

پاسخ تشریحی

آزمون سراسری سال ۹۸

گروه آزمایشی علوم ریاضی
(داخل کشور)

زبان و ادبیات فارسی

۱- پاسخ: گزینه ۱

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: اشباه: جمع شبه، ماندها، همانندان (اشباح: سایه‌ها)

گزینه ۳: استرحام: رحم خواستن، طلب رحم کردن

گزینه ۴: تقریظ: ستودن، نوشتن یادداشتی ستایش آمیز درباره یک کتاب / وقب: هر فرورفتگی اندام چون گودی چشم (گرده: بالای کمر)

۲- پاسخ: گزینه ۳

بررسی واژه‌های نادرست:

الف) مقرون با قرینه ترادف ندارد.

ج) متفق به معنی موافق است و معنی همگرا (= متقارب) نمی‌دهد.

د) تمکن، توانگری و ثروت است، نه توانگر.

۳- پاسخ: گزینه ۲

تنها با دانستن معنی «قسیم» می‌توانستید جواب درست را پیدا کنید. در معنی «صواب» در درس ۲ دوازدهم، «پسندیده» آمده‌است. «ماورا» به معنی «برتر» است و در درس ۹ دوازدهم آمده‌است. «رواق» هم از معانی «طاق» است و در درس ۸ دوازدهم آمده‌است.

۴- پاسخ: گزینه ۳

هشم ← حشم / آذرَم ← آذرَم / کاذبه ← کاذبه / زماد ← ضماد / چریق ← چریغ / زی حیات ← ذی حیات

۵- پاسخ: گزینه ۱

در بیت «الف»، «مسطور» نادرست است و درست آن «مستور» است. در بیت «ب»، «صریر» به معنی آواز است و شکل درست آن «سریر» به معنی تخت پادشاهی است.

۶- پاسخ: گزینه ۴

در گزینه ۴، «ذوال» نادرست است و درست آن «زوال» است.

۷- پاسخ: گزینه ۲

با همان اثر اول پاسخ مشخص می‌شد و تست بسیار آسان بود. تمام آثار از فارسی ۳ انتخاب شده‌اند.

۸- پاسخ: گزینه ۲

در گزینه ۲ وجه شبه بیان نشده است. شاعر فقط رنگ زمین و طبع زمان را به رخ خود و دم خود تشبیه کرده است و دلیل این مشابَهت را نگفته‌است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: به پیچ و تاب افتادن

گزینه ۳: هزاران ناله داشتن

گزینه ۴: مشهور خوبان بودن - شب‌نشین کوی سربازان و رندان بودن

۹- پاسخ: گزینه ۴

در بیت «حسن تعلیل» و «تناقض» وجود ندارد، بنابراین دو گزینه ۲ و ۳ حذف می‌شوند. «مجاز» هم در بیت دیده نمی‌شود و پاسخ گزینه ۴ است. بررسی آرایه‌های گزینه ۴:

تشبیه: شاعر به صورت تشبیه پنهان «سخن گفتن» و «خندیدن» یار را با «سخن گفتن» و «خندیدن» شیرین مقایسه کرده‌است و بر آن‌ها برتری داده‌است. این نوع تشبیه (تشبیه پنهان مرجح) از دشوارترین انواع تشبیه است که در سال‌های اخیر مورد توجه طراحان کنکور قرار گرفته‌است.

ایهام: شیرین: (۱) معشوق فرهاد (۲) دل‌نشین و خوش

استعاره: «شکر» استعاره از «لب» است.

ایهام تناسب: شکر: (۱) خوراکی شیرین (معنی قابل قبول) (۲) همسر خسرو (معنی غیرقابل قبول و متناسب با شیرین)

■ در این سؤال گزینه ۱ هم می‌تواند درست باشد، زیرا مطابق با نظر کتاب درسی هر «استعاره مصرحه» مجاز هم به حساب می‌آید و بیت دارای مجاز هم هست، اما متأسفانه کنکور در این مورد مانند نظام قدیم عمل کرد و استعاره را مجاز ندانست. بنابراین:

تذکر مهم: با توجه به این تست، شما در پاسخ‌گویی به سؤالات آرایه، به صورت پیش‌فرض «استعاره» را «مجاز» در نظر بگیرید و با این فرض تست را حل کنید، بعد اگر به جواب مناسب نرسیدید دوباره با فرض آنکه استعاره، مجاز است، تست را حل کنید؛ یعنی اول نظر کنکور را در این تست مبنا قرار بدهید و در درجه دوم نظر کتاب درسی را.

۱۰- پاسخ: گزینه ۱

در این بیت «حس آمیزی» و «ایهام» وجود ندارد.

بررسی سایر آرایه‌ها:

استعاره: جگر خم تشخیص و استعاره است.

تناقض: گویا شدن از مهر خموشی زدن

تشبیه: مهر خموشی (اضافه تشبیهی)

مراعات نظیر: دل و سر و جگر

مجاز: دل مجاز است.

اسلوب معادله: همه شرایط اسلوب را دارد.

۱۱- پاسخ: گزینه ۲

با بررسی حسن تعلیل شروع می‌کنیم، باید ابیات «ج و الف» بررسی شوند. بیت «الف» حسن تعلیل ندارد و در بیت «ج» دلیل آشفته‌گی زلف یار آگاهی از حال عاشق دانسته شده است. فقط گزینه ۳ حذف می‌شود. در ادامه پارادوکس را در ابیات «د، ب و الف» بررسی می‌کنیم: در بیت «ب» به آزادگی گرفتار بودن تناقض است و در سایر گزینه‌ها پارادوکس وجود ندارد، پس جواب احتمالاً گزینه ۲ است و باید سایر گزینه‌ها در آن بررسی شوند:

استعاره: بیت «الف»: به دل شخصیت بخشیده شده است.

تشبیه: بیت «د»: مثل گوی افتادن

۱۲- پاسخ: گزینه ۳

بررسی حذف در سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: جان فدا [می‌کنم].

گزینه ۲: چه به از این ارمغانی [داری، یا وجود دارد، یا باشد] که ...

گزینه ۴: نیک‌بخت آن [کسی است] که ...

■ در گزینه ۳ «به» صفت سخن است و مسند نیست که حذف فعل وجود داشته باشد و شاعر می‌گوید: گوش بر ناله بلبل کن و بگذار تا اینکه سخنی بهتر از سخن سعدی شیرازی نگوید.

