -\frac{3}{5}x + 6</math> (۰/۲۵) <math>S = x \cdot y \rightarrow S(x) = x \left( -\frac{3}{5}x + 6 \right) = -\frac{3}{5}x^2 + 6x</math> (۰/۲۵) <math>\rightarrow S'(x) = -\frac{6}{5}x + 6 = 0</math> (۰/۲۵) <math>\rightarrow x = 5</math> (۰/۲۵)</p>	<p>۲۸۳</p>



رسم جدول تغییرات (0/25) // (0/25)  $\leftarrow y = 3$

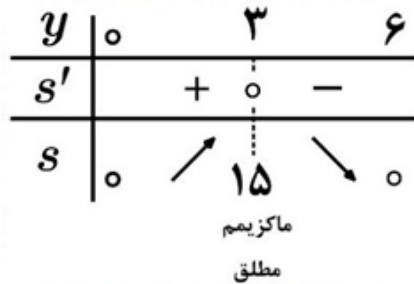
روش دوم:

$$3x + 5y = 30 \rightarrow y = -\frac{5}{3}x + 10 \quad (0/25)$$

$$S = x \cdot y \rightarrow S(y) = \left(-\frac{5}{3}y + 10\right)y = -\frac{5}{3}y^2 + 10y \quad (0/25) \rightarrow S'(y) = -\frac{10}{3}y + 10 = 0 \quad (0/25)$$

$$\rightarrow y = 3 \quad (0/25)$$

رسم جدول تغییرات (0/25) // (0/25)  $\leftarrow x = 5$



۲۸۴ اگر  $f(x) = x^3 + 4x$ ، مقدار اکسترم های مطلق تابع را در بازه  $[-2, 1]$  بیابید.

پاسخ:

روش اول: معادله جواب ندارد (0/25)  $f'(x) = 3x^2 + 4 = 0 \quad (0/25)$

$f(-2) = -16 \quad (0/25)$  مقدار مینیمم مطلق (0/25)  $-16$

$f(1) = 5 \quad (0/25)$  مقدار ماکزیمم مطلق (0/25)  $5$

روش دوم: مشتق اول تابع چند جمله ای داده شده همواره مثبت است، پس این تابع صعودی اکید است، بنابراین مینیمم و ماکزیمم مطلق آن در ابتدا و انتهای بازه است. (0/5)

$f(-2) = -16 \quad (0/25)$  مقدار مینیمم مطلق (0/25)  $-16$

$f(1) = 5 \quad (0/25)$  مقدار ماکزیمم مطلق (0/25)  $5$  (ص ۱۱۲)

شهریور  
۱۴۰۴

۲۸۵ غلظت یک داروی شیمیایی در خون،  $t$  ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه  $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$  به دست می آید.

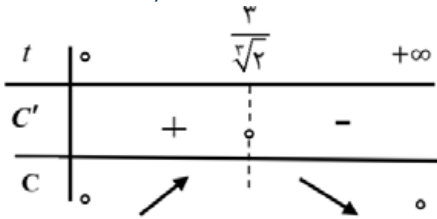
شهریور  
۱۴۰۴

چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟ (رسم جدول تغییرات الزامی است.)

پاسخ:

$$C'(t) = \frac{3(t^3+27)-3t^2(3t)}{(t^3+27)^2} = \frac{3(t^3+27)-9t^3}{(t^3+27)^2} = \frac{3t^3+81-9t^3}{(t^3+27)^2} = \frac{-6t^3+81}{(t^3+27)^2} = 0 \Rightarrow (t^3+27)-3t^3=0 \Rightarrow t^3=\frac{27}{2} \Rightarrow t=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

اگر دانش آموز  $t$  را بصورت  $2/3$  یا  $2/38$  بنویسد، نمره تعلق بگیرد.



رسم جدول (۰/۲۵)

۲۸۶

تابع  $f(x) = x^3 - 12x + 4$  را در نظر بگیرید.

الف) بزرگترین بازه از  $\mathbb{R}$  که تابع  $f$  در آن نزولی اکید است را به دست آورید.

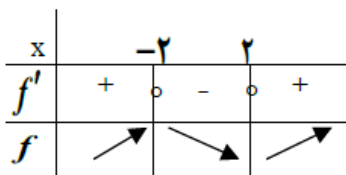
ب) طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع  $f$  را مشخص کنید.

پاسخ:

روش اول:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \quad (۰/۲۵)$$

الف)  $[-2, 2]$  (۰/۲۵)



رسم جدول (۰/۲۵)

ب) با توجه به جدول تغییرات، طول ماکزیمم نسبی:  $x = -2$  (۰/۲۵)

روش دوم:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \leq 0 \quad (۰/۵) \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \quad (۰/۵)$$

الف:

ب) با توجه به قسمت الف، طول ماکزیمم نسبی:  $x = -2$  (۰/۲۵)

روش سوم:

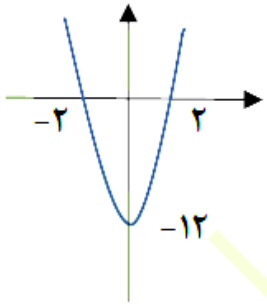
$$f'(x) = 3x^2 - 12 \quad (۰/۲۵)$$

الف:

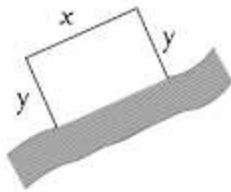
با توجه به نمودار تابع مشتق، مقدار مشتق در بازه  $[-2, 2]$  نامثبت است، پس تابع نزولی اکید است. (۰/۲۵)

خرداد

۱۴۰۴



ب: با توجه به نمودار تابع مشتق،  $x = -2$  طول ماکسیمم نسبی است. (۰/۲۵)  
 توجه: اگر جواب قسمت الف به صورت هریک از بازه های  $(-2, 2]$  یا  $[-2, 2)$  یا  $(-2, 2)$  هم نوشته شده باشد،  
 نمره تعلق گیرد. صفحه ۱۱۲



میخواهیم مطابق شکل مقابل، سه ضلع یک محوطه به شکل مستطیل را در کنار رودخانه  
 نرده کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، به کمک جدول  
 تغییرات، بیشترین مساحت ممکن برای این مستطیل را محاسبه کنید.

۲۸۷

پاسخ:

$$x + 2y = 100 \Rightarrow \underbrace{x = 100 - 2y}_{\cdot/25}$$

$$S = x \cdot y = (100 - 2y)y = 100y - 2y^2 \quad (\cdot/25)$$

$$\underbrace{S'(y) = 100 - 4y = 0}_{\cdot/25} \Rightarrow y = 25 \quad (\cdot/25)$$

$$S_{max} = 50 \times 25 = 1250 \quad (\cdot/25)$$

$y$	۰	۲۵	۵۰
$S'$	+		-
$S$	↗		↘

رسم جدول (۰/۲۵)

روش دوم:

$$x + 2y = 100 \Rightarrow 2y = 100 - x \Rightarrow \underbrace{y = \frac{100 - x}{2}}_{\cdot/25}$$

$$s = xy = x \left( \frac{100 - x}{2} \right) = \left( \frac{100x - x^2}{2} \right) \quad (\cdot/25)$$

$$s'(x) = \frac{100 - 2x}{2} = 0 \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow \underbrace{x = 50}_{\cdot/25}$$

$$S_{max} = 50 \times 25 = 1250 \quad (\cdot/25)$$

$x$	۰	۵۰
$S'$	+	-
$S$	↗	↘

رسم جدول (۰/۲۵)

صفحه ۱۲۰

خرداد  
۱۴۰۴

با رسم جدول تغییرات تابع  $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$  طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع را در صورت وجود

۲۸۸

بیابید.

پاسخ:

دی  
۱۴۰۳

$$f'(x) = -3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(-3x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0/25) \\ x = -2 & (0/25) \end{cases}$$

$x$		$-2$		$0$	
$f'$		$-$	$+$	$-$	
$f$		$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		<b>min</b>	<b>max</b>		

طول نقطه ماکسیم نسبی (0/25)  $x = 0$ طول نقطه مینیمم نسبی (0/25)  $x = -2$ 

طول مستطیلی را بیابید که مساحت آن ۱۶ سانتی متر مربع و محیط آن کمترین مقدار ممکن گردد.

پاسخ:

دی

$$s = ab = 16 \rightarrow b = \frac{16}{a} \quad (0/25)$$

۱۴۰۳

$$p = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{16}{a}\right) = 2a + \frac{32}{a} \quad (0/25)$$

$$p' = 2 - \frac{32}{a^2} = 0 \left(\frac{0}{25}\right) \rightarrow \frac{32}{a^2} = 2 \rightarrow a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \quad (0/25)$$

(صفحه ۱۱۴)

۲۸۹

با رسم جدول تغییرات تابع، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 15x + 4$$

پاسخ:

$$f'(x) = 2x^2 - x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 & (0/25) \\ x = -\frac{5}{2} & (0/25) \end{cases}$$

شهریور

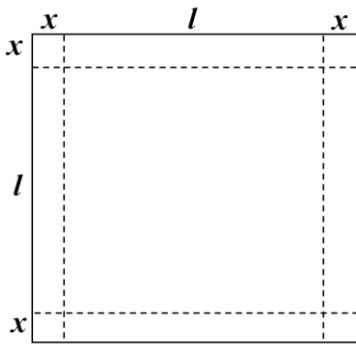
۱۴۰۳

$x$		$-\frac{5}{2}$		$3$	
$f'$		$+$	$-$	$+$	
$f$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		<b>max</b>	<b>min</b>		

طول نقاط min و max هر مورد 0/25 و جدول 0/25

صفحه ۱۱۲

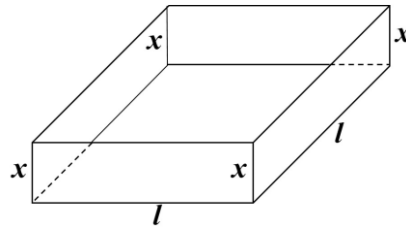
۲۹۰



ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل می خواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه ی در باز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

پاسخ:

$$v = xl^2$$



$$2x + l = 30 \rightarrow \overbrace{l = 30 - 2x}^{(0/25)} \rightarrow v = x(30 - 2x)^2 \text{ یا } 4x^3 - 12x^2 + 90x, x \in (0/25)$$

[0, 15]

$$v'(x) = (30 - 2x)^2 + 2(-2)(30 - 2x)x = 0 \text{ یا } v'(x) = 12x^2 - 24x + 90 = 0 \text{ (0/25)}$$

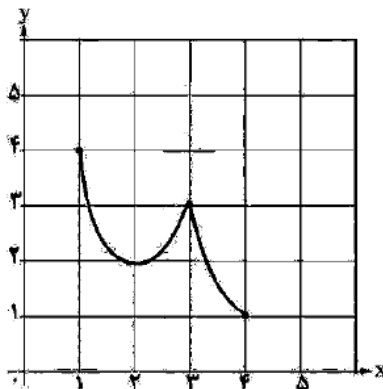
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 15 \end{cases} \text{ (0/25)}$$

x	0	5	15
v'		+	-
v		↗	↘
	0	2000	0

صفحه ۱۱۵

بیشترین حجم برای  $x = 5$  به دست می آید. (0/25)

در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.



