

نام درس: ریاضیات گسسته
 نام دبیر: جناب آقای امیرحسین عبدالهیان
 تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۱۰/۱۷
 ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۲ تهران
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد سعادت آباد
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

محل مهر و امضاء مدیر		نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره به عدد:	نمره به حروف:
		نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:
ردیف	سؤالات	نمره	نمره	نمره	نمره
۱	ثابت کنید مربع هر عدد فرد، فرم $8t+1$ دارد.				
۱	اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را بررسی کنید: $a^2 + 1 > b(2 - b)$				
۱	با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید: اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.				
۱	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر به سه برابر عددی فرد یک واحد اضافه شود، عددی زوج بدست می آید.				
۱	اگر $d = (2n^2 + 1, 2n - 4)$ باشد، مطلوب است مقادیر d .				
۱	اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر ۵۰ باقی مانده، ۸ برابر مربع خارج قسمت باشد، مطلوب است a .				
۱	اگر باقی مانده ی تقسیم a بر ۷ و ۸ به ترتیب ۴ و ۵ باشد، مطلب است باقی مانده ی a بر ۵۶.				

۱	اگر $5 2n+1$ ثابت کنید: $25 14n^2+19n+6$	۸
۱	اگر باقی مانده‌ی تقسیم اعداد A و B بر ۳۹ به ترتیب ۱۷ و ۲۳ باشد، باقی مانده‌ی $A-B$ بر ۳۹ را محاسبه کنید.	۹
۱	باقی مانده‌ی تقسیم $3^{71} + 5^{112}$ بر ۱۳ را محاسبه کنید.	۱۰
۱	رقم یکان 7^{327} را محاسبه کنید.	۱۱
۱	معادله‌ی هم‌نهشتی $151x \equiv 40 \pmod{13}$ در مجموعه اعداد دو رقمی چند جواب دارد؟	۱۲
۱	اگر سوم اردیبهشت سالی دوشنبه باشد، ۲۲ بهمن چه روزی خواهد بود؟	۱۳
۱	اگر رقم یکان $5a+2$ و $2a+6$ برابر باشند، مطلوب است رقم یکان $7a-3$.	۱۴
۱	در گراف G منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q رابطه $2q-3p=12$ برقرار می‌باشد، مقادیر p و q را به دست آورید.	۱۵
۱	فرض کنید G گرافی است از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۹ به طوری که درجه هر راس آن ۲ یا ۳ می‌باشد. تعیین کنید این گراف چند راس از درجه ۲ و چند راس از درجه ۳ دارد؟	۱۶
۱	چند نوع گراف منتظم مرتبه ۷ داریم؟	۱۷
۱	تعداد گراف‌هایی با چهار راس a و b و c و d می‌توان ساخت به طوری که: الف) شامل دو یال باشد. ب) شامل یال ab باشد ولی یال cd را نداشته باشد.	۱۸
۱	۱۹- یک گراف ساده مرتبه ۹، ۳۳ یال دارد. این گراف حداقل و حداکثر چند راس با درجه Max دارد؟	۱۹
۱	در گراف G منتظم G داریم $q = 3p - 2$ ، مطلوب است اندازه گراف.	۲۰
۲۰نمره	(موفق باشید عبدالهیان)	



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۲ تهران
 دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد سعادت آباد
کلید سؤالات پایان ترم نوبت اول سال تمصیلی ۹۸-۹۷

نام درس: آمار و احتمال
 نام دبیر: جناب آقای امیرحسین عبدالهیان
 تاریخ امتحان: ۱۷ / ۱۰ / ۱۳۹۷
 ساعت امتحان: ۰۰ : ۰۰ : ۰۸ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۰۰ : ۰۰ : ۱۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	ثابت کنید مربع هر عدد فرد، فرم $8t+1$ دارد.	
۲	اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را بررسی کنید: $a^2 + 1 > b(2 - b)$ $a^2 + 1 \geq b(2 - b) \Leftrightarrow a^2 + 1 > 2b - b^2 \Leftrightarrow a^2 + 1 = 2b + b^2 > 0$ 0/25 $\Leftrightarrow a^2 + (1 - b)^2 \geq 0$ 0/25 درستی عبارت فوق بدیهی است، تمامی روابط برگشت پذیر می باشند در نتیجه حکم برقرار است. 0/25	
۳	با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید: اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است. فرض خلف: n مضرب ۳ نباشد $n = 3k + 1$ یا $n = 3k + 2$ باشد $\Rightarrow n^2 = \underbrace{k^2 + k.r + r^2}_{3q} = 3q + r^2 = 3q + 1$ یعنی n^2 مضرب ۳ نیست که متناقض با فرض مسئله است پس فرض خلف غلط است.	
۴	با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید. اگر به سه برابر عددی فرد یک واحد اضافه شود. عددی زوج بدست می آید. $3(2k+1) + 1 = 6k + 4 = 2(3k+2)$ 0/25 عدد زوج است	