۱۳- پاسخ: گزینه ۱

در گزینه ۱ «ساختن» به معنی درست کردن و آفریدن است و فقط مفعول می‌خواهد، اما در سایر گزینه‌ها ساختن به معنی گرداندن است و به مفعول و مسند نیاز دارد.

۱۴- پاسخ: گزینه ۳

راز همه را افشا کرد (= گرداند)، پس همه «مضاف‌الیه» است و افشا «مسند». جواب با همین دو نقش معلوم است.

هم او را پرده‌نشین بنگر، هم او را پرده‌نشین بین. دو کلمه بعد هم به ترتیب مفعول و مسند هستند.

۱۵- پاسخ: گزینه ۱

در گزینه ۱ در «پای یار سرکش خورشیدچهره»، پا، هسته است، یار، مضاف‌الیه و سرکش و پری‌چهره، صفت، پس دو «صفت مضاف‌الیه» داریم و خبری از «مضاف‌الیه مضاف‌الیه» نیست.

بررسی مضاف‌الیه مضاف‌الیه در سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: خاک پای صنوبر: صنوبر مضاف‌الیه مضاف‌الیه است.

گزینه ۳: عشق نرگس پرخواب او: نرگس مضاف‌الیه است و پرخواب صفت و او مضاف‌الیه مضاف‌الیه.

گزینه ۴: سر عشق تو: تو مضاف‌الیه مضاف‌الیه است.

۱۶- پاسخ: گزینه ۴

در هر چهار گزینه در کلمه اول «ان» نشانه جمع است، ولی فقط در «خرامان»، «ان» صفت فاعلی ساخته است و جواب مشخص می‌شود. در «سخن‌سرایان»، «ان» جمع است و در کیان جزو خود واژه است (اگر جمع کی باشد، نشانه جمع است) و در «گرگان» جمع (اگر شهر گرگان موردنظر باشد، جزو خود واژه است).

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

در ابیات «ب و ج» مفهوم «نتیجه عمل هر کس به خودش باز می‌گردد» مشترک است.

مفهوم سایر ابیات:

(الف) هر دو چیز که ظاهر یکسان دارند، یکسان نیستند (گاهی نتیجه دور از انتظار است).

(د) مفلس از پادشاه هراسی ندارد (المفلس فی امان الله).

۱۸- پاسخ: گزینه ۴

مفهوم مشترک ابیات ۱، ۲ و ۳ «توصیه به عدل و داد و فواید عدل است» و اینکه عادل و دادگر همواره فایق و پیروز است. در گزینه ۴ سخن از «راستی و درستی شخص عادل» است و شاعر می‌گوید: اگر شخص عادل صادق، بی‌یاور باشد، تنها همان راستی و صداقت بهترین یاور اوست.

۱۹- پاسخ: گزینه ۱

در گزینه ۱ همانند بیت سؤال «تقابل عشق و آسایش» دیده می‌شود و سخن از این است که عشق با ویرانی و نابودی عجین است و با تدبیر و عافیت‌اندیشی سازگار نیست.

مفهوم سایر گزینه‌ها:

گزینه ۲: ناتوانی دل عاشق در کناره‌گیری و دوری از عشق

گزینه ۳: قدم‌گذاشتن در راه عشق قابلیت می‌خواهد و کار هرکسی نیست.

گزینه ۴: چیزی که از بنیاد، ویران است، نباید به دنبال اصلاح ظاهر آن باشیم.

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

در بیت سؤال و گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ مفهوم «ناتوانی عقل در تدبیر عشق» مشترک است. مفهوم گزینه ۲ این است که نباید فریب ظاهر همانند دیگران را خورد و نباید همه چیز را یکسان دانست.

۲۱- پاسخ: گزینه ۳

بررسی ابیات:

(الف) تکیه دل به جای دگر او را از لغزش‌ها در امان می‌دارد: توکل (ب) درد برای اهل عشق مهربان است: پذیرفتن سختی عشق

(ج) غبطه‌خوردن بر عاشق (د) با وجود عشق تو از همه دردها آسوده شدم: فراغت به واسطه عشق

۲۲- پاسخ: گزینه ۴

مفهوم مشترک بیت سؤال و گزینه ۴، «ناپایداری و بی‌اعتباری جهان» است و هر دو بیت بر اینکه قبل از ما انسان‌های بسیار بودند و دیگر نیستند، اشاره دارند.

مفهوم سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: وفاداری عاشق در عشق یار

گزینه ۲: تحسین حسن معشوق که نمی‌توان آن را به تصویر کشید.

گزینه ۳: تحسین زیبایی معشوق و برتر دانستن او بر دیگران

۲۳- پاسخ: گزینه ۲

در گزینه ۲ سخن از این است که «رهایی از عشق ممکن نیست»، در سایر گزینه‌ها مفهوم «جان‌بازی عاشقانه و فناشدن در راه عشق» مشترک است.

۲۴- پاسخ: گزینه ۴

در گزینه ۴، فرستادن سواران و طلب کردن هزار شتر «خرق عادت» نیست و به هیچ باور فراعقلی اشاره نشده است. در گزینه ۱، رویین تن بودن اسفندیار، در گزینه ۲، بی‌رقیب بودن کودک ده‌ساله (سهراب) و در گزینه ۳، هزار سال حکومت کردن ضحاک نشانگر زمینه «خرق عادت» در حماسه هستند.

۲۵- پاسخ: گزینه ۲

در گزینه ۲، بر این مفهوم تأکید شده است که نباید به جسم و تن توجه کرد، بلکه باید روح و جان را اصل دانست. در سایر گزینه‌ها مفهوم «ترک تعلّق» دیده می‌شود.

در گزینه ۱ تأکید شده است، کسی که عاشق شود باید قید خواب را بزند و اینکه زهره هم‌نشین ماه شده است و به کمال رسیده است هم به دلیل شب‌زنده‌داری دانسته شده است، پس مفهوم آن «توصیه بر ترک خواب و شب‌زنده‌داری» است و این مفهوم با مفهوم ترک تعلّق در ارتباط است.