پاسخ:

۳ = طول ماکزیمم نسبی

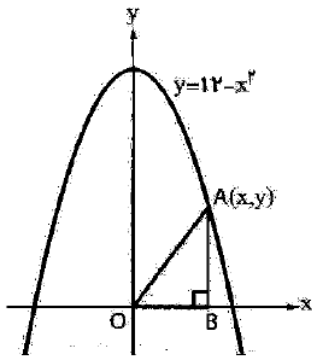
۲ = طول مینیمم نسبی

طول ماکزیمم مطلق = ۱

طول مینیمم مطلق = ۴

(صفحه ۱۱۰)

۲۹۳



مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی  $y = 12 - x^2$

$x^2$  قرار دارد.

با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم

الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

پاسخ:

(صفحه ۱۲۰)

خرداد

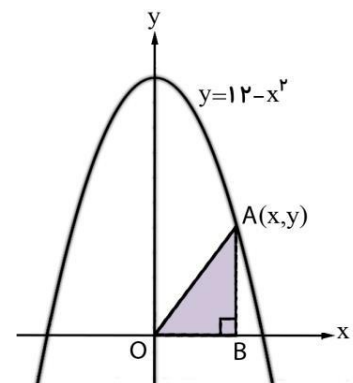
۱۴۰۳

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(12 - x^2) = 6x - \frac{1}{2}x^3 \quad (./25) \Rightarrow S'(x) = 6 - \frac{3}{2}x^2 \quad (./25)$$

$$6 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \quad (./25) \xrightarrow{x>0} x = 2 \quad (./25) \Rightarrow y = 12 - 4 = 8 \quad (./25)$$

X	0	2	$\sqrt{12}$
$S'(x)$		+	-
$S(x)$		↗	↘

(./25)



۲۹۴

با رسم جدول تغییرات تابع  $f(x) = x^3 - 27x + 1$  مشخص کنید تابع در کدام بازه ها اکیداً صعودی است؟

پاسخ:

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \quad (./25) \Rightarrow x = \pm 3 \quad (./25)$$

اکیدا صعودی  $(-\infty, -3], [3, +\infty)$  (./5)

رسم جدول ۰/۵ نمره

فصل ۵

دی

۱۴۰۲

X		-3	3	
$f'(x)$		+	-	+

۲۹۵

میخواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل و دربار بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتیمترمکعب است. ابعاد

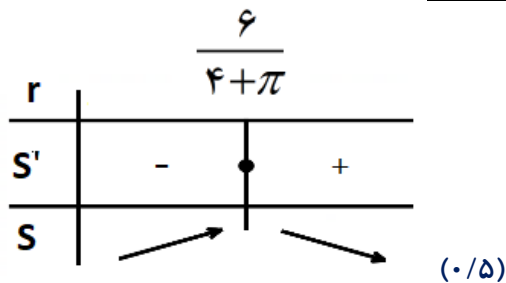
قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ ( $\pi \approx 3$ )

پاسخ:

دی

۱۴۰۲

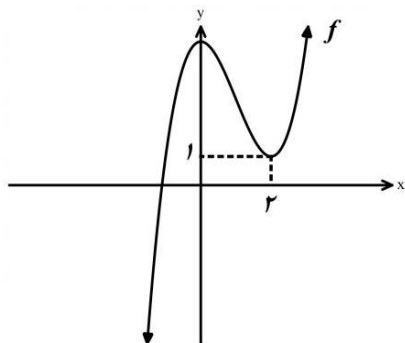
	$h = \frac{300}{r^2} \quad (0/25) \quad S = \frac{1800}{r} + 3r^2 \quad (0/25) \quad S' = \frac{-1800}{r^2} + 6r = 0 \quad (0/5)$ $r = \sqrt[3]{300} \quad (0/25) \Rightarrow h = \sqrt[3]{300} \quad (0/25)$	فصل ۵																																			
شهریور ۱۴۰۲	<p>نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.</p> $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 & (0/25) \\ x = 2 & (0/25) \end{cases}$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>-1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>2</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>f'</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cdot</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cdot</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>f</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\searrow</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>-16</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\nearrow</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>11</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\searrow</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><i>Min</i></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><i>Max</i></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>(0/25)</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>(0/25)</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">جدول <math>(0/5)</math></p>	$x$	$-\infty$	$-1$	$+$	$2$	$-$	$+\infty$	$f'$	$-$	$\cdot$	$+$	$\cdot$	$-$		$f$	$\searrow$	$-16$	$\nearrow$	$11$	$\searrow$				<i>Min</i>		<i>Max</i>					$(0/25)$		$(0/25)$			۲۹۶
$x$	$-\infty$	$-1$	$+$	$2$	$-$	$+\infty$																															
$f'$	$-$	$\cdot$	$+$	$\cdot$	$-$																																
$f$	$\searrow$	$-16$	$\nearrow$	$11$	$\searrow$																																
		<i>Min</i>		<i>Max</i>																																	
		$(0/25)$		$(0/25)$																																	
خرداد ۱۴۰۲	<p>بزرگترین بازه از <math>\mathbb{R}</math> که تابع <math>f(x) = -2x^3 + 6x + 11</math> در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $f'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad (0/5)$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>-1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>f'</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cdot</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>\cdot</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>f</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\searrow</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"><math>\nearrow</math></td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;"><math>\searrow</math></td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"><math>(0/5)</math></p> <p style="text-align: center;">پس تابع در بازه <math>[-1, 1]</math> صعودی اکید است. <math>(0/25)</math> فصل ۵</p>	$x$	$-\infty$	$-1$	$+$	$1$	$-$	$+\infty$	$f'$	$-$	$\cdot$	$+$	$\cdot$	$-$		$f$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		۲۹۷														
$x$	$-\infty$	$-1$	$+$	$1$	$-$	$+\infty$																															
$f'$	$-$	$\cdot$	$+$	$\cdot$	$-$																																
$f$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$																																
خرداد ۱۴۰۲	<p>پنجره ای به شکل یک مستطیل و نیم دایره ای بر روی آن داریم به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $2h + 2r + \pi r = 6 \Rightarrow h = \frac{6 - 2r - \pi r}{2} \quad (0/25)$ $S(r) = 6r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 6 - 4r - \pi r \quad (0/25)$ $6 - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4 + \pi} \quad (0/25)$	۲۹۸																																			



$$h = \frac{6 - (2 + \pi) \frac{6}{4 + \pi}}{2} = \frac{6}{4 + \pi} \quad (0/25)$$

فصل ۵

دی  
۱۴۰۱



نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^3 + bx^2 + d$  به صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر  $b$  و  $d$  را بیابید.

۲۹۹

پاسخ:

$$f'(2) = 0 \quad (0/25) \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \quad (0/25) \quad b = -3 \quad (0/25)$$

$$f(2) = 1 \quad (0/25) \rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \quad (0/25) \quad d = 5 \quad (0/25)$$

فصل ۵

دی  
۱۴۰۱

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

۳۰۰

پاسخ:

$$x - y = 10 \quad (0/25)$$

$$p = xy = x(x - 10) = x^2 - 10x \quad (0/25)$$

$$p'(x) = 2x - 10 = 0 \quad (0/5) \rightarrow x = 5 \quad (0/25), \quad y = -5 \quad (0/25)$$

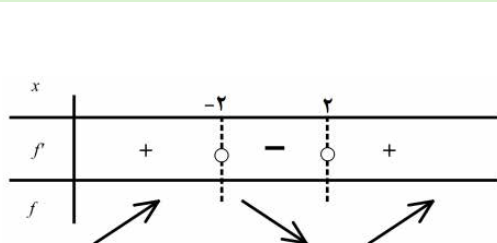
فصل ۵

شهریور  
۱۴۰۱

با تشکیل جدول تغییرات تابع  $f(x) = x^3 - 12x + 4$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه هایی صعودی اکید است؟

۳۰۱

پاسخ:



$$f'(x) = 3x^2 - 12 \quad (0/25) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2 \quad (0/5)$$

تکمیل جدول (0/25)

$(-\infty, -2), (2, +\infty)$  اکیداً صعودی (0/5)

صفحه ۱۱۲

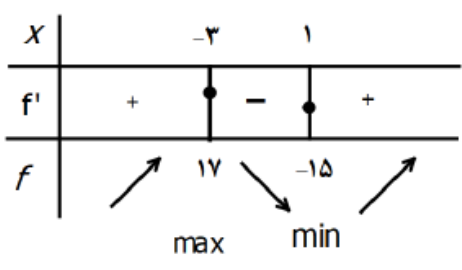
شهریور  
۱۴۰۱

نشان دهید در بین مستطیل هایی با محیط ۱۶ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.