اگر $d = (2n^2 + 1, 2n = 4)$ باشد، مطلوب است مقادیر d.

$$(2n^2 + 1, 2n = 4) = d : \begin{matrix} d | 2n^2 + 1 \\ d | 2n - 4 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$4 \quad \begin{matrix} d | 4n + 1 \\ n2 | d \text{ از طرفی} \end{matrix} \longrightarrow d | 9 \Rightarrow d = \begin{cases} 1 \text{ IÄ} \\ 3 \text{ IÄ} \\ 9 \end{cases}$$

۵

اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر ۵۰ باقی مانده ۸ برابر مربع خارج قسمت باشد، مطلوب است a.

$$\begin{cases} a = 50q + r \gg 0 < r < 50 \\ r = 8q^2 \end{cases} : a = 50q + 8q^2, 0 < 8q^2 < 50$$

$$\Rightarrow 0 < q^2 < 6/25 \rightarrow 0 < q < 2/5 \xrightarrow{q \in \mathbb{N}} q = \begin{cases} 1 \rightarrow q = 58 \\ 2 \rightarrow a = 132 \end{cases}$$

۶

اگر باقی مانده ی تقسیم a بر ۷ و ۸ به ترتیب ۴ و ۵ باشد، مطلب است باقی مانده ی a بر ۵۶.

$$\left. \begin{matrix} a = 7q + 4 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q + 32 \\ a = 8q' + 5 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q' + 35 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{فاضل}} a = 56q'' - 3$$

$$: a = 56q'' - 56 + 53 : a = 56k + 53 \Rightarrow r = 53$$

باقیمانده

۷

اگر $5 | 2n + 1$ ، ثابت کنید: $25 | 14n^2 + 19n + 6$

$$5 | 2n + 1 \rightarrow 5^2 | (2n + 1)^2 : 25 | 4n^2 + 4n + 1 \quad \boxed{\text{I}}$$

$$10n^2 + 15n + 5 = 5(2n^2 + 3n + 1) = 5(\underbrace{2n^2 + n}_{n(2n+1)=5q'} + 2n + 1) = 25q''$$

$$\Rightarrow 25 | 10n^2 + 15n + 5 \quad \boxed{\text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{I} \gg \text{II}} 25 | 14n^2 + 19n + 6$$

۸

اگر باقی مانده ی تقسیم اعداد A و b بر ۳۹ به ترتیب ۱۷ و ۲۳ باشد، باقی مانده A - B بر ۳۹ را محاسبه کنید.

$$\begin{matrix} A \equiv 17 \\ B \equiv 23 \end{matrix} \Rightarrow A - B \equiv 17 - 23 = -6 \equiv 33$$

۹

باقی مانده‌ی تقسیم $3^{71} + 5^{112}$ بر ۱۳ را محاسبه کنید.

$$3^3 \equiv 1 \Rightarrow 3^{69} \equiv 1 \Rightarrow 3^{69} \times 3^2 \equiv 9 \Rightarrow 3^{71} \equiv 9 \quad (1)$$

$$5^2 \equiv -1 \Rightarrow (5^2)^{56} \equiv 1 \Rightarrow 5^{112} \equiv 1 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 3^{71} + 5^{112} \equiv 10$$

۱۰

رقم یکان 7^{327} را محاسبه کنید.

$$7^2 \equiv -1 \Rightarrow (7^2)^{163} \equiv -1 \xrightarrow{\times 7} 7^{327} \equiv -7 \Rightarrow -7 \equiv 3$$

رم یکان ۳ می‌باشد.

$$\begin{cases} 4k + r \xrightarrow{-10} a^r \\ r = 0 \end{cases} \quad \text{روش دوم: می‌دانیم}$$

$$7^{327} = 7^{(4 \times 81 + 3)} = 7^{4k-3} \equiv 7^3 = 7^2 \times 7 = 49 \times 7 \equiv 63 \equiv 3$$

۱۱

معادله‌ی هم‌نهشتی $151x \xrightarrow{-13} 40$ در مجموعه اعداد دورقمی چند جواب دارد؟

$$\begin{cases} 151x \equiv 40: -5x \equiv 40 \xrightarrow[(-5,13)=1]{+(-5)} x \equiv -8: x = -k - 8 \\ 15 \equiv -5 \end{cases}$$

$$:10 < 13k - 8 \leq 99: \frac{18}{13} \leq \frac{107}{13} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \begin{cases} + \\ - \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{cases} \quad \text{ارز: } 7$$