زبان عربی

۲۶- پاسخ: گزینه ۱

إِمْهًا: فقط (رد سایر گزینه‌ها) // رسوله: پیامبرش، رسول او (رد گزینه ۳) // الَّذِينَ: کسانی که (رد سایر گزینه‌ها) // آمَنُوا: ایمان آوردند (رد سایر گزینه‌ها)

۲۷- پاسخ: گزینه ۱

یتراکم: متراکم می‌شود (رد گزینه‌های ۲ و ۳) // بخار الماء: بخار آب (رد گزینه‌های ۲ و ۳) // فِي السَّمَاءِ: در آسمان (رد گزینه ۲) // یتشكّل: تشکیل می‌گردد، به وجود می‌آیند (رد گزینه‌های ۲ و ۴) // منه: از آن (رد سایر گزینه‌ها) // الغیم: ابر (رد گزینه‌های ۳ و ۴) // الذّی: که (رد گزینه‌های ۲ و ۳) // یعدّ: به شمار می‌آید (رد سایر گزینه‌ها) // منشأ المطر: منشأ باران (رد گزینه ۳) // «همان» در گزینه ۲ اضافی است.

۲۸- پاسخ: گزینه ۴

أعجب الأسماك: عجيب ترین ماهی‌ها (رد سایر گزینه‌ها) / صعبة: سخت، دشوار (رد گزینه ۳) / أن تأكل صيدها حيًّا: که صید خود را زنده بخورد (رد سایر گزینه‌ها)

۲۹- پاسخ: گزینه ۲

من أخلص الناس: از خالص‌ترین مردم، از با اخلاص‌ترین مردمان (رد گزینه ۱) / تجري: جاری می‌شود (رد سایر گزینه‌ها) / ينابيع الحكمة: چشمه‌های حکمت (رد گزینه ۱) / لسانه: زبانش (رد گزینه ۴)

۳۰- پاسخ: گزینه ۱

لا تستشر: مشورت نکن (رد گزینه‌های ۲ و ۴) / الكذاب: بسیار دروغ‌گو، کذاب (رد گزینه‌های ۲ و ۳)

۳۱- پاسخ: گزینه ۳

كنتُ أفكر: می‌اندیشیدم، فکر می‌کردم (رد گزینه‌های ۱ و ۲) / يمكن: امکان دارد (رد گزینه‌های ۲ و ۴) / أن تكون قد خلقت: خلق شده باشد (رد گزینه‌های ۱ و ۴) / كل ما: هر چیزی، هر آنچه (رد گزینه‌های ۱ و ۴) / فيهما: در آن‌ها (رد گزینه‌های ۲ و ۴) / «این» در گزینه‌های ۱ و ۴ اضافی است.

۳۲- پاسخ: گزینه ۴

هناك: هستند، وجود دارند (رد گزینه ۳) / تجري: جاری می‌شوند (رد گزینه‌های ۲ و ۳) / على أقلام بعض الشعراء: بر قلم‌های برخی شعرا (رد سایر گزینه‌ها) / لأول مرة: برای اولین بار، برای اولین مرتبه (رد گزینه‌های ۱ و ۳) / تدلّ: دلالت می‌کند (رد گزینه‌های ۱ و ۳) / مفاهيم جديدة: مفاهیم جدیدی، مفاهیمی جدید (رد گزینه‌های ۱ و ۳) / لم يكن يعرفها: آن‌ها را نمی‌شناخته‌اند، آن را نمی‌شناختند (رد گزینه ۱)

۳۳- پاسخ: گزینه ۴

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) ليتني رأيت: کاش می‌دیدم، کاش دیده بودم

(۲) لعلّ ... قد نزل: شاید ... نازل می‌شد، شاید ... نازل شده بود

(۳) ليت ... قد إنتهى: کاش ... تمام می‌شد، کاش ... تمام شده بود

«ليت» و «لعلّ» + ماضی ← «ماضی استمراری» و «ماضی بعید»

۳۴- پاسخ: گزینه ۱

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) جاءت ... به: آورد / فراخها الصّغيرة: جوجه‌های کوچکش

(۳) أكثر من قبل: بیش از پیش («با کمال میل» در این گزینه اضافی است).

(۴) يلقى ... محاضرة: سخنرانی می‌کند / ينصت: سکوت می‌کنند

۳۵- پاسخ: گزینه ۳

تنها حیوان پستانداری است که: هو الحيوان اللّبون الوحيد الذي (رد سایر گزینه‌ها) / قادر به ... می‌باشد: يقدر على ... (رد سایر گزینه‌ها) / «و هو قادر»، سیاق حال جمله اسمیه می‌باشد؛ در حالی که در صورت سؤال، حال وجود ندارد.

■ ترجمه متن:

«هنگامی که به مناطق گرمسیری می‌رویم، گاهی از دور مناظر جذابی می‌بینیم و بعد از اینکه به آن نزدیک می‌شویم، درختان زیبای نخل را می‌بینیم که این درخت اهمیت مادی بزرگی دارد به نحوی که نوعی از آن در برخی مناطق، اساسی را برای معیشت بسیاری از ساکنان، تشکیل می‌دهد! همچنین که آن غذایی اصلی در برخی مناطق صحرایی است! و بعضی از میوه‌های آن خشک می‌شود و به مناطق دیگر فرستاده می‌شود!

نخل انواع مختلفی دارد به نحوی که حدود ۱۵۰۰ نوع از آن وجود دارد که با برخی دیگر متفاوت است و از انواع آن نخیل خرما است که از مهم‌ترین آن‌ها به‌شمار می‌آید و نخیل روغن که در ساخت صابون و مواد آرایشی به‌کار می‌رود!

ارتفاع نخل به ۲۷ متر می‌رسد و تنه‌اش بسیار خشن است؛ چون آن از بقایای شاخه نخلی است که می‌افتد یا هنگام رشد زیاد درخت قطع می‌شود!

۳۶- پاسخ: گزینه ۲

ترجمه گزینه‌ها:

(۱) خرما در مناطقی که به آن فرستاده می‌شود، خشک می‌شود!

(۲) خرما را از دور و نزدیک، جذاب می‌بینیم! ✓

(۳) اگر خرما اساس زندگی باشد، به مناطق دیگر فرستاده نمی‌شود!

(۴) برخی از ساکنان مناطق صحرایی فقط می‌توانند خرما بخورند!

۳۷- پاسخ: گزینه ۴

ترجمه گزینه‌ها:

- (۱) ارتفاع آن به ۲۷ متر می‌رسد، ولی شاخه‌های آن بلندتر و خشن‌تر هستند!
- (۲) انواع آن متعدد است که به ۱۵۰۰ نوع می‌رسد، اما میوه‌هایش از یک نوع است!
- (۳) هیچ منطقه‌ای بر روی زمین نیست مگر اینکه در آن خرما وجود دارد و به‌عنوان ماده غذایی شناخته می‌شود!
- (۴) مهم‌ترین انواع آن نخیل خرما و نخیل روغن است! ✓

۳۸- پاسخ: گزینه ۲

صورت سؤال: «از فواید نخل این است که»

- (۱) مناظرش بسیار زیبا است در مناطق گرمی که در آن درختان سبز نمی‌بینیم!
- (۲) ماده غذایی مفیدی است که در مناطق سرد رشد می‌کند و میوه‌اش غذایی اصلی به‌شمار می‌رود! *
- (۳) از میوه‌اش موادی ساخته می‌شود که در زینت و زیبایی مردم استفاده می‌شود!
- (۴) میوه‌اش در موادی که ما برای نظافت به آن‌ها نیاز داریم استفاده می‌شود!

