

نام و نام خانوادگی: .....

مقطع و رشته: .....

نام پدر: .....

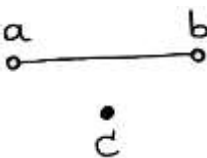
شماره داوطلب: .....

تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران  
اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران  
دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین  
آزمون پایان ترم نوبت اول سال تمصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام درس: ریاضیات گسسته  
نام دبیر: آقای دارابی  
تاریخ امتحان: ۱۷ / ۱۰ / ۱۳۹۷  
ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح / عصر  
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

محل مهر و امضاء مدیر	نمره به عدد:	نمره به حروف:	نمره به عدد:	نمره به حروف:
	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:
ردیف	سوالات			
۱	ثابت کنید اگر $K$ حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.			
۲	به روش بازگشتی ثابت کنید که $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ برقرار است. ( $x$ و $y$ و $z$ اعداد حقیقی هستند).			
۳	برای گزاره ی زیر یک مثال نقض بیاورید: "اگر برای هر سه مجموعه $A$ و $B$ و $C$ داشته باشیم: $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ "			
۴	اگر $a, b, c$ اعداد طبیعی باشند به طوری که $abc \mid ac + bc$ ، آنگاه نشان دهید که $a=b$ .			
۱/۵	چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $3yx - x^2 - y = 1$ وجود دارد؟			
۱	در یک تقسیم مقسوم علیه برابر ۲۲ و باقیمانده برابر با ۱۳ است. اگر ۱۵ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت و باقیمانده هر کدام چند واحد تغییر می کنند؟			
۱	اگر $b$ فرد و $c$ زوج باشد به طوری که $a \mid b + c$ آنگاه باقیمانده تقسیم $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ چقدر است؟			
۱	حاصل $([4a, 24a^2], (3a, 9ab))$ را بدست آورید.			
۱/۵	چند عدد دو رقمی $n$ وجود دارد به طوری که $7^n + 42 \equiv 0 \pmod{43}$ ؟			
۲	چند عدد به صورت $1aabb$ وجود دارد که مضرب ۳۶ باشد؟			

۱/۵	بزرگترین عدد دو رقمی $x$ را بیابید به طوری که: $13x \equiv 1 \pmod{5}$ و $7x \equiv 2 \pmod{12}$	۱۱
۱/۵	معادله سیاله $8x + 13y = 300$ چند جواب طبیعی دارد؟	۱۲
۱	یک گراف ساده از مرتبه ۱۲ و اندازه ۲۲ حداکثر چند رأس تنها دارد؟	۱۳
۱	روی مجموعه رأس های $V = \{a, b, c, d, e\}$ چند گراف ساده با اندازه ۳ ساخته می شود به طوری که دو رأس $a$ و $b$ مجاور باشند؟	۱۴
۱	گراف مقابل چند زیرگراف دارد؟ 	۱۵
۲	همه گراف های ساده مرتبه ۴ را رسم کنید. (توجه داشته باشید که رأس ها نامگذاری نشده اند.)	۱۶
صفحه ی ۲ از ۲		

جمع بارم : ۲۰ نمره



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران  
دبیرستان غیر دولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین  
کلید سؤالات پایان ترم نوبت اول سال تمصیلی ۹۸-۹۷

نام درس: گسسته  
نام دبیر: آقای دارابی  
تاریخ امتحان: ۱۷ / ۱۰ / ۱۳۹۷  
ساعت امتحان: ۸ صبح / عصر  
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	ثابت کنید اگر $K$ حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است. $K = n(n + 1) \rightarrow 4k + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$	
۲	به روش بازگشتی ثابت کنید که $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ برقرار است. ( $x$ و $y$ و $z$ اعداد حقیقی هستند). $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + z^2 - 2yz \geq 0$ $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$ رابطه ی آخر یک رابطه بدیهی است.	
۳	برای گزاره ی زیر یک مثال نقض بیاورید: "اگر برای هر سه مجموعه $A$ و $B$ و $C$ داشته باشیم: $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ " $\left. \begin{matrix} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{1, 2\} \\ C = \{2, 3\} \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} A \cup B = \{1, 2, 3\} \\ A \cup C = \{1, 2, 3\} \end{cases} \rightarrow A \cup B = A \cup C$ در حالیکه $B \neq C$	
۴	اگر $a, b, c$ اعداد طبیعی باشند به طوریکه $abc \mid ac + bc$ آنگاه نشان دهید که $a = b$ $abc \mid ac + bc \Rightarrow ab \mid a + b \Rightarrow \begin{cases} a \mid a + b \Rightarrow a \mid b \\ b \mid a + b \Rightarrow b \mid a \end{cases}$ بنابراین: $a \mid b$ و $b \mid a \Rightarrow  a  =  b  \Rightarrow a = b$ البته می توان مقادیر $a$ و $b$ را پیدا کرد، اما هدف مسئله مقادیر $a$ و $b$ نیست.	
۵	چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $3yx - x^2 - y = 1$ وجود دارد؟ $3yx - x^2 - y = 4 \Rightarrow y(3x - 1) = x^2 + 4 \Rightarrow y =$ $\frac{x^2 + 4}{3x - 1} \stackrel{y \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \begin{cases} 3x - 1 \mid x^2 + 4 \Rightarrow 3x - 1 \mid 3x^2 + 12 \\ 3x - 1 \mid 3x - 1 \Rightarrow 3x - 1 \mid 3x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 \mid 12 + x \Rightarrow 3x - 1 \mid 36 + 3x \\ 3x - 1 \mid 3x - 1 \end{cases}$ $\Rightarrow 3x - 1 \mid 37 \Rightarrow 3x - 1 = \pm 1, \pm 37$ $3x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Z}, \quad 3x - 1 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ $3x - 1 = -37 \Rightarrow x = -12 \in \mathbb{Z}, \quad 3x - 1 = 37 \Rightarrow x = \frac{38}{3} \notin \mathbb{Z}$ پس دو نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.	