۳۰۲

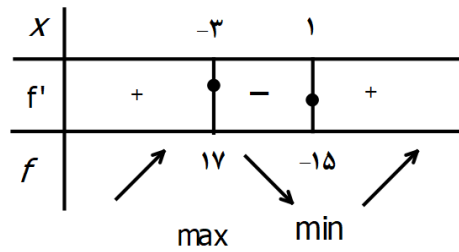
	<p>پاسخ:</p> $y = 8 - x \quad (./25) \Rightarrow S(x) = -x^2 + 8x \quad (./25) \quad S'(x) = -2x + 8 = 0 \quad (./25)$ $x = 4 \quad (./25) , \quad y = 4 \quad (./25)$ <p>صفحه ۱۱۴</p>	
<p>خرداد ۱۴۰۱</p>	<p>اکسترم های نسبی تابع <math>f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}</math> را در صورت وجود به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (./5) \quad x = 3, x = -1 \quad (./5)$ <p>تکمیل جدول (۱) نمره صفحه ۱۱۲</p>	۳۰۳
<p>خرداد ۱۴۰۱</p>	<p>اگر بین دو عدد حقیقی <math>x</math> و <math>y</math> رابطه ی <math>5x - y = 10</math> برقرار باشد، مقادیر <math>x</math> و <math>y</math> را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم گردد.</p> <p>پاسخ:</p> $p = xy = 5x^2 - 10x \quad (./5) \rightarrow p'(x) = 0 \quad (./25) \rightarrow 10x - 10 = 0 \quad (./25)$ $\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases} \quad (./5)$ <p>صفحه ۱۲۰</p>	۳۰۴
<p>دی ۱۴۰۰</p>	<p>اکسترم های مطلق تابع <math>f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x</math> را در بازه ی <math>[-1, 3]</math> مشخص کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad (./25) \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \notin [-1, 3] \end{cases} \quad (./5)$ $f(-1) = 13 \quad (./25)$ $f(1) = -7 \quad (./25) \Rightarrow \min(1, -7) \quad (./25)$ $f(3) = 45 \quad (./25) \Rightarrow \max(3, 45) \quad (./25)$ <p>صفحه ۱۱۱</p>	۳۰۵
<p>دی ۱۴۰۰</p>	<p>اگر نقطه <math>(2, 1)</math> نقطه اکسترم نسبی تابع <math>f(x) = x^3 + bx^2 + d</math> باشد، مقادیر <math>b, d</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $f(2) = 1 \Rightarrow 4b + d = -7 \quad (./5)$ $f'(2) = 0 \Rightarrow b = -3, d = 5 \quad (./5)$ <p>صفحه ۱۱۲</p>	۳۰۶
<p>شهریور ۱۴۰۰</p>	<p>تابع با ضابطه ی <math>f(x) = x^3 - 3x</math> در چه بازه هایی اکیدا صعودی و در کدام بازه اکیدا نزولی است؟</p> <p>پاسخ:</p>	۳۰۷

	$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow (0/5) \quad (0/25)$	 <p>تکمیل جدول <math>x = \pm 1</math></p>	
شهریور ۱۴۰۰	اکیدا صعودی $(-\infty, -1)$ , $(1, +\infty)$ (0/5) اکیدا نزولی $(-1, 1)$ (0/25)	دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد. پاسخ: $y = 10 + x(0/25) \rightarrow p = (y)(x) = 10x + x^2 \rightarrow p'(x) = 10 + 2x = 0$ $\rightarrow x = -5(0/25), y = +5(0/25)$	۳۰۸ صفحه ۱۱۲
خرداد ۱۴۰۰	اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر $b$ و $d$ را به دست آورید. پاسخ: $f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4b = 0 \quad b = -3 \quad (0/5)$ $f(2) = 1 \rightarrow 4b + d = -7 \quad (0/5)$ $-12 + d = -7 \rightarrow d = 5 \quad (0/5)$	اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر $b$ و $d$ را به دست آورید. پاسخ: $f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4b = 0 \quad b = -3 \quad (0/5)$ $f(2) = 1 \rightarrow 4b + d = -7 \quad (0/5)$ $-12 + d = -7 \rightarrow d = 5 \quad (0/5)$	۳۰۹ صفحه ۱۱۲
خرداد ۱۴۰۰	در بین تمام مستطیل هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، طول و عرض مستطیلی با بیش ترین مساحت را بیابید. پاسخ: $y = 7 - x \quad (0/25) \rightarrow s = (y)(x) = 7x - x^2 \rightarrow s'(x) = 7 - 2x = 0$ $\rightarrow x = 3/5 \quad (0/25) , y = 3/5 \quad (0/25)$	در بین تمام مستطیل هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، طول و عرض مستطیلی با بیش ترین مساحت را بیابید. پاسخ: $y = 7 - x \quad (0/25) \rightarrow s = (y)(x) = 7x - x^2 \rightarrow s'(x) = 7 - 2x = 0$ $\rightarrow x = 3/5 \quad (0/25) , y = 3/5 \quad (0/25)$	۳۱۰ صفحه ۱۱۴
دی ۹۹	در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$	در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. پاسخ: تکمیل جدول یک نمره	۳۱۱

	$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \quad \begin{matrix} (0/5) \\ (0/5) \end{matrix}$  <p style="text-align: right;">صفحه ۱۱۲</p>	
دی ۹۹	<p>نشان دهید در بین تمام مستطیل های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیش ترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $f = xy \rightarrow \overbrace{f(x) = x(7-x)}^{(0/25)} = -x^2 + 7x \rightarrow \overbrace{f'(x) = -2x + 7}^{(0/25)} = 0$ $\rightarrow x = \frac{7}{2} \quad (0/25) \quad , \quad y = \frac{7}{2} \quad (0/25)$ <p style="text-align: right;">صفحه ۱۱۴</p>	۳۱۲
شهریور ۹۹	<p>اکسترم های مطلق تابع <math>f(x) = x^3 - 3x + 7</math> را در بازه <math>[-1, 3]</math>، در صورت وجود به دست آورید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \quad (0/25)$ $f(-1) = 9$ $f(1) = 5 \quad (0/75) \quad \max(3, 25) \quad , \quad \min(1, 5) \quad (0/5)$ $f(3) = 25$ <p style="text-align: right;">صفحه ۱۱۱</p>	۳۱۳
شهریور ۹۹	<p>اگر تابع <math>f(x) = ax^2 + bx</math> در <math>x = 1</math> دارای اکسترم نسبی برابر <math>-3</math> باشد، مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را بیابید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $f'(x) = 2ax + b$ $f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (0/25) \Rightarrow a = 3 \quad (0/25)$ $f(1) = -3 \Rightarrow a + b = -3 \quad (0/25) \Rightarrow b = -6 \quad (0/25)$ <p style="text-align: right;">صفحه ۱۱۲</p>	۳۱۴
شهریور ۹۹	<p>دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن ها <math>20</math> باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> $a - b = 20 \Rightarrow a = b + 20 \quad (0/25)$ $f(b) = b(b + 20) \Rightarrow f'(b) = 2b + 20 = 0 \quad (0/25)$ $b = -10, a = +10 \quad (0/5)$ <p style="text-align: right;">صفحه ۱۲۰</p>	۳۱۵

<p>خرداد ۹۹</p>	<p>اگر نقطه <math>(۲, ۱)</math>، نقطه اکسترمم نسبی تابع <math>f(x) = x^3 + bx^2 + d</math> باشد، مقادیر <math>b</math> و <math>d</math> را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $f'(x) = 3x^2 + 2bx \quad (۰/۲۵)$ $f'(2) = 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 12 + 4b = 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow b = -3 \quad (۰/۲۵)$ $f(2) = 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 8 + 4b + d = 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow d = 5 \quad (۰/۲۵)$ <p>صفحه ۱۱۲</p>	<p>۳۱۶</p>																								
<p>خرداد ۹۹</p>	<p>تابع <math>f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9</math> در نظر بگیرید:</p> <p>الف) با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.</p> <p>ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع <math>f</math> در بازه <math>[۰, ۳]</math> در صورت وجود به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) تکمیل جدول <math>(۰/۷۵)</math> نمره</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border: none;"><math>x</math></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;">-1</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="border: none;"><math>f'</math></td> <td style="border: none;">-</td> <td style="border: none;"> </td> <td style="border: none;">+</td> <td style="border: none;"> </td> <td style="border: none;">-</td> </tr> <tr> <td style="border: none;"><math>f</math></td> <td style="border: none;">↘</td> <td style="border: none;">-16</td> <td style="border: none;">↗</td> <td style="border: none;">11</td> <td style="border: none;">↘</td> </tr> <tr> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;">min</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;">max</td> <td style="border: none;"></td> </tr> </table> <p>ب)</p> $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \quad (۰/۲۵) \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \quad (۰/۵)$ $f(0) = -9 \quad min$ $f(2) = 11 \quad max \Rightarrow \quad (۰/۷۵)$ $f(3) = 0$ <p>صفحه ۱۱۲</p>	$x$		-1		2		$f'$	-		+		-	$f$	↘	-16	↗	11	↘			min		max		<p>۳۱۷</p>
$x$		-1		2																						
$f'$	-		+		-																					
$f$	↘	-16	↗	11	↘																					
		min		max																						
<p>خرداد ۹۹</p>	<p>هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت <math>۳۲cm^2</math> خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایین هر صفحه <math>۲cm</math> و حاشیه های کناری هر کدام یک سانتی متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.</p> <p>پاسخ:</p> $xy = 32 \quad (۰/۲۵) \rightarrow f(x) = (y + 2)(x + 4) = \frac{128}{x} + 40 + 2x \rightarrow f'(x) = -\frac{128}{x^2} + 2 = 0$ $\rightarrow x = 8 \quad (۰/۲۵) \quad , \quad y = 4 \quad (۰/۲۵)$ <p>ابعاد صفحه: <math>۱۲ \times ۶</math> است. <math>(۰/۲۵)</math> صفحه ۱۲۰</p>	<p>۳۱۸</p>																								
<p>دی ۹۸</p>	<p>در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.</p> $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ <p>پاسخ:</p> <p>تکمیل جدول یک نمره</p>	<p>۳۱۹</p>																								

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \left( \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array} \right)$$



صفحه ۱۱۲

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

۳۲۰

پاسخ:

دی

۹۸

$$f(x) = xy \rightarrow \overbrace{f(x) = x(x+10)}^{(0/25)} = x^2 + 10x \rightarrow \overbrace{f'(x) = 2x + 10 = 0}^{(0/25)}$$

$$\rightarrow x = -5 \quad (0/25), \quad y = 5 \quad (0/25)$$

صفحه ۱۱۹

الف) جدول تغییرات تابع  $f(x) = x^3 - 3x + 4$  را رسم کنید و نقاط اکسترم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

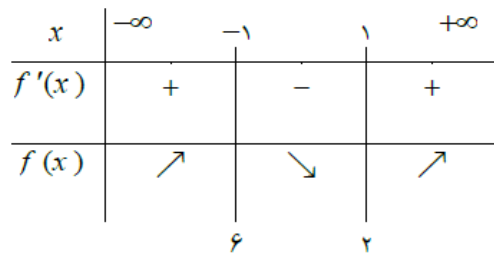
۳۲۱

ب) اکسترم های مطلق تابع  $g(x) = x^3 + 2x - 5$  را در بازه  $[-2, 1]$  در صورت وجود تعیین کنید.

پاسخ:

$$f(x) = x^3 - 3x + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \cdot/25 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

الف)



•/۲۵

نقطه ی (۱ و ۲) مینیمم نسبی و نقطه ی (۱ و ۶) ماکزیمم نسبی است. (۰/۵)

ب)

$$g(x) = x^3 + 2x - 5 \rightarrow g'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0 \quad \cdot/5$$

$$g(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 5 = -8 - 4 - 5 = -17 \quad \text{min} \quad \cdot/25$$

$$g(1) = 1 + 2 - 5 = -2 \quad \text{max} \quad \cdot/25$$

(صفحه ۱۱۲)

دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که داشته باشیم  $2a + b = 60$  و حاصل ضرب آن ها بیشترین مقدار ممکن گردد.