۳۹- پاسخ: گزینه ۴

صورت سؤال: «تنه نخل بسیار خشن است؛ زیرا»

- (۱) سر شاخه و انتهایش فرق دارد؛ پس فقط سرش قطع می‌شود!
- (۲) هنگامی که شاخه خشک می‌شود، فقط سرش از تنه جدا می‌شود!
- (۳) کشاورزان گاهی اوقات شاخه قدیمی را می‌برند و اثرش باقی می‌ماند!
- (۴) نخل در خلقتش اینگونه است و آن چیزی است که از تنه‌هایی که می‌ریزد، باقی مانده است! *

۴۰- پاسخ: گزینه ۲

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) (حروفه الأصلية: ن ش ه) ← (حروفه الأصلية: ش ه د)
- (۳) مجهول ← معلوم
- (۴) للمتكلم وحده ← للمتكلم مع الغير

۴۱- پاسخ: گزینه ۳

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) معلوم ← مجهول
- (۲) للمخاطب ← للغائبة / مع فاعله ← فاعله محذوف
- (۴) للمخاطب ← للغائبة

۴۲- پاسخ: گزینه ۲

بررسی سایر گزینه‌ها:

- (۱) (من وزن «إنفعال») ← (من وزن «إفتعال»)
- (۳) علی وزن «إنفعال» ← علی وزن «إفتعل»
- (۴) جمع مکسر أو تکسیر ← مفرد

۴۳- پاسخ: گزینه ۴

«مُصْلَح» باید «مُصْلَح» باشد؛ زیرا اسم فاعل و به‌معنی «تعمیرکار» می‌باشد. «يُصْلَح» باید «يُصْلَح» باشد؛ زیرا فعل معلوم و مضارع باب «تفعیل» می‌باشد.

۴۴- پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

- (۱) اگر آسمان نبارد، پس با خشک مواجه می‌شویم! (صحیح: «الجفاف: خشکی»)
- (۲) مکان قراردادن پاها همان جای پا است! ✓
- (۳) هسته همان قسمتی از میوه است که آن را می‌خوریم!
- (۴) اداره پلیس برای رعایت عبور و مرور در خیابان می‌ایستد! (صحیح: «الشرطي: پلیس»)

۴۵- پاسخ: گزینه ۲

بررسی گزینه‌ها:

(۱) المؤمنین: جمع سالم

(۲) المساکین: جمع مکسر

(۳) الطّالِب: جمع مکسر / جالسین: جمع سالم

(۴) المسلمین: جمع سالم

نکته: دقت داشته باشید که طبق پاسخنامه کلیدی سازمان سنجش، پاسخ این تست گزینه ۲ می‌باشد؛ اما این تست ایراد دارد؛ زیرا «الطّالِب» در گزینه ۳ نیز جمع مکسر می‌باشد.

۴۶- پاسخ: گزینه ۳

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) اتقی

(۲) أنجح

(۴) أحسن

دقت داشته باشید که «أعلم» در گزینه ۳، فعل مضارع «للمتكلم وحده» می‌باشد و «أبيض» در گزینه ۴ رنگ است و اسم تفضیل نیست.

۴۷- پاسخ: گزینه ۱

بررسی گزینه‌ها:

(۱) أن لاغضب: که خشمگین نشویم (مضارع التزامی منفی) // نغضب: خشمگین می‌شویم (مضارع اخباری)

(۲) لعل ... يعرف: شاید بشناسد (مضارع التزامی)

(۳) ليتني أصدق: کاش صعود کنم (مضارع التزامی)

(۴) ليتنا نقرأ: کاش بخوانیم (مضارع التزامی) // لناخذ: تا بگیریم (مضارع التزامی)

نکته: «ليت»، «لعل» و «ل» + مضارع ← مضارع التزامی

۴۸- پاسخ: گزینه ۴

دقت داشته باشید که لای نفی جنس بر سر اسم منصوبی می‌آید که «ال» و «تنوین» ندارد و فقط در گزینه ۴ چنین اسمی وجود دارد.

[این سؤال خارج از حیطه طرح شده؛ زیرا قواعد مربوط به اسم لای نفی جنس، در کتاب درسی نبوده است.]

۴۹- پاسخ: گزینه ۳

در صورت سؤال مفعول مطلق نوعی خواسته شده است.

بررسی گزینه‌ها:

(۱) وفاءً جمیلاً ← مفعول مطلق نوعی

(۲) تشجیعاً کثیراً ← مفعول مطلق نوعی

(۳) تضییعاً ← مفعول مطلق تأکیدی

(۴) شماً دقیقاً ← مفعول مطلق نوعی

۵۰- پاسخ: گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

(۱) قبل از «هم»، واو حالیه نیامده است.

(۲) بعد از «واو»، جمله اسمیه نیامده است.

(۳) و هم یتکلمون: حال جمله اسمیه

(۴) هیچ عبارتی وجود ندارد که نقش «حال» داشته باشد.

دین و زندگی

۵۱- پاسخ: گزینه ۳

اهداف انسان به دو دسته فرعی و اصلی تقسیم می‌شوند که معیارهای آن‌ها را خدا به ما داده است، اما باید توجه کنیم که برای انتخاب اهداف ابتدا باید ارزش اهداف را مشخص کنیم و به آن‌ها رتبه دهیم و سپس بر اساس اولویت‌بندی‌ها، اهداف را انتخاب کنیم.

۵۲- پاسخ: گزینه ۴

فعالیت‌ها و کارهای انسان ریشه در دلبستگی‌ها و محبت‌های او دارد. بزرگترین و مهم‌ترین چیزی که انسان می‌تواند به آن محبت داشته باشد تا ارزش انسان را بالا ببرد، محبت به خدا است که آیه ﴿وَمِنَ النَّاسِ مَن يَتَّخِذُ...﴾ با توجه به عبارت ﴿وَالَّذِينَ آمَنُوا أَشَدَّ حُبًّا لِلَّهِ﴾ به این مطلب اشاره دارد.