۶	<p>در یک تقسیم مقسوم علیه برابر ۲۲ و باقیمانده برابر با ۱۳ است. اگر ۱۵ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت و باقیمانده هر کدام چند واحد تغییر می کند؟</p> $a = 22q + 13 \Rightarrow a + 15 = 22q + 28 \Rightarrow a + 15 = 22q + 22 + 6 \Rightarrow a + 15 = 22(q + 1) + 6$ <p>باقیمانده جدید ۶ و خارج قسمت جدید <math>q+1</math> است. پس از باقیمانده ۷ واحد کم شده و به خارج قسمت یک واحد اضافه شده است.</p>
۷	<p>اگر <math>b</math> فرد و <math>c</math> زوج باشد به طوریکه <math>a   b + c</math> آنگاه باقیمانده تقسیم <math>a^2 + b^2 + 3</math> بر ۸ چقدر است؟</p> <p><math>a</math> فرد است <math>\Rightarrow b + c</math> فرد است <math>\Rightarrow c</math> زوج است، <math>b</math> فرد است</p> $\left. \begin{array}{l} a \text{ فرد است} \Rightarrow a^2 = 8k + 1 \\ b \text{ فرد است} \Rightarrow b^2 = 8k' + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 8k + 8k' + 2$ $a^2 + b^2 = 8q + 2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 8q + 5$ <p>بنابراین باقیمانده <math>a^2 + b^2 + 3</math> بر ۸ برابر است با ۵.</p>
۸	<p>حاصل <math>((3a, 9ab), [4a, 24a^2])</math> را بدست آورید.</p> $3a   9ab \Rightarrow (3a, 9ab) = 3 a $ $4a   20a^2 \Rightarrow [4a, 24a^2] = 24a^2$ <p>بنابراین:</p> $(3 a , 24a^2) = 3 a $ <p>زیرا:</p> $3 a    24a^2$
۹	<p>چند عدد دو رقمی <math>n</math> وجود دارد به طوریکه <math>7^n + 42 \equiv 0 \pmod{43}</math></p> $7^n + 42 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow 7^n \equiv -42 \equiv 1 \pmod{43}$ <p>حال باید کوچکترین مقدار <math>n</math> را پیدا کنیم به طوریکه <math>7^n \equiv 1 \pmod{43}</math></p> $7^2 \equiv 6 \pmod{43} \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 42 \pmod{43} - 1 \Rightarrow 7^6 \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 7^{6k} \equiv 1 \pmod{43}$ <p>بنابراین: <math>n=6k</math> از طرفی <math>10 \leq n \leq 99</math> و</p> $10 \leq 6k \leq 99 \Rightarrow 2 \leq k \leq 16$ <p><math>\Rightarrow</math> تعداد جواب ها <math>= 16 - 2 + 1 = 15</math></p>

چند عدد به صورت  $\overline{1aabb}$  وجود دارد که مضرب ۳۶ باشد.

۱۰

$$\overline{1aabb} \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{1aabb} \equiv 0 \\ \overline{1aabb} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\overline{1aabb} \equiv 0 \Rightarrow \overline{bb} \equiv 0 \Rightarrow 10b + b \equiv 0 \Rightarrow 11b \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 0 \Rightarrow b = 0, 4, 8$$

$$\overline{1aabb} \equiv 0 \Rightarrow 1 + a + a + b + b \equiv 0 \Rightarrow 1 + 2a + 2b \equiv 0 \Rightarrow 2(a + b) \equiv -1 \equiv 8 \Rightarrow a + b \equiv 4$$

$$b = 0 \Rightarrow a \equiv 4 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \overline{1aabb} = 14400$$

$$b = 4 \Rightarrow a \equiv 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } a = 9 \Rightarrow \overline{1aabb} = 10044, 19944$$

$$b = 8 \Rightarrow a \equiv -4 \equiv 5 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow \overline{1aabb} = 15588$$