۳۲۲

گردد.

پاسخ:

شهریور

۹۸

$$2a + b = 60 \rightarrow b = 60 - 2a \rightarrow ab = a(60 - 2a) = 60a - 2a^2 \quad \cdot/25$$

	$(ab)' = 60 - 4a = 0 \rightarrow a = 15 \cdot /5 \rightarrow b = 60 - 2 \times 15 = 30 \cdot /25$	صفحه ۱۱۹
خرداد ۹۸	اکستریم های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه ی $[-1, 3]$ به دست آورید. پاسخ: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \rightarrow f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1, 3] \\ x = 1 \end{cases}$ $f(1) = -7, f(-1) = 13, f(3) = 45$ (۷- و ۱) مینیمم مطلق و نقطه (۳ و ۴۵) ماکزیمم مطلق (هر قسمت ۰/۲۵)	۳۲۳ صفحه ۱۱۱
خرداد ۹۸	اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر $a$ و $b$ را به دست آورید. پاسخ: $f'(x) = 2ax + b \rightarrow 0 = 2a + b \rightarrow b = -2a$ $f(1) = 7 \rightarrow 7 = a + b \rightarrow a = -7, b = 14$	۳۲۴ صفحه ۱۱۲
خرداد ۹۸	ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می خواهیم از چهار گوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع $x$ برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه $x$ برمی گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار $x$ چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد. پاسخ: $v(x) = (1 - 2x)^2 \times x = x - 4x^2 + 4x^3$ $v'(x) = 1 - 8x + 12x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{6}$ $x = \frac{1}{6}$ قابل قبول است. ۰/۲۵	۳۲۵ صفحه ۱۱۵

# فصل ۶



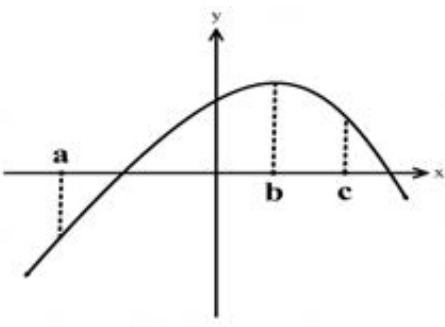

## فصل ۶



درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با (ص/غ) مشخص کنید

شهریور ۱۴۰۴	<p>(پ) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک نیمکره است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) درست (ص ۱۲۳) (۰/۲۵)</p>	۳۲۶
خرداد ۱۴۰۴	<p>(ب) هر چه خروج از مرکز بیضی کوچک تر و به صفر نزدیک تر باشد، شکل بیضی به شکل نزدیک تر است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) درست (۰/۲۵) صفحه ۱۳۱</p>	۳۲۷
خرداد ۱۴۰۱	<p>(پ) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۲۳</p>	۳۲۸
خرداد ۱۴۰۰	<p>(ب) هرچه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۳۱</p>	۳۲۹
شهریور ۹۸	<p>(ج) اگر صفحه <math>p</math> در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل یک هذلولی است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ج) نادرست (صفحه ۱۲۷) (۰/۲۵)</p>	۳۳۰
خرداد ۹۸	<p>(پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به صورت مخروط توپر می باشد .</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) درست ۰/۲۵ صفحات ۱۲۳</p>	۳۳۱
<p>عبارت های زیر را با کلمات مناسب تکمیل کنید.</p>		
خرداد ۱۴۰۴	<p>(الف) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه آن ..... است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(الف) مخروط (۰/۲۵) صفحه ۱۲۳</p>	۳۳۲
شهریور ۱۴۰۳	<p>(ت) اگر صفحه ای سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس نگذرد شکل حاصل را ..... می نامیم.</p>	۳۳۳

	پاسخ: (ت) هذلولی ص ۱۲۷ هر مورد ۰/۲۵	
خرداد ۱۴۰۳	ج) اگر صفحه P در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل ..... است. پاسخ: ج) سهمی (۰/۲۵) (صفحه ۱۲۷)	۳۳۴
شهریور ۱۴۰۲	ب) اگر صفحه ای بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل ..... است. پاسخ: ب) دایره (۰/۲۵) صفحه ۱۲۳	۳۳۵
شهریور ۱۴۰۱	ب) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، ..... آن نامیده می شود. پاسخ: ب) سطح مقطع هر مورد (۰/۲۵) صفحه ۱۲۴	۳۳۶
خرداد ۱۴۰۱	پ) خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر ..... است. پاسخ: پ) $\frac{3}{4}$ هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۳۱	۳۳۷
خرداد ۱۴۰۰	ب) شعاع دایره ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ برابر ..... است. پاسخ: ب) ۲ هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۳۷	۳۳۸
دی ۹۸	ج) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، ..... آن نامیده می شود. پاسخ: ج) سطح مقطع هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۲۴	۳۳۹
شهریور ۹۸	ب) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن ..... است. پاسخ: ب) استوانه (صفحه ۱۲۳) ۰/۲۵	۳۴۰
 <b>گزینه مناسب را انتخاب کنید.</b>		

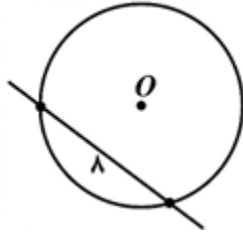
<p>خرداد ۱۴۰۱</p>	<p>۳۴۱</p> <p>۱۱۱. با توجه به نمودار تابع <math>f</math>، اگر شیب خط مماس در نقاط <math>a, b, c</math> به ترتیب با <math>m_c, m_b, m_a</math> نمایش داده شود، کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟</p> <p>الف) <math>m_c &gt; m_b &gt; m_a</math> (الف) ب) <math>m_b &gt; m_a &gt; m_c</math> (ب) پ) <math>m_a &gt; m_b &gt; m_c</math> (پ) ت) <math>m_c = m_b = m_a</math> (ت)</p>  <p>پاسخ: ۱۱۱. پ هر مورد ۰/۵ نمره صفحه ۱۳۵</p>
<p>شهریور ۹۹</p>	<p>۳۴۲</p> <p>الف) اگر صفحه ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی ..... خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی)</p> <p>ب) اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل ..... نزدیک خواهد شد. (پاره خط - دایره - نقطه)</p> <p>پاسخ: الف) بیضی (ب) دایره هر مورد (۰/۲۵) صفحات ۱۲۶ و ۱۳۱</p>
<p>خرداد ۹۸</p>	<p>۳۴۳</p> <p>ب) هرچه خروج از مرکز بیضی ..... (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.</p> <p>پاسخ: ب) کوچکتر ۰/۲۵ صفحه ۱۳۱</p>
 <p>مسائل</p>	
<p>دی ۱۴۰۴</p>	<p>۳۴۴</p> <p>دو سر قطر بزرگ یک بیضی نقاط <math>(-1, 2)</math> و <math>(7, 2)</math> و طول قطر کوچک آن برابر ۴ واحد است. خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.</p> <p>پاسخ: (ص ۱۳۱) روش اول:</p> <p><math>AA' = \lambda = 2a \rightarrow a = 4</math> (۰/۲۵) , <math>BB' = 4 = 2b \rightarrow b = 2</math> (۰/۲۵)</p> $c = \sqrt{a^2 - b^2} \rightarrow \underbrace{c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}}_{(۰/۲۵)} \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ <p>(۰/۲۵)</p>

روش دوم:

$$AA' = \lambda = 2a \rightarrow a = \frac{\lambda}{2} \quad (./25) \quad , \quad BB' = 4 = 2b \rightarrow b = 2 \quad (./25)$$

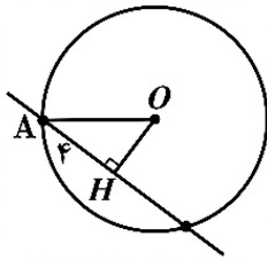
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مرکز دایره ای نقطه  $O(1, 2)$  است. این دایره روی خط  $3x + 4y + 4 = 0$  وتری به طول 8 جدا می کند. معادله گسترده این دایره را بنویسید.



پاسخ:

(ص 139)



روش اول:

$$OH = \frac{|3(1) + 4(2) + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \quad (./25) \quad , \quad AH = 4 \quad (./25) \rightarrow r = 5 \quad (./25)$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \quad (./25) \quad , \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \quad (./25)$$

روش دوم:

$$OH = \frac{|3(1) + 4(2) + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \quad (./25) \quad , \quad AH = 4 \quad (./25) \rightarrow r = 5 \quad (./25)$$

$$-\frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = -2 \quad \text{و} \quad -\frac{b}{2} = 2 \rightarrow b = -4 \quad \text{و} \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \rightarrow c = -20$$

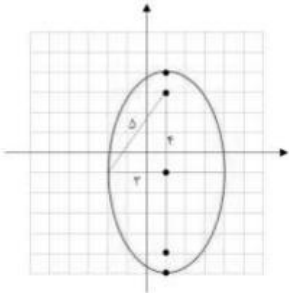
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \quad (./5)$$

اگر خروج از مرکز یک بیضی  $\frac{3}{5}$  و اندازه قطر بزرگ بیضی 20 باشد، آنگاه فاصله کانونی بیضی را به دست آورید.