۵۳- پاسخ: گزینه ۲

خداوند برای انسان در نظام هستی جایگاه ویژه‌ای قائل است که مصادیق آن، این‌گونه بیان می‌شود: خداوند آنچه در آسمان‌ها و زمین است، برای انسان آفریده و توانایی بهره‌مندی از آن‌ها را در وجود او قرار داده است.

۵۴- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آیه ﴿وَمِنَ النَّاسِ مَن يَعْبُدُ اللَّهَ عَلَى حَرْفٍ فَإِنْ أَصَابَهُ خَيْرٌ اطْمَأَنَّ بِهِ وَإِنْ أَصَابَتْهُ فِتْنَةٌ انْقَلَبَ عَلَى وَجْهِهِ...﴾ می‌توان گفت که (فتنه) نشان‌دهنده سنت ابتلا است که عابدان مقطعی در مواجهه با آن از خدا رو برمی‌گردانند که همان «انقلب علی وجهه» می‌باشد.

۵۵- پاسخ: گزینه ۱

یکی از راه‌های تقویت اخلاص، راز و نیاز با خدا (دعا و نیایش به درگاه الهی) می‌باشد که موجب کم شدن غفلت و افزایش محبت به خدا در دل انسان و همچنین بهره‌مند شدن انسان از امدادهای الهی می‌شود.

۵۶- پاسخ: گزینه ۲

■ این آیه، نظام قضا و قدر الهی را نشان می‌دهد که ناخدایی حکیم آن را اداره می‌کند که حافظ و نگهدار جهان است و اشتباه در کار او راه ندارد.
■ عبارت «یَمْسُکُ» در این آیه بیانگر فعل خدا است که نتیجه تدبیر اوست و توحید در ربوبیت را به تصویر می‌کشد.

۵۷- پاسخ: گزینه ۴

«صمد» آن بی‌نیازی است که همه نیازمندان به او رجوع می‌کنند «یَسْأَلُهُ مِنَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ، هَرَّ أَنْجَهِ دَرِ آسْمَانِهَا وَ زَمِینِ اسْتِ، پِیوسته از او درخواست می‌کند.» و او نیز، نیاز همه را برطرف می‌کند «کُلَّ یَوْمِ هُوَ فِی شَأْنٍ، او همواره دست اندر کار امری است.»

۵۸- پاسخ: گزینه ۳

شعر زیر بیانگر نیازمندی موجودات در بقا به خداوند متعال می‌باشد.

ما همه شیران ولی شیر علم حمله‌مان از باد باشد دم به دم

افزایش درک انسان نسبت به فقر (از جمله فقر در بقا) موجب می‌شود، بندگی و عرض نیاز انسان به پیشگاه خدا افزایش یابد که مصداق آن را در کلام رسول خدا ﷺ مبنی بر «اللَّهُمَّ لَا تَكُنْ لِی نَفْسِی طَرَفَۃَ عَیْنِ اِبْدَا» می‌بینیم.

۵۹- پاسخ: گزینه ۱

■ آیه شریفه «لَعَلَّکَ بَاخِعٌ نَفْسَکَ اَلَّا یَکُونُوا مُؤْمِنِینَ، شاید که جانت را از دست بدهی از اینکه آن‌ها ایمان نمی‌آورند»، بیانگر هشدار خدا به پیامبر ﷺ است که نشان می‌دهد شدت تلاش پیامبر ﷺ در هدایت و دلسوزی ایشان برای نجات مردم از گمراهی امکان دارد، ایشان را از پا درآورد.
■ امیرالمؤمنین علیه السلام درباره تلاش پیامبر ﷺ در هدایت مردم می‌فرمایند: «پیامبر طیبی سیار بود، [برخلاف سایر طبیبان] او خود به سراغ مردم می‌رفت، داروها و مرهم‌هایش را خودش آماده می‌کرد و ابزارهای طبابت را با خود می‌برد تا بر هر جا که نیاز باشد مرهم بگذارد؛ بر دل‌های کور، گوش‌های کر، زبان‌های گنگ؛ او با داروهای خویش، بیماران غفلت‌زده و سرگشته را درمان می‌کند.»

۶۰- پاسخ: گزینه ۴

هر پیامبری که می‌آمد، به آمدن پیامبر بعدی بشارت می‌داد و بر پیروی از او تأکید می‌کرد. بنابراین، وجود دو یا چند دین در یک زمان، نشانگر این است که پیروان پیامبر قبلی به آخرین پیامبر ایمان نیاورده‌اند و این کار به معنای سرپیچی از فرمان خدا و عدم پیروی از دستورات پیامبران گذشته است.

علاوه بر این، امروزه به جز قرآن کریم هیچ کتاب آسمانی دیگری وجود ندارد که بتوان گفت محتوای آن به طور کامل از جانب خداست و انسان‌ها آن را کم و زیاد نکرده‌اند و با اطمینان خاطر بتوان از آن پیروی کرد. بنابراین، تنها دینی که می‌تواند مردم را به رستگاری دنیا و آخرت برساند، اسلام است.

قرآن در این باره می‌فرماید: «وَمَنْ یَتَّبِعْ غَیْرَ الْاِسْلَامِ دِیْنًا فَلَنْ یَقْبَلَ مِنْهُ وَ هُوَ فِی الْاٰخِرَةِ مِنَ الْخٰسِرِیْنَ»، پس دینی جز اسلام پذیرفته نیست و پیروان پیامبران گذشته باید به پیروی از اسلام و پیامبر اسلام ﷺ رو آورند.

۶۱- پاسخ: گزینه ۱

نزول آیه انذار که موجب برگزاری مراسم دعوت خویشان شد، که در نتیجه آن برای اولین بار به طور رسمی، رسول خدا ﷺ، امیرالمؤمنین علیه السلام را به عنوان جانشین خود معرفی می‌کنند.

۶۲- پاسخ: گزینه ۲

از کتاب یازدهم چاپ سال ۹۷ که منبع کنکور سراسری ۹۹ می‌باشد، حذف شده است.

۶۳- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به آیه صورت سؤال افرادی که به آن معتقد باشند، زندگی دنیا را لهو و لعب می‌دانند و حیات اخروی را زندگی حقیقی و جاودانه می‌دانند به «اِنَّ الدَّارَ الْاٰخِرَةَ لَهِیَ الْحَیْوَانِ» معتقدند. این افراد همان معتقدان به معاد هستند که مرگ را غروبی می‌دانند که طلوعی درخشان‌تر را در پی دارد.