۱۲

اگر سوم اردیبهشت سالی دوشنبه باشد ۲۲ بهمن چه روزی خواهد بود؟

۲۲ بهمن سوم اردیبهشت (دوشنبه)

۱۳

$$28 + 4 \times 31 + 4 \times 30 + 22 \equiv 0 + 4 \times 3 + 4 \times 2 + 1 = 2 \equiv \begin{matrix} \uparrow \\ \text{روزهای هفته} \\ \text{Y} \\ \downarrow \\ \text{یعنی ۲۲ بهمن هم دوشنبه است.} \end{matrix}$$

۴ ماه ۳۰ روزی داریم. ۴ ماه ۳۱ روزی داریم.

اگر رقم یکان $5a+2$ و $2a+6$ برابر باشند، مطلوب است رقم یکان $7a-3$.

$$2a + 6 \equiv 5a + 2 \pmod{10} \Rightarrow 3a \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 3a \equiv -6 \pmod{10} \xrightarrow{(3,10)=1} a \equiv -2 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 7a - 3 \equiv -17 \equiv 3 \pmod{10}$$

۱۴

در گراف $5-$ منتظم از مرتبه p و اندازه q رابطه $2q - 3p = 12$ برقرار می‌باشد، مقادیر p و q را به دست آورید.

$$pr = 2q \Rightarrow 5p = 2q, \quad 2q - 3p = 12 \Rightarrow 5p - 3p = 12 \Rightarrow p = 6, \quad q = 15$$

۱۵

فرض کنید G گرافی است از مرتبه 7 و اندازه 9 به طوری که درجه هر راس آن 2 یا 3 باشد. تعیین کنید این گراف چند راس از درجه 2 و چند راس از درجه 3 دارد؟

تعداد	درجه
x	2
y	3
v	$x + y = v$ (I)

۱۶

$$\sum \deg(V_i) = 2q \Rightarrow 2x - 3y = 18 \quad \text{(II)}$$

$$\Rightarrow \text{(I), (II)} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases} : x = 3, y = 4$$

چند نوع گراف منتظم مرتبه 7 داریم؟

$r=0 \rightarrow$ ۱ نود

$r=2 \rightarrow$ نوع ۳ ضلعی و ۴ ضلعی / ۷ ضلعی

$r=4 \rightarrow$ چون مکمل ۲ منتظم است پس از این نوع هم ۲ نوع داریم

$r=6 \rightarrow$ ۱ نوع

۱۷

پس در کل ۶ نوع گراف منتظم مرتبه 7 داریم، دقت کنیم که فرد منتظم مرتبه فرد نداریم.

تعداد گراف‌هایی با چهار رأس a و b و c و d می‌توان ساخت به طوری که:

الف) شامل دو یال باشد.

ب) شامل یال ab باشد ولی یال cd را نداشته باشد.

$$\text{کل یال‌ها} = \binom{4}{2} = 6$$

$$q = 2 \xrightarrow{\text{باید ۲ یال از ۶ یال برداریم}} \binom{6}{2} = 15$$

الف)

ب) ab هست و cd نیست پس از ۴ یال مانده هر زیرمجموعه برداریم یک گراف داریم:

$$2^4 = 16$$

۱۸

یک گراف ساده مرتبه ۹، ۳۳ یال دارد. این گراف حداقل و حداکثر چند رأس با درجه Max دارد؟

$$p = 9 \xrightarrow{\text{اگر کامل باشد}} \begin{cases} q_{\text{کامل}} = \binom{9}{2} = 36 \\ \text{منتظم} = 8 \end{cases}$$

حال باید سه یال برداریم که بدترین نوع برداشتن $\vdots \vdots \vdots$ می‌باشد که ۳ رأس درجه ۸ باقی می‌ماند و بهترین نوع

برداشتن (؟؟؟) می‌باشد که ۶ رأس درجه ۸ می‌ماند.

۱۹

در گراف ۴ منتظم G داریم $q = 3p - 2$ ، مطلوبست اندازه گراف.

$$r.p = 2q \xrightarrow{r=4} 4p = 2q: q = 2p$$

$$4 = - \xrightarrow{q=2p} q=2p \Rightarrow 4 = -2p \Rightarrow p = -2$$

که این اعداد برای گراف ساده ۴ منتظم غیرقابل قبول اند.

۲۰

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح:

جمع بارم: ۲۰ نمره