پاسخ:

شهریور

1404

	$\frac{a=10}{\cdot/25}, \frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{c=6}{\cdot/25} \Rightarrow \frac{2c=12}{\cdot/25}$	(ص ۱۳۱)
شهریور ۱۴۰۴	<p>معادله دایره ای را بنویسید که نقاط <math>A(0,3)</math> و <math>B(-4,-1)</math> دوسر یکی از قطرهای آن باشد.</p> <p>پاسخ:</p> <p>روش اول:</p> $O(-2,1) \quad (0/5) \quad r = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2} \quad (0/5)$ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8 \quad (0/25)$ <p>توجه: اگر دانش آموز مرکز و شعاع دایره را ننویسد ولی معادله دایره را درست نوشته باشد، نمره کامل تعلق گیرد.</p> <p>روش دوم:</p> $(0/25) \quad r = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2} \quad (0/25)$ $O(-2,1)$ $\begin{cases} -\frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = 4 \\ -\frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = -2 \end{cases} \quad (0/25)$ <p>(ص ۱۴۲)</p> $r = 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{16+4-4c} \Rightarrow c = -3 \quad (0/25)$ $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0 \quad (0/25)$	۳۴۷
خرداد ۱۴۰۴	<p>کانون های یک بیضی نقاط <math>(1,3)</math> و <math>(1,-5)</math> است. اگر اندازه نصف قطر بزرگ آن برابر ۵ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>روش اول:</p> $\begin{cases} 2c = 3 - (-5) = 8 \Rightarrow c = 4 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{25}{\cdot/25} = \frac{b^2 + 16}{\cdot/25} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6 \quad (0/25)$ <p>روش دوم:</p> $2c = FF' = \sqrt{(1-1)^2 + (3+5)^2} = 8 \Rightarrow c = 4$ $a = 5 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow 2b = 6$ <p>روش سوم: با توجه به شکل، <math>c = 4</math> (ص ۱۳۲)</p> $\frac{5^2}{\cdot/25} = \frac{b^2 + 4^2}{\cdot/25} \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 6$  <p>صفحه ۱۳۲</p>	۳۴۸
خرداد ۱۴۰۴	<p>معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه <math>(1, -2)</math> بوده و بر خط <math>4x - 3y = 25</math> مماس باشد.</p> <p>پاسخ:</p> $r = \frac{ 4+6-25 }{\sqrt{16+9}} = 3 \quad (0/25)$	۳۴۹

روش اول:

$$\frac{(x-1)^2}{\cdot/25} + \frac{(y+2)^2}{\cdot/25} = 9 \quad (\cdot/25)$$

روش دوم:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 25 \\ 4y + 3x = -5 \end{cases} \quad (\cdot/25)$$

$$25x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \quad y = -\frac{3}{5} \Rightarrow A(\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}) \quad (\cdot/25)$$

$$r = OA = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (-\frac{3}{5})^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad (\cdot/25)$$

روش سوم:

$$r = \frac{|4+6-25|}{\sqrt{16+9}} = \frac{15}{5} = 3 \quad (\cdot/25)$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, -2) \Rightarrow \frac{a}{\cdot/25} = -2, \frac{b}{\cdot/25} = 4$$

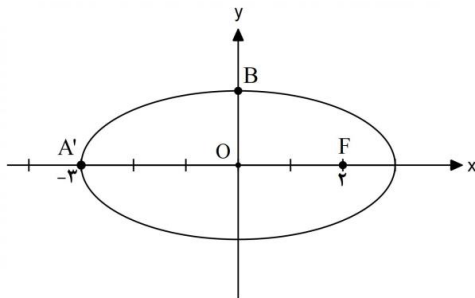
$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3 \Rightarrow \sqrt{4 + 16 - 4c} = 6 \Rightarrow 20 - 4c = 36 \Rightarrow c = -4 \quad (\cdot/25)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

صفحه ۱۴۲

در شکل زیر طول پاره خط OB را محاسبه کنید.

۳۵۰



دی

۱۴۰۳

پاسخ:

$$OA' = a = 3 \quad (\cdot/25) \rightarrow \underbrace{OB = b = \sqrt{a^2 - c^2}}_{(\cdot/25)} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \quad (\cdot/25)$$

(صفحه ۱۲۹)

وضعیت دو دایره به معادله  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  را نسبت به هم

۳۵۱

بررسی کنید.

پاسخ:

$$O(-1, 2) \quad (\cdot/25), r = 1 \quad (\cdot/25)$$

$$O'(1, -2) \quad (\cdot/25), r' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \quad (\cdot/25) \quad \left. \vphantom{O'(1, -2)} \right\} \rightarrow OO' > r + r' \quad (\cdot/25)$$

$$OO' = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5} \quad (\cdot/25)$$

دو دایره متخارج هستند.  $(\cdot/25)$

(صفحه ۱۴۱)

اگر خروج از مرکز یک بیضی  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  و طول قطر کوچک آن ۱۰ باشد آنگاه فاصله ی کانونی را محاسبه کنید.

پاسخ:

روش اول:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad BB' = 2b = 10 \rightarrow b = 5$$

$$a^2 = 25 + \frac{3}{4} a^2 \rightarrow a = 10 \xrightarrow{c=5\sqrt{3}} FF' = 2c = 10\sqrt{3}$$

یا

شهریور

۱۴۰۳

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}} c \quad BB' = 2b = 10 \rightarrow b = 5$$

$$\frac{4}{3} c^2 = 25 + c^2 \rightarrow c = 5\sqrt{3} \rightarrow FF' = 2c = 10\sqrt{3}$$

روش دوم:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ c = \sqrt{3}k \end{cases} \quad BB' = 2b = 10 \rightarrow b = 5$$

$$4k^2 = 25 + 3k^2 \rightarrow k = 5 \Rightarrow c = 5\sqrt{3} \rightarrow FF' = 2c = 10\sqrt{3}$$

صفحه ۱۳۲

معادله ی دایره ای را بنویسید که بر خط  $3x + 4y - 1 = 0$  مماس بوده و مرکز آن  $(1, 2)$  باشد.

پاسخ:

شهریور

۱۴۰۳

$$r = \frac{|3(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

صفحه ۱۳۹

در یک بیضی فاصله کانونی با طول قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.

پاسخ:

اگر  $FF'$  را فاصله کانونی و  $BB'$  را قطر کوچک بیضی در نظر بگیریم، داریم:

$$FF' = BB' \Rightarrow 2c = 2b \Rightarrow c = b \quad (./5)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

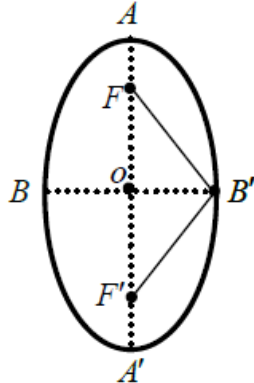
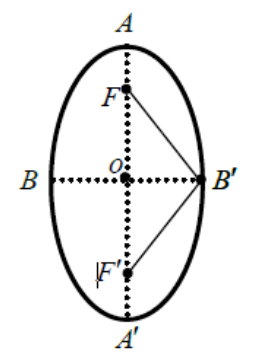
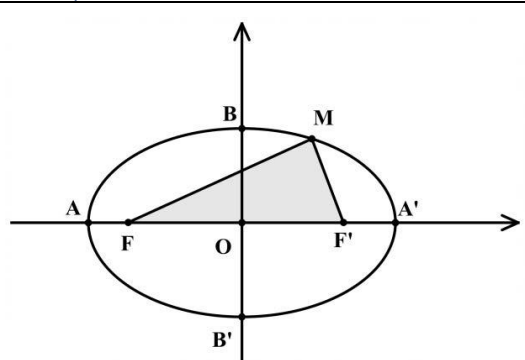
(صفحه ۱۳۲)

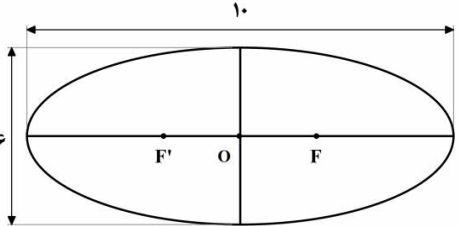
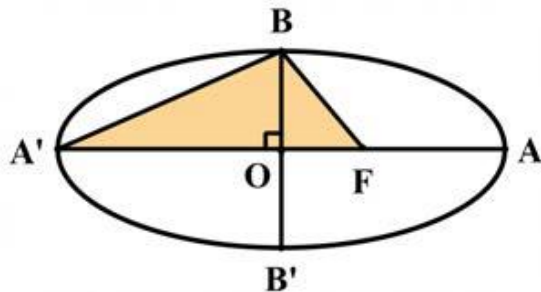
خرداد

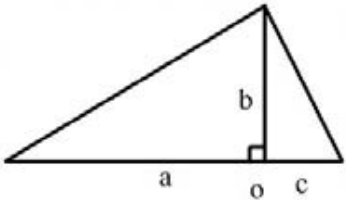
۱۴۰۳

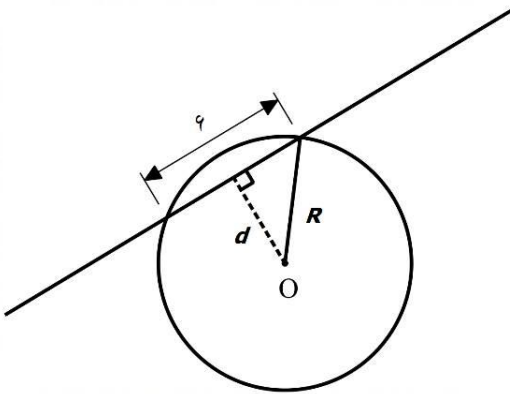
اگر مرکز دایره  $x^2 + y^2 + ax - 4y - 4 = 0$  نقطه  $O(1, 2)$  باشد.

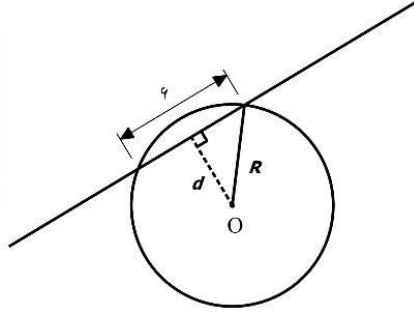
۱۴۰۳	<p>الف) مقدار <math>a</math> را بیابید.          ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $\text{الف)} -\frac{a}{4} = 1 \quad (./25) \Rightarrow a = -4 \quad (./25)$ $\text{ب)} r = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{4}\sqrt{4 + 16 + 16} \quad (./25) \Rightarrow r = 3 \quad (./25)$ <p>(صفحه ۱۳۷)</p>	
دی ۱۴۰۲	<p>معادله قطر کانونی یک بیضی، <math>y = -1</math> و معادله قطر کوچک، <math>X = 2</math> است. اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است، پس: <math>O(2, -1)</math> <math>(./25)</math></p> <p>با توجه به اینکه <math>AA' = 12</math> و <math>BB' = 8</math>، بنابراین:</p> $\text{AA}' = 2a = 12 \rightarrow a = 6 \quad (./25)$ $\text{BB}' = 2b = 8 \rightarrow b = 4 \quad (./25)$ <p>همچنین:</p> $c^2 = 36 - 16 = 20 \rightarrow c = 2\sqrt{5} \quad (./25)$ $\rightarrow \text{FF}' = 2c = 4\sqrt{5} \quad (./25)$ <p>فصل ۶</p>	۳۵۶
دی ۱۴۰۲	<p>معادله دایره ای به صورت <math>x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0</math> است، مختصات مرکز این دایره را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $\rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right) = (1, 3) \quad (./5)$ <p>فصل ۶</p>	۳۵۷
شهریور ۱۴۰۲	<p>مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی نقاط <math>(1, -2)</math> و <math>(1, 6)</math> است. اگر خروج از مرکز این بیضی <math>\frac{1}{4}</math> باشد، فاصله کانونی آن را بیابید.</p> <p>پاسخ:</p> $2a = 8 \rightarrow a = 4, \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \rightarrow c = 1 \rightarrow \text{FF}' = 2c = 2 \quad (./25)$ <p>ص ۱۳۲</p>	۳۵۸
شهریور ۱۴۰۲	<p>وضعیت خط <math>3x + 4y = 0</math> را نسبت به دایره به معادله <math>(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9</math> مشخص کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $O(2, -2), r = 3, d = \frac{ 3 \times 2 + 4(-2) }{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5} \quad (./25)$ <p>چون شعاع دایره بزرگتر از فاصله مرکز دایره تا خط می باشد، پس خط و دایره متقاطع هستند. <math>(./25)</math></p> <p>ص ۱۴۲</p>	۳۵۹