۶۴- پاسخ: گزینه ۲

■ دقت کنید که عدل و حکمت الهی، معاد را از راه ضرورت اثبات می‌کند.
اینکه در دنیا پاداش و جزای کامل اعمال محقق نمی‌شود و انسان‌ها به حق واقعی خود نمی‌رسند، ضرورت وجود دنیای دیگری را اثبات می‌کند.
دنیایی که هر کس به حق خود برسد و پاداش و جزای کامل اجرا شود که تجلی عدل الهی است.
■ آیه «اَمْ نَجْعَلُ الَّذِیْنَ اٰمَنُوا و...»، بیانگر ضرورت معاد بر اساس عدل الهی است.

۶۵- پاسخ: گزینه ۳

از کتاب یازدهم چاپ سال ۹۷ که منبع کنکور سراسری ۹۹ می‌باشد، حذف شده است.

۶۶- پاسخ: گزینه ۱

پایان یافتن دوران زندگی انسان‌ها در دنیا زمینه‌ساز مرحله اول قیامت است که اولین واقعه آن، نفخ صور یا همان واقعه سهمگین و ناگهانی است که همه را غافلگیر می‌کند.

۶۷- پاسخ: گزینه ۳

تبرج به معنای افراط در آراستگی یا همان دور شدن از عفاف در آراستگی ظاهری است که مشغولیت به آن موجب دور شدن انسان از اهداف اصلی زندگی و غفلت از خداوند متعال می شود و همچنین انسان را به اموری درگیر می کند که او را از خدا دور می نمایند.

۶۸- پاسخ: گزینه ۴

■ یکی از حیل‌های شیطان برای مقابله با توبه و گرفتار کردن انسان به شقاوت آن است که فرد را به تدریج به گناه می کشاند تا متوجه زشتی و قبح گناه نشود و توبه نکند.

■ تسویف و ایجاد تأخیر در توبه سبب می شود، انسان به گناه عادت کند و میل به توبه در او خاموش شود.

۶۹- پاسخ: گزینه ۴

■ ﴿الْم تَر اِلٰی الَّذِیْنَ یُزَعِمُوْنَ اَنَّهُمْ اٰمَنُوْا بِمَا اَنْزَلَ الْیٰک و مَا اَنْزَلَ مِنْ قَبْلِک یرِیْدُوْنَ اَنْ یَّتَحٰکَمُوْا اِلٰی الطَّاغُوْث و قَدْ اَمَرُوْا اَنْ یَّکْفُرُوْا بِه و یرِیْد الشَّیْطٰن اَنْ یُضِلَّهُمْ ضَلٰلًا بَعِیْدًا﴾

■ با توجه به آیه بالا گمراهی دور و درازی که شیطان می خواهد انسان را در آن گرفتار کند، ارجاع حاکمیت به طاغوت می باشد که «یریدون ان یتحاکموا الی الطّاغوت» افراد گرفتار در آن را نشان می دهد.

۷۰- پاسخ: گزینه ۳

امام صادق (ع) در حدیثی برای تبیین سنت «املاء و استدراج» می فرماید: «... هنگامی که خداوند شر بنده اش [بنده ای که مرتکب گناه شده است] را بخواهد به او نعمت می بخشد تا استغفار را فراموش کند... این همان است که خداوند می فرماید «سنستدرجهم من حیث لا یعلمون»»

۷۱- پاسخ: گزینه ۲

یکی از کارهایی که جوانان قبل از ازدواج باید انجام دهند تقویت و رعایت عفاف می باشد که قرآن کریم در این راستا به آن ها دستور می دهد که دختران و پسران قبل از ازدواج حتما عفاف را رعایت کنند که در این صورت خداوند به بهترین صورت و به نحو احسن زندگی آنان را سامان می دهد.

۷۲- پاسخ: گزینه ۴

در تمدن جدید اروپا مردم به مسیحیت و حاکمیت دین رو آوردند، این مسئله سبب شد عقاید باستانی و کفر آمیز را کنار بگذارند، اما به مرور حاکمیت کلیسا و تحریف تعالیم مسیحیت و اعتقادات نادرست مبلغان مسیحی، موجب انحراف مردم و این تمدن شد.

۷۳- پاسخ: گزینه ۱

یکی از احکام مهم در عرصه اقتصادی یادگیری مسائل شرعی تجارت (فقه) قبل از ورود به بازار کار است. این مطلب لازمه آلوده نشدن به کسب حرام می باشد که امیرالمومنین (ع) در رابطه با آن می گویند: «یا معشر التجار الفقه ثم المتجر، ای گروه بازرگانان و تجار، ابتدا یادگیری مسائل شرعی تجارت و سپس تجارت کردن»

۷۴- پاسخ: گزینه ۴

■ مرجع تقلید باید مشروعیت داشته باشد تا تبعیت از او، از نظر دین بدون اشکال باشد و اگر دارای مشروعیت نباشد، پیروی از او حرام است.

■ مشروعیت یعنی علاوه بر اینکه فرد مرجع است و علم کافی را دارد، عدل، تقوا و زمان شناسی هم داشته باشد.

۷۵- پاسخ: گزینه ۱

کسی که سفر می رود، اگر شرطهای زیر را داشته باشد، باید نمازش را شکسته بخواند و نباید روزه بگیرد:

(الف) رفتن او بیش از ۴ فرسخ شرعی و مجموع رفت و برگشت بیش از ۸ فرسخ باشد. (این مورد در گزینه ۱ وجود ندارد)

(ب) بخواهد کمتر از ده روز در جایی که سفر کرده، بماند، پس کسی که می خواهد ده روز و بیشتر در محلی که سفر کرده است، بماند، باید نمازش را کامل بخواند و روزه هاش را هم بگیرد. ← که فرد مذکور ۵ روز در سفر است.

(ج) برای انجام کار حرام سفر نکرده باشد؛ مثلاً اگر به قصد ستم به مظلوم یا همکاری با یک ظالم در ظلم او سفر کند، باید روزه هایش را بگیرد. اگر فرزند با نهدی پدر و مادر به سفری برود که آن سفر بر او واجب نبوده است، باید نماز را تمام بخواند و روزه هاش را بگیرد.

زبان انگلیسی

۷۶- پاسخ: گزینه ۴

ترجمه: پس از اینکه پایش در تصادف اسکی شکست، او مجبور شد تعطیلات خود را کوتاه کند و به خانه برگردد.