بزرگترین عدد دو رقمی  $x$  را بیابید به طوری که:

۱۱

$$13x \equiv 1, 7x \equiv 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 7x \equiv 2 \Rightarrow -5x \equiv -10 \Rightarrow x \equiv 2 \\ 13x \equiv 1 \Rightarrow 3x \equiv 6 \Rightarrow x \equiv 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x = 60k + 2$$

بزرگترین عدد دو رقمی  $x$  زمانی است که:  $k=1$  باشد.

$$x = 60 \times 1 + 2 = 62$$

معادله سیاله  $8x + 13y = 300$  چند جواب طبیعی دارد؟

۱۲

$$13y \equiv 300 \Rightarrow 5y \equiv 300 \Rightarrow y \equiv 4 \Rightarrow y = 8k + 4$$

$$8x + 13y = 300 \Rightarrow 8x + 13(8k + 4) = 300 \Rightarrow 8x = 248 - 13 \times 8k \Rightarrow x = 31 - 13k$$

اما جواب ها باید طبیعی باشند، بنابراین:

$$1 \leq x \Rightarrow 1 \leq 31 - 13k \Rightarrow 13k \leq 30 \Rightarrow k \leq 2$$

$$1 \leq y \Rightarrow 1 \leq 8k + 4 \Rightarrow 0 \leq k$$

بنابراین:

$$0 \leq k \leq 2$$

$$\text{تعداد جواب ها} = 2 - 0 + 1 = 3$$

یک گراف ساده از مرتبه ۱۲ و اندازه ۲۲ حداکثر چند رأس تنها دارد؟

۱۳

باید ۲۲ را در حداقل تعداد ممکن رأس ها جای دهیم تا بیشترین تعداد رأس های تنها باقی بماند. اما برای ۲۲ یال

حداقل ۸ رأس لازم است زیرا:

$$2^8 = 28 \text{ و } 2^7 = 21$$

بنابراین حداکثر تعداد رأس ها تنها برابر است با:

$$12 - 8 = 4$$

روی مجموعه رأس های  $V = \{a, b, c, d, e\}$  چند گراف ساده با اندازه ۳ ساخته می شود به طوری که دو رأس  $a$  و  $b$  مجاور باشند؟

$$\binom{\binom{5}{2}}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

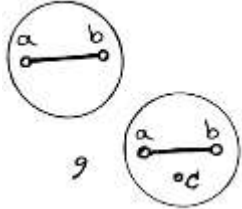
گراف مقابل چند زیرگراف دارد؟



c

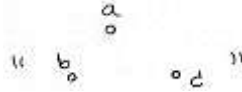
زیرگراف ها یا شامل یال  $ab$  هستند و یا شامل آن نیستند.

(۱) زیرگراف های شامل یال  $ab$ :



(۲) زیرگراف های فاقد یال  $ab$ : کافی است زیرگراف های گراف تهی را بشماریم.

زیرگراف ها :  $2^3 - 1 = 7$

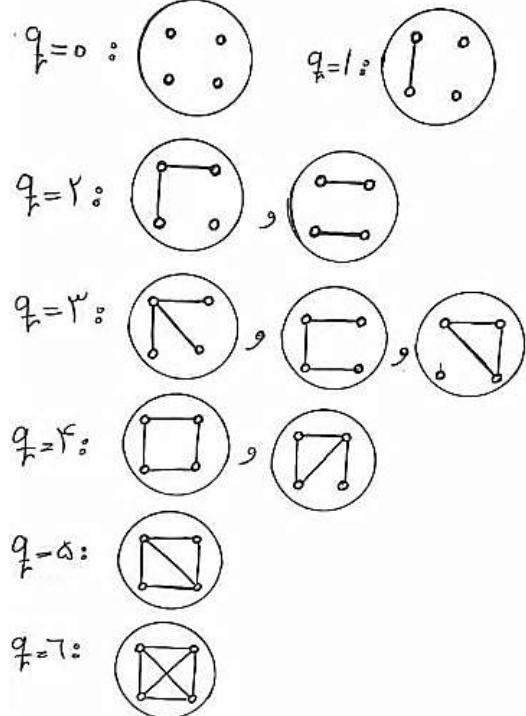


بنابراین:

تعداد کل زیرگراف ها :  $7 + 2 = 9$

همه گراف های ساده مرتبه ۴ را رسم کنید. (توجه داشته باشید که رأس ها نامگذاری شده اند.) (۲ نمره)

$$0 \leq q \leq \binom{4}{2} \implies 0 \leq q \leq 6$$



امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح :

جمع بارم : ۲۰ نمره