<p>خرداد ۱۴۰۲</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 25%;">  </div> <div style="width: 70%;"> <p>۳۶۰ در بیضی مقابل کانون ها به مختصات <math>F(1,5)</math> و <math>F'(1,1)</math> و یک رأس قطر <math>A(1,6)</math> بزرگ آن می باشد:</p> <p>الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.</p> <p>ب) معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید.</p> <p>پ) مساحت مثلث <math>B'FF'</math> را بدست آورید.</p> </div> </div> <div style="background-color: #e0ffe0; padding: 5px; text-align: right;">پاسخ:</div> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 25%;">  </div> <div style="width: 70%;"> <p>الف) <math>O(1,3)</math> <math>(0/25)</math> , <math>FF' = 4</math> <math>(0/25)</math></p> <p>ب) <math>y = 3</math> <math>(0/25)</math></p> <p>پ)</p> <math display="block">OB' = \frac{\sqrt{OA^2 - OF^2}}{0/25} = \sqrt{5} \quad (0/25)</math> <math display="block">S = \frac{1}{2} \underbrace{OB' \times FF'}_{0/25} = 2\sqrt{5} \quad (0/25)</math> <p style="text-align: right;">فصل ۶</p> </div> </div>	<p>۳۶۰</p>
<p>خرداد ۱۴۰۲</p>	<p>اگر دو دایره به معادله های <math>x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0</math> و <math>(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2</math> مماس خارج باشند، مقدار <math>m</math> را بیابید.</p> <div style="background-color: #e0ffe0; padding: 5px; text-align: right;">پاسخ:</div> $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow O(-1, 2), r = 2 \quad (0/25)$ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2 \Rightarrow O'(2, -1), r' = m \quad (0/25)$ $OO' = 3\sqrt{2} \quad (0/25)$ $\underbrace{OO'}_{0/25} = r + r' \Rightarrow m + 2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow m = 3\sqrt{2} - 2 \quad (0/25)$ <p style="text-align: right;">فصل ۶</p>	<p>۳۶۱</p>
<p>دی ۱۴۰۱</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 25%;">  </div> <div style="width: 70%;"> <p>۳۶۲ اگر در بیضی مقابل مختصات کانون <math>F'(4,0)</math> و مختصات راس <math>B(0,3)</math> باشد:</p> <p>الف) قطر بزرگ بیضی را بیابید.</p> <p>ب) محیط مثلث <math>(MFF')</math> را بیابید.</p> </div> </div> <div style="background-color: #e0ffe0; padding: 5px; text-align: right;">پاسخ:</div>	<p>۳۶۲</p>

	<p>(الف)</p> $\begin{cases} b = 3 \quad (./25) \\ c = 4 \quad (./25) \end{cases} \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 2a = 10 \quad (./25)$ <p>(ب)</p> $\text{محیط} = \frac{2a + 2c}{(./25)} = 18 \quad (./25)$ <p>فصل ۶</p>	
<p>دی</p> <p>۱۴۰۱</p>	<p>معادله گسترده یک دایره به شکل <math>x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0</math> است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>فصل ۶ <math>O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-1, -1) \quad (./5)</math> , <math>r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \sqrt{10} \quad (./5)</math></p>	<p>۳۶۳</p>
<p>شهریور</p> <p>۱۴۰۱</p>	<p>در بیضی مقابل فاصله کانونی را محاسبه کنید. <math>F'</math> و <math>F</math> کانون های بیضی هستند.</p>  <p>پاسخ:</p> $a^2 = b^2 + c^2 \quad (./25) \xrightarrow{a=5, b=3} c = 4 \quad (./25) \Rightarrow FF' = 8 \quad (./25)$ <p>صفحه ۱۳۰</p>	<p>۳۶۴</p>
<p>شهریور</p> <p>۱۴۰۱</p>	<p>معادله گسترده دایره <math>C(O, R)</math> به شکل <math>x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0</math> است. (الف) مختصات مرکز و شعاع دایره <math>C</math> را محاسبه کنید. (ب) آیا نقطه <math>A(0, 3)</math> روی محیط دایره <math>C</math> قرار دارد؟ چرا؟</p> <p>پاسخ:</p> <p>(الف) <math>O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, -1) \quad (./5)</math> , <math>R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3 \quad (./5)</math></p> <p>(ب) خیر <math>(./25)</math> زیرا <math>(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0 \quad (./25)</math></p> <p>صفحات ۱۳۷ و ۱۴۲</p>	<p>۳۶۵</p>
<p>خرداد</p> <p>۱۴۰۱</p>	<p>اگر طول قطر بزرگ <math>AA'</math> و قطر کوچک <math>BB'</math> بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:</p>  <p>(الف) مقدار <math>A'F</math> را به دست آورید. (<math>F</math> کانون بیضی است.)</p> <p>(ب) مساحت مثلث هاشور خورده <math>(BFA')</math> چقدر است؟</p> <p>پاسخ:</p>	<p>۳۶۶</p>

	<p>(الف)</p> $a = 5$ $b = 4 \quad (0/5) \rightarrow c^2 = 25 - 16 \rightarrow c = 3 \quad (0/25) \rightarrow A'F = 8 \quad (0/25)$ <p>(ب)</p> $S_{\Delta} = \frac{1}{2}(5 + 3) \times 4 = 16 \quad (0/5)$  <p>صفحه ۱۲۹</p>	
<p>خرداد</p> <p>۱۴۰۱</p>	<p>معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن <math>(0, 3)</math> و بر خط <math>3x - 4y = 3</math> مماس باشد.</p> <p>پاسخ:</p> $r = \frac{ 3 \times 0 - 4(3) - 3 }{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \quad (0/5) \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9 \quad (0/5)$ <p>صفحه ۱۳۹</p>	<p>۳۶۷</p>
<p>دی</p> <p>۱۴۰۰</p>	<p>خروج از مرکز یک بیضی افقی <math>\frac{4}{5}</math>، مرکز آن <math>(-4, -1)</math> و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.</p> <p>(الف) فاصله کانونی را محاسبه کنید.</p> <p>(ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را پیدا کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>(الف)</p> $a = \frac{5}{4}c \Rightarrow \frac{25}{16}c^2 = 9 + c^2 \quad FF' = 2c = 8 \Rightarrow \quad (0/75)$ <p>(ب)</p> $a = 5 \quad (0/25) \Rightarrow A(1, -1), A(-9, -1) \quad (0/5)$ <p>صفحه ۱۳۲</p>	<p>۳۶۸</p>
<p>دی</p> <p>۱۴۰۰</p>	<p>معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن <math>(0, 3)</math> و بر خط <math>3x - 4y = 3</math> مماس باشد.</p> <p>پاسخ:</p> $r = \frac{ 3 \times 0 - 4 \times 3 - 3 }{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3 \quad (0/5) \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 9 \quad (0/5)$ <p>صفحه ۱۳۹</p>	<p>۳۶۹</p>
<p>شهریور</p> <p>۱۴۰۰</p>	<p>در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.</p> <p>اگر مرکز این بیضی نقطه ای با مختصات <math>(4, 5)</math> باشد:</p> <p>(الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.</p> <p>(ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.</p>	<p>۳۷۰</p>

	<p>پاسخ:</p> $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5} \quad (0/25) \Rightarrow FF' = 2\sqrt{5} \quad (0/25)$ <p>الف) <math>A(4+3, 5) \quad (0/25)</math> , <math>A'(4-3, 5) \quad (0/25)</math> ب)</p> <p>صفحه ۱۳۲</p>	
شهریور ۱۴۰۰	<p>وضعیت خط <math>x + y = 3</math> و دایره <math>x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0</math> را نسبت به هم مشخص کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 0 + 12} = 2 \quad , \quad O(1, 0) \quad (0/5)$ $OH = \frac{ 1 \times 1 + 0 \times 1 - 3 }{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \quad (0/5) \Rightarrow OH < R \quad (0/25)$ <p>خط و دایره متقاطع اند. <math>(0/25)</math></p> <p>صفحه ۱۳۹</p>	۳۷۱
خرداد ۱۴۰۰	<p>کانونهای یک بیضی نقاط <math>(1, 3)</math> و <math>(1, -5)</math> است.</p> <p>الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.</p> <p>ب) اگر <math>a = 6</math> باشد، اندازه قطر کوچک را پیدا کنید. <math>(a</math> اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است).</p> <p>پاسخ:</p> $O \begin{cases} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases} \quad (0/5) \quad FF' =  3 - (-5)  = 8 = 2c \rightarrow c = 4 \quad (0/5)$ <p>الف) <math>FF' =  3 - (-5)  = 8 = 2c \rightarrow c = 4 \quad (0/5)</math></p> <p>ب)</p> $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \quad (0/25) \rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20} \quad (0/25)$ <p>صفحه ۱۳۲</p>	۳۷۲
خرداد ۱۴۰۰	<p>مرکز دایره ای، نقطه <math>O(2, -3)</math> است. این دایره روی خط <math>3x - 4y + 2 = 0</math> و تری به طول ۶ جدا میکند. معادله دایره را بنویسید.</p>  <p>پاسخ:</p>	۳۷۳