توضیح: در این سؤال چون فعل force یک فعل متعدی است و مفعول آن نیامده است، این سؤال مجهول است؛ لذا گزینه ۴ پاسخ است.

۷۷- پاسخ: گزینه ۳

ترجمه: اگر می دانستم که چگونه شنا کنم برای نجات آن مرد تلاش می کردم.

توضیح: این سؤال شرطی نوع دوم است؛ زیرا جلوی if از زمان گذشته ساده استفاده شده و در جواب باید Modal های could, would, might و had to بیاید؛ لذا گزینه ۳ درست است.

۷۸- پاسخ: گزینه ۱

ترجمه: رئیس عصبانی خواهد شد اگر تو دوباره اینجا را زود ترک کنی، بنابراین تو باید ابتدا اجازه او را بگیری.
توضیح: چون بعد از ۵۰ جمله جدید شروع شده، ابتدا باید فاعل بیاید، پس گزینه ۳ نادرست است و چون زمان جمله حال است و نوعی توصیه در آن دیده می شود، گزینه ۱ درست است.

۷۹- پاسخ: گزینه ۳

ترجمه: صادقانه من نظری ندارم که این تابستان دوست دارم تعطیلات را در کجا بگذرانم.
توضیح: در این سؤال مصدر نیاز است چون می خواهیم به یک هدف اشاره کنیم؛ لذا گزینه ۳ درست است.

۸۰- پاسخ: گزینه ۲

ترجمه: من در حیرتم (نمی دانم) که بدون کمک مهربانانه شما در این کشور غریب چه کار خواهیم کرد.

(۱) فرض کردن (۲) تعجب کردن، در حیرت بودن (۳) ترجیح دادن (۴) متنفر بودن

۸۱- پاسخ: گزینه ۴

ترجمه: او مطلقاً غیرقابل فهم بود هنگامی که به زبانی صحبت می کرد که با آن من اصلاً آشنا نبودم.

(۱) مغرور، مفتخر (۲۲) ماهر (۳) تک زبانه (۴) غیرقابل فهم

۸۲- پاسخ: گزینه ۱

ترجمه: تحصیلاتی که بالاتر از دبیرستان ارائه می شود، به خصوص در یک دانشگاه یا دانشکده از لحاظ فنی تحصیلات عالی (دانشگاهی) نامیده می شود.

(۱) بالاتر، عالی، دانشگاهی (۲) خلاق (۳) پیشرفته (۴) متوسط، میانی

۸۳- پاسخ: گزینه ۴

ترجمه: ما سفر اردویی خود را لغو کردیم چون هواشناسی اعلام کرد که احتمال باران شدید بسیار بالا است.

(۱) تنوع (۲) قدرت، توان (۳) آغاز (۴) احتمال

۸۴- پاسخ: گزینه ۲

ترجمه: جین (Jane) در یادگیری زبان ها ماهر نبود، بنابراین متعجب شدم وقتی فهمیدم که او واقعاً سه زبان خارجی را بسیار روان صحبت می کند.

(۱) به طور گسترده (۲) در واقع، در حقیقت (۳) امیدوارانه (۴) لزوماً

۸۵- پاسخ: گزینه ۳

ترجمه: من بیشتر طرفدار آدم هایی هستم که برای سلامتی بیشتر از پول ارزش قائلند، من اعتقاد دارم سلامتی و شادی رابطه مستقیم دارند.

(۱) آویزان کردن (۲) ترک کردن (۳) ارزش قائل شدن (۴) شناسایی کردن

۸۶- پاسخ: گزینه ۱

ترجمه:

A: تو چگونه تیم (Tim) را تشخیص می دهی؟

B: او گفت که یک لباس قرمز بر تن دارد، مگه نه؟

(۱) شناسایی کردن، تشخیص دادن (۲) یاد انداختن (۳) کشف کردن (۴) انتظار داشتن

۸۷- پاسخ: گزینه ۱

ترجمه: جولی همیشه می گوید که به مدرسه اهدا خواهد کرد و او هرگز این کار را نمی کند، بنابراین من شک دارم که او امسال هم این کار را انجام دهد.

(۱) به عمل کار برآید به سخندانی نیست. (۲) از تو حرکت، از خدا برکت.

(۳) پای خود را اندازه گلیمت دراز کن. (۴) جوجه را آخر پاییز می شمارند.

■ ترجمه Cloze Test ■

در بسیاری از شرکت ها، شاید بهترین راه برای انجام دادن پروژه های جدید مشخص، قرار دادن گروهی از افراد در کنار هم و تشکیل تیم است. داشتن تیمی که به یک پروژه حمله ور می شود مزایای بسیار یا نکات مثبتی ارائه می کند. ابتدا گروهی از افراد، دارای طیف وسیع تری از دانش، تخصص و مهارت نسبت به اعضای گروه واحد دیگر هستند. همچنین به علت تعداد افراد درگیر و منابع بیشتری که موجود است، یک گروه می تواند در پاسخ به پروژه های که باید به اتمام برسانند، سریع تر کار کنند و می توانند راه حل های مبتکرانه تری برای مشکلات و مسائل ارائه کنند.

۸۸- پاسخ: گزینه ۴

توضیح: در این سؤال نیاز به دو عمل موازی داریم که با and امکان پذیر است.

۸۹- پاسخ: گزینه ۱

توضیح: فعل offer یک فعل متعدی است که در این سؤال مفعول آن آمده است؛ لذا سؤال معلوم است و چون فاعل جمله Gerund (اسم مصدر است) فعل باید مفرد باشد.

۹۰- پاسخ: گزینه ۲

توضیح: طیف گسترده‌تر wider range ترکیب بسایر معروف است.

(۱) مورد (۲) طیف، گسترده، میزان (۳) ابزار (۴) عملکرد

۹۱- پاسخ: گزینه ۳

(۱) بخش (۲) مأموریت، عملیات (۳) عضو (۴) مسئولیت

۹۲- پاسخ: گزینه ۳

توضیح: در این سؤال بحث ضمائر موصولی است (جمله‌واره‌های صفتی). گزینه ۱ اشتباه است چون موصول ندارد. گزینه ۴ نیز اشتباه است چون بعد از which نباید they بیاید و بهترین پاسخ، گزینه ۳ می‌باشد.