	$d = \frac{ 3 \times 2 - 4(-3) + 2 }{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4 \text{ (./5)}$ $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (./5)}$ $\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \text{ (./5)}$		صفحه ۱۳۹
دی ۹۹	<p>خروج از مرکز یک بیضی افقی <math>\frac{4}{5}</math> مرکز آن <math>(-4, -1)</math> و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.</p> <p>الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.</p> <p>ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $c = \frac{4}{5}a \text{ (./25)} \Rightarrow 9 + \frac{16}{25}a^2 = a^2 \text{ (./25)} \Rightarrow a = 5, c = 4 \text{ (./25)}$ $ff' = 8 \text{ (./25)}$ <p>ب) <math>A(1, -1), A'(-9, -1)</math> (./5)</p>	صفحه ۱۳۲	۳۷۴
دی ۹۹	<p>اگر معادله دایره به شکل <math>(x + 1)^2 + y^2 = 4</math> باشد:</p> <p>الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.</p> <p>ب) مختصات تقاطع دایره با محور x ها را پیدا کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>O(-1, 0), R = 2</math> (./5)</p> <p>ب) <math>(1, 0), (-3, 0)</math> (./5)</p>	صفحات ۱۴۲	۳۷۵
شهریور ۹۹	<p>کانون های یک بیضی نقاط <math>(2, 5)</math> و <math>(2, -3)</math> و <math>a = 5</math> است. مختصات مرکز و اندازه قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $O(2, 1) \text{ (./25)}, c = 4 \text{ (./25)} \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \text{ (./25)} \Rightarrow 2b = 6 \text{ (./25)}$	صفحه ۱۳۲	۳۷۶
شهریور ۹۹	<p>معادله دایره ای را بنویسید که بر خط <math>3x + 4y = 1</math> مماس بوده و مرکز آن <math>(1, 2)</math> باشد.</p> <p>پاسخ:</p> $R = \frac{ 3 \times 1 + 4 \times 2 - 1 }{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \text{ (./5)}, (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \text{ (./5)}$	صفحه ۱۳۹	۳۷۷
خرداد	<p>کانون های یک بیضی نقاط <math>(1, 3)</math> و <math>(1, -5)</math> است.</p>		۳۷۸

۹۹	<p>الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید.          ب) اگر <math>a = 6</math> باشد، باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>C = 4 \rightarrow (0/25) \quad FF' =  3 - (-5)  = 8 = 2c \quad \text{مرکز } (0/5)</math></p> $O \begin{cases} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$ <p>و معادله قطر بزرگ: <math>x = 1 \quad (0/25)</math></p> <p>ب)</p> $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \quad (0/25) \rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20} \quad (0/25)$ <p>صفحه ۱۳۲</p>	
دی ۹۸	<p>کانون های یک بیضی نقاط <math>(1, 3)</math> و <math>(1, -5)</math> است.          الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.          ب) اگر <math>a = 6</math> باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>C = 4 \rightarrow (0/25) \quad FF' =  3 - (-5)  = 8 = 2c \rightarrow C = 4 \quad \text{مرکز } (0/25)</math></p> $O \begin{cases} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$ <p>ب)</p> $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \quad (0/25) \rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20} \quad (0/25), e = \frac{c}{a}$ $= \frac{2}{3} \quad (0/5)$ <p>صفحه ۱۳۲</p>	۳۷۹
دی ۹۸	<p>وضعیت دایره <math>(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4</math> و خط <math>y = -1</math> را نسبت به هم مشخص کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $O(2, -3), r = 2 \quad (0/25), d = \frac{ -3+1 }{\sqrt{0+1}} = 2 \quad (0/25)$ <p>خط و دایره بر هم مماس هستند. <math>(0/25)</math></p> <p>صفحات ۱۳۹</p>	۳۸۰
شهریور ۹۸	<p>اگر در یک بیضی داشته باشیم <math>a = 5</math> و <math>b = 3</math> در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.</p> <p>پاسخ:</p> $c^2 = \frac{a^2 - b^2}{0/25} = \frac{25 - 9}{0/25} = 16 \rightarrow c = 4 \rightarrow \frac{2c}{0/25} = 8$ <p>صفحه ۱۳۰</p>	۳۸۱
شهریور	<p>وضعیت خط <math>x + y = 3</math> را نسبت به دایره <math>x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0</math> مشخص کنید.</p>	۳۸۲

<p>۹۸</p>	<p>پاسخ:</p> <p>صفحه ۱۳۸</p> <p><math>o(1,0) \cdot 0/25, r = 2 \cdot 0/25</math></p> <p><math>d = \frac{ 1(1)+1(0)-3 }{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} &lt; 2 \cdot 0/5 \rightarrow</math></p> <p>متقاطعند <math>0/25</math></p>	
<p>خرداد ۹۸</p>	<p>در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله ی کانونی بیضی را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> <p><math>2a = 8 \rightarrow \frac{a = 4}{\cdot/25}, 2b = 6 \rightarrow \frac{b = 3}{\cdot/25}</math></p> <p><math>c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 16 - 9 = 7 \rightarrow \frac{c = \sqrt{7}}{\cdot/25}</math></p> <p><math>\frac{2c = 2\sqrt{7}}{\cdot/25}</math></p> <p>صفحه ۱۳۰</p>	<p>۳۸۳</p>
<p>خرداد ۹۸</p>	<p>وضعیت دو دایره به معادلات <math>(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1</math> و <math>x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0</math> را نسبت به هم مشخص کنید.</p> <p>پاسخ:</p> <p>دو دایره متخارج هستند. <math>0/25</math></p> <p><math>o_1 = \frac{(-1, 2)}{\cdot/5}, r_1 = 1, \quad o_2 \begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 \\ b \\ -\frac{b}{2} = -2 \end{cases}, r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2</math></p> <p><math>\frac{d = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20}}{\cdot/5} \rightarrow \sqrt{20} &gt; 1 + 2 = 3</math></p> <p>صفحه ۱۴۱</p>	<p>۳۸۴</p>

# فصل ۷



## فصل ۷

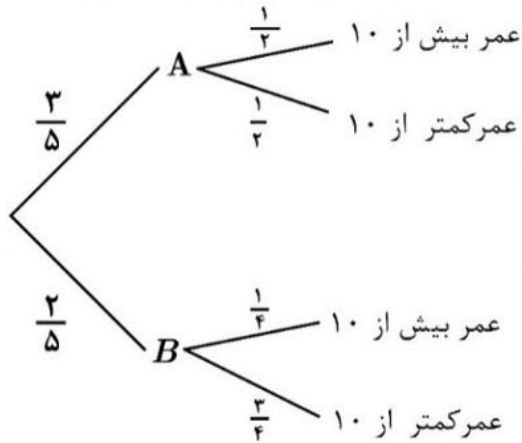


درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با (ص/خ) مشخص کنید

دی ۱۴۰۴	<p>(پ) اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه همواره رابطه <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B)</math> برقرار است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) نادرست (۰/۲۵) (ص ۱۴۴)</p>	۳۸۵
خرداد ۱۴۰۴	<p>(الف) دو پیشامد <math>A</math> و <math>B</math> از هم مستقل هستند، هرگاه <math>A \cap B = \emptyset</math>.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(الف) نادرست (۰/۲۵) صفحه ۱۴۴</p>	۳۸۶
دی ۹۸	<p>(ج) دو پیشامد <math>A</math> و <math>B</math> از هم مستقل هستند. هرگاه با هم رخ ندهند.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ج) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۱۴۴</p>	۳۸۷
<p>عبارت‌های زیر را با کلمات مناسب تکمیل کنید.</p>		
دی ۱۴۰۳	<p>(ت) اگر دو پیشامد <math>A</math> و <math>B</math> با هم رخ ندهند، آنگاه دو پیشامد ..... هستند.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ت) ناسازگار (صفحه ۱۴۴) هر مورد (۰/۲۵)</p>	۳۸۸
شهریور ۱۴۰۳	<p>(پ) دو پیشامد را ..... گوییم هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) مستقل ص ۱۴۴ هر مورد ۰/۲۵</p>	۳۸۹
شهریور ۱۴۰۲	<p>(پ) هرگاه برای دو پیشامد <math>A</math> و <math>B</math> داشته باشیم <math>P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)</math> آنگاه دو پیشامد <math>A</math> و <math>B</math>، ..... هستند.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(پ) مستقل (۰/۲۵) صفحه ۱۴۴</p>	۳۹۰
خرداد ۱۴۰۲	<p>(ب) اگر <math>A</math> مجموعه اعداد طبیعی اول و <math>B</math> مجموعه اعداد طبیعی مرکب و <math>C = \dots\dots\dots</math> باشند، آنگاه <math>A</math>، <math>B</math> و <math>C</math> یک افزاز روی مجموعه اعداد طبیعی است.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ب) <math>\{1\}</math> (۰/۲۵) فصل ۷</p>	۳۹۱

گزینه مناسب را انتخاب کنید.		
شهریور ۹۹	<p>(پ) دو پیشامد A و B را ..... گوئیم هر گاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. (مستقل - ناسازگار - سازگار)</p> <p>(ت) احتمال وقوع پیشامد A به شرط اینکه بدانیم پیشامد B رخ داده است، به صورت ..... نمایش داده می شود. <math>(P(A - B), P(A B), P(B A))</math></p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: center;">(پ) مستقل (ت) <math>P(A B)</math> هر مورد (۰/۲۵) صفحه ۱۴۴</p>	۳۹۲
خرداد ۹۸	<p>(پ) دو پیشامدی که با هم رخ ندهند، دو پیشامد ..... (مستقل، ناسازگار) هستند.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: center;">(پ) ناسازگار ۰/۲۵ صفحه ۱۴۴</p>	۳۹۳
مسائل		
دی ۱۴۰۴	<p>در یک جعبه ۳ میکروسکوپ از نوع A و ۲ تا از نوع B وجود دارد. احتمال اینکه عمر آن ها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، <math>\frac{1}{5}</math> و برای نوع B، <math>\frac{1}{4}</math> است. به تصادف یک میکروسکوپ از جعبه بیرون می آوریم. با چه احتمالی عمر این میکروسکوپ بیش از ۱۰ سال است؟</p> <p style="text-align: right;">پاسخ:</p> <p style="text-align: right;">(ص ۱۴۸)</p> <p style="text-align: right;">روش اول:</p> $P(E) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{10} = 0.4$ <p style="text-align: center;">(منظور از پیشامد E، انتخاب یک میکروسکوپ با طول عمر بیش از ۱۰ سال است.)</p> <p>توجه ۱: اگر دانش آموز فقط فرمول قانون احتمال کل را به صورت زیر بنویسد، آنگاه (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد.</p> $P(E) = P(A)P(E A) + P(B)P(E B)$	۳۹۴

توجه ۲: اگر دانش آموز فقط نمودار درختی را رسم کند، (۰/۵) نمره تعلق گیرد.



روش دوم:

$$P(E) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{10} = 0.6 \rightarrow P(E) = 1 - 0.6 = 0.4 \quad (0.5)$$

مدرسه A چهار برابر مدرسه B دانش آموز دارد. ۳۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۲۰ درصد دانش آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آن ها را انتخاب کنیم:

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟ (۰/۵ نمره)  
 ب) با چه احتمالی فرد انتخابی، معدل بالای ۱۸ دارد؟ (یک نمره)

پاسخ:

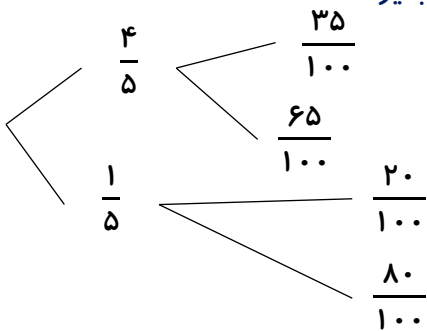
الف)  $P(A) = \frac{4}{5} \quad (0.25) \quad P(B) = \frac{1}{5} \quad (0.25)$  (ص ۱۴۸)

روش اول: ب)  $\frac{4}{5} \times \frac{35}{100} + \frac{1}{5} \times \frac{20}{100} = \frac{8}{25} \quad (0.25)$

توجه ۱: اگر دانش آموز فقط جواب آخر را به صورت عدد اعشاری ۰/۳۲ نوشته باشد، نمره تعلق بگیرد.

توجه ۲: اگر دانش آموز فقط فرمول احتمال کل را نوشته باشد (۰/۲۵) تعلق بگیرد.

روش دوم: به روش نمودار درختی هم نمره کامل به تناسب تعلق گیرد.



$$\frac{4}{5} \times \frac{35}{100} + \frac{1}{5} \times \frac{20}{100} = \frac{8}{25} \quad (0.25)$$

توجه: اگر دانش آموز فقط نمودار درختی را رسم کرده باشد ولی راه حل را نوشته باشد (۰/۵) تعلق بگیرد.

شهریور  
۱۴۰۴

دو جعبه یکسان داریم. درون یکی از آنها ۱۰ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۲۰ لامپ قرار دارد که ۵ تا از آنها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن به تصادف بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ انتخابی سالم باشد؟

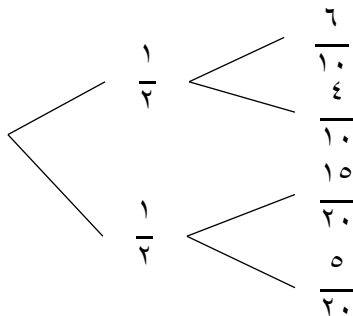
پاسخ:

روش اول: اگر پیشامد سالم بودن را  $A$  و جعبه اول را  $B_1$  و جعبه دوم را  $B_2$  در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{20} = \frac{6}{20} + \frac{15}{40} = \frac{27}{40} = 0.675 \quad (0.25)$$

توجه: اگر دانش آموز فقط فرمول قانون احتمال کل را بنویسد و ادامه راه حل را ننویسد، نمره تعلق گیرد.



$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{20} = \frac{6}{20} + \frac{15}{40} = \frac{27}{40} = 0.675 \quad (0.25)$$

توجه: اگر دانش آموز فقط نمودار درختی فوق را به طور کامل رسم کند و ادامه راه حل را ننویسد، نمره تعلق گیرد.

روش سوم:

$$P(A') = \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{20} = \frac{4}{20} + \frac{5}{40} = \frac{13}{40} \quad (0.25)$$

$$P(A) = 1 - \frac{13}{40} = \frac{27}{40} = 0.675 \quad (0.25)$$

صفحه ۱۴۸

خرداد  
۱۴۰۴

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۶ مهره زرد و ظرف دوم شامل ۴ مهره قرمز و ۷ مهره زرد است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب می کنیم و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می کنیم. به چه احتمالی این مهره زرد است؟

پاسخ:

$$\frac{6}{11} \times \frac{8}{12} + \frac{5}{11} \times \frac{7}{12} = \frac{83}{132} \quad (0.25)$$

(به نمودار درختی نیز نمره تعلق گیرد.)

(ص ۱۴۸)

دی  
۱۴۰۳

<p>شهریور ۱۴۰۳</p>	<p>یک سکه را پرتاب می کنیم اگر «پشت» بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم و اگر «رو» بیاید ۲ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً دو سکه «رو» ظاهر شود چقدر است؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{7}{16}$ <p>توجه نمایید که فضای نمونه ای هم شانس نیست.</p> <p>تذکر: اگر دانش آموزی پاسخ صحیح را به روش نمودار درختی بدست آورد به تناسب پاسخ نمره تعلق گیرد.</p> <p>صفحه ۱۴۸</p>	<p>۳۹۸</p>
<p>خرداد ۱۴۰۳</p>	<p>سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۵ مهره قرار دارد که ۳ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم ۱۲ مهره داریم که ۶ تای آنها قرمز است. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است.</p> <p>پاسخ:</p> $P = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{15} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{6}{12}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{30}$ <p>(صفحه ۱۴۷)</p> <p>توجه: (به روش نمودار درختی نیز نمره تعلق گیرد.)</p>	<p>۳۹۹</p>
<p>دی ۱۴۰۲</p>	<p>فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۵ درصد مرد و ۵۵ درصد زن باشد و شیوع یک بیماری ویروسی به ترتیب در این دو دسته ۴ درصد و ۶ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟</p> <p>پاسخ:</p> $p = \frac{0.45 \times 0.04 + 0.55 \times 0.06}{0.45 + 0.55} = 0.051$ <p>فصل ۷</p>	<p>۴۰۰</p>
<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۹ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب قرار دارد و درون جعبه دیگر ۱۵ لامپ قرار دارد که ۵ تای آنها معیوب است. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر سالم باشد؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = P(B)P(A B) + P(C)P(A C) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{15} = \frac{17}{24}$ <p>به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد.</p> <p>ص ۱۴۶</p>	<p>۴۰۱</p>
<p>شهریور ۱۴۰۲</p>	<p>دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۸ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.</p> <p>پاسخ:</p>	<p>۴۰۲</p>

	$x - y = 8 \Rightarrow x = 8 + y \quad (0/25)$ $s = xy = (8 + y)y = y^2 + 8y \quad (0/25)$ $s' = 2y + 8 = 0 \quad (0/25) \quad \begin{cases} y = -4 & (0/25) \\ x = 4 & (0/25) \end{cases}$	ص ۱۱۹
<p>خرداد ۱۴۰۲</p>	<p>مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش آموز دارد. ۳۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم:</p> <p>الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟</p> <p>ب) با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف)</p> $P(A) = \frac{1}{4} \quad (0/25), P(B) = \frac{3}{4} \quad (0/25)$ <p>ب)</p> $P(C) = P(A)P(C A) + P(B)P(C B)$ $= \frac{1}{4} \times \frac{35}{100} + \frac{3}{4} \times \frac{15}{100} = \frac{1}{5} \quad (1/25)$ <p>به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد. فصل ۷</p>	<p>۴۵۳</p>
<p>دی ۱۴۰۱</p>	<p>دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره سبز و ۶ مهره آبی است. از ظرف اول مهره ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می کنیم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = P(B_1)P(B_1 A) + P(B_2)P(B_2 A) \quad (0/25)$ $P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{11} + \frac{3}{8} \times \frac{4}{11} = \frac{37}{88} \quad (0/25)$ <p>به روش حل نمودار درختی نمره تعلق گیرد. فصل ۷</p>	<p>۴۵۴</p>
<p>شهریور ۱۴۰۱</p>	<p>چهار ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند. در ظرف سوم ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز هستند. و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم، احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(R) = P(A_1)P(R A_1) + P(A_2)P(R A_2) + P(A_3)P(R A_3) + P(A_4)P(R A_4) \quad (0/25)$	<p>۴۵۵</p>

	$P(R) = \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{29}{60} \quad (0/25)$ <p>حل به روش نمودار درختی نمره کامل تعلق گیرد.</p> <p>صفحه ۱۴۷</p>	
<p>خرداد ۱۴۰۱</p>	<p>دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = P(B_1)P(A B_1) + P(B_2)P(A B_2) \quad (0/5)$ $P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130} \quad (0/5)$ <p>حل به روش نمودار درختی نمره کامل تعلق گیرد.</p> <p>صفحه ۱۴۸</p>	<p>۴۰۶</p>
<p>دی ۱۴۰۰</p>	<p>۴ ظرف یکسان داریم. در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد شامل ۴ مهره ی قرمز است. در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند و ظرف سوم ۸ مهره دارد که شامل ۶ مهره ی قرمز است. در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال آن که مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = P(B_1)P(A B_1) + P(B_2)P(A B_2) + P(B_3)P(A B_3) + P(B_4)P(A B_4) \quad (0/25)$ $P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{14} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{57}{112} \quad (0/25)$ <p>در صورت حل به روش درختی نمره تعلق گیرد. صفحه ۱۴۷</p>	<p>۴۰۷</p>
<p>شهریور ۱۴۰۰</p>	<p>دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = P(G)P(A G) + P(B)P(A B) \quad (0/25)$ $P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130} \quad (0/25)$ <p>اگر از راه نمودار درختی حل شود، نمره کامل تعلق گیرد. صفحه ۱۴۸</p>	<p>۴۰۸</p>
<p>خرداد ۱۴۰۰</p>	<p>اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟</p>	<p>۴۰۹</p>

	<p>پاسخ:</p> $P(A) = P(B_1)P(A B_1) + P(B_2)P(A B_2) \quad (0/5)$ $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200} \quad (0/5)$ <p>صفحه ۱۴۷</p>	
دی ۹۹	<p>سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره ی قرمز و ۳ مهره ی آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره ی آبی ظرف سوم شامل ۶ مهره ی قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال آن که مهره انتخابی آبی باشد چقدر است؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0$ <p>صفحه ۱۴۷</p>	۴۱۰
شهریور ۹۹	<p>اگر احتمال انتقال نوعی بیماری عفونی به نوزاد پسر ۰/۰۷ و نوزاد دختر ۰/۰۴ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{100} = \frac{11}{200}$ <p>صفحه ۱۴۶</p>	۴۱۱
خرداد ۹۹	<p>اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = P(B_1)P(A B_1) + P(B_2)P(A B_2) \quad (0/5)$ $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200} \quad (0/5)$ <p>صفحه ۱۴۷</p>	۴۱۲
دی ۹۸	<p>فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این دو گروه به ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = \frac{40}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{42}{1000} \quad (0/25)$ <p>صفحه ۱۴۷</p>	۴۱۳

<p>شهریور</p> <p>۹۸</p>	<p>دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره آبی و ۵ مهره قرمز است و ظرف دوم شامل ۶ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می کنیم. با چه تعداد احتمالی این مهره آبی است.</p> <p>پاسخ:</p> $p(A) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{15} + \frac{5}{12} \times \frac{6}{15} = \frac{79}{180}$ <p>صفحه ۱۴۸</p>	<p>۴۱۴</p>
<p>خرداد</p> <p>۹۸</p>	<p>سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره ی سبز و ۴ مهره ی آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهره ی سبز و ۳ مهره ی آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره ی سبز و ۴ مهره ی قرمزا است. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟</p> <p>پاسخ:</p> $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{67}{270}$ <p>صفحه ۱۴۷</p>	<p>۴۱۵</p>