■ ترجمه درک مطلب ۱:

بافت فرهنگی همچنین می‌تواند در امید به زندگی برای زنان و مردان تأثیرگذار باشد (امید به زندگی طول موردانتظار از زندگی یک فرد است). برای مثال، زنان معمولاً کمتر از مردان سیگار می‌کشند که ثابت شده موجب مشکلات زیادی برای سلامتی می‌شود و عمر را کوتاه می‌کند. عامل دیگری که بر زندگی زنان تأثیر می‌گذارد، فقدان استرس است. استرس در کوتاه کردن عمر شهرت دارد. تا همین اواخر، زنانی که کار می‌کردند در موقعیت‌های استرسی کمتر و دارای مسئولیت کمتر بودند. در خانه، کارهای خانه زنان را در شکل فیزیکی بهتری نسبت به مردان نگه می‌دارد. این شرایط فیزیکی عموماً بهتر کماکان عامل دیگری در طول عمر بیشتر زنان است.

این عوامل فرهنگی نقش مهمی برای زنانی که اکنون در حال پیر شدن هستند، دارند، اما عادات اجتماعی زنان در حال تغییر است. زنان جوان بیشتر از زنانی که عادت به سیگار کشیدن دارند، سیگار می‌کشند. زنان بیشتری اکنون مشغول کارند و دارای موقعیت‌های مسئولیتی بیشتری هستند. این تغییرات می‌تواند به این معنا باشد که بافت فرهنگی دیگر به زنان در زندگی کردن به‌طور سالم‌تر کمک نخواهد کرد. اگرچه زنان به دلیل سایر عوامل کماکان عمر بیشتری نسبت به مردان دارند.

۹۳- پاسخ: گزینه ۳

ترجمه: موضوع پاراگراف بعد عواملی به‌جز عوامل فرهنگی در رابطه با طول عمر بیشتر زنان نسبت به مردان است.

۹۴- پاسخ: گزینه ۴

ترجمه: از متن فهمیده می‌شود که نویسنده سیگار کشیدن را یک عادت مرتبط با فرهنگ می‌داند.

۹۵- پاسخ: گزینه ۱

ترجمه: از متن می‌توان فهمید که مردان می‌توانند شرایط فیزیکی خود را از طریق خانه‌داری بهبود بخشند.

۹۶- پاسخ: گزینه ۲

ترجمه: کدام گزینه درست است؟ تفاوت در میزان امید به زندگی میان زنان و مردان به احتمال بسیار کمتر می‌شود.

■ ترجمه درک مطلب ۲:

به نظر می‌رسد که مزایا یا نقاط مثبت خوانندگان کتاب‌های الکترونیکی یقیناً بیشتر از معایب آن است. آن‌ها وسایل سبک و متحرکی هستند که می‌توانند همه‌جا حمل شوند. داشتن این وسیله در روز تعطیل به ما اجازه می‌دهد تا صدها رمان را با خود ببریم بدون اینکه مجبور شویم برای اضافه‌بار در هواپیما پول بپردازیم. طبیعت الکترونیکی کتاب‌های الکترونیکی به ما بیش از یک کپی چاپ شده از یک کتاب ارائه می‌کند. به ما اجازه می‌دهد در تاریکی مطالعه کنیم (در صورت قطع برق در دسترس هستند). ما می‌توانیم لغات ناآشنا را در یک فرهنگنامه درون ساخته با تنها یک کلیک جست‌وجو کنیم. می‌توانیم یادداشت برداریم و هرگز فراموش نمی‌کنیم که کدام صفحه را مطالعه می‌کردیم. خوانندگان کتاب الکترونیکی آن را به‌خاطر ما می‌آورند. اگر بینایی ما کاهش یابد، می‌توانیم حروف را بزرگ‌تر کنیم. می‌توانیم Jane Eyre را هنگامی که بخواهیم دوباره بخوانیم و این کتاب هرگز بدتر به نظر نمی‌رسد و حتی اگر سلیقه ما در کتاب متعارف نباشد، هیچ‌کس نیازی نیست بدانند، چون دیگران چیزی که ما می‌خوانیم را نمی‌بینند، نه تنها آن، اغلب کتاب‌های الکترونیکی ارزان‌تر از نسخه‌های چاپی آن است و بسیاری از کتاب‌های قدیمی‌تر می‌توانند به‌صورت رایگان دانلود شوند.

بنابراین چرا تنها یک نفر از سه نفر ما کتاب الکترونیک می‌خواند؟ پاسخ باید این باشد که چیز ویژه‌ای در رابطه با ظاهر، احساس و حتی شاید بوی کتاب‌های چاپی است. کتاب‌های حقیقی اشیایی هستند که دارای گذشته هستند و حضور فیزیکی آن‌ها ما را با خاطرات شیرین احاطه می‌کند.

۹۷- پاسخ: گزینه ۱

ترجمه: به نظر می‌رسد که نویسنده باور دارد که کتاب‌های چاپ‌شده در دسترس هستند و باقی می‌مانند.

۹۸- پاسخ: گزینه ۴

ترجمه: پاراگراف ۲ عمدتاً به مزایای کتاب‌های الکترونیکی اشاره می‌کند.

۹۹- پاسخ: گزینه ۲

ترجمه: نام Jane Eyre در پاراگراف ۲ به احتمال زیاد عنوان یک کتاب است.

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۲

ترجمه: کلمه «که» در پاراگراف ۲ به صفحه‌ای که می‌خوانیم اشاره می‌کند.

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد اگر و فقط اگر $b^2 - 4ac > 0$

نکته ۲: در تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ در حالتی که دو ریشه حقیقی متمایز دارد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$P(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow \text{ریشه‌ها} = \{x_1, x_2\} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline P(x) & \begin{array}{c} \text{موافق علامت } a \\ \phi \end{array} & \begin{array}{c} \text{مخالف علامت } a \\ \phi \end{array} \end{array}$$

نکته ۳: ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در حالت $\Delta > 0$ برابر است با:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \Delta = b^2 - 4ac$$

نکته ۴: با تقسیم طرفین نامعادله در عددی منفی، جهت نامعادله، عوض می‌شود.

در معادله $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ با توجه به نکته ۱، داریم:

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m-1)(m-2) > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m^2 - 5m + 2) > 0 \Rightarrow 36 - 8m^2 + 20m - 8 > 0$$

$$\Rightarrow -8m^2 + 20m + 28 > 0 \xrightarrow{\div (-4)} 2m^2 - 5m - 7 < 0$$

اینک برای یافتن جواب نامعادله، با توجه به نکته ۲، عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$$2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow{\text{نکته ۳}} m = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{5 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{7}{2} \\ m = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & -1 & \frac{7}{2} \\ \hline 2m^2 - 5m - 7 & + & - \end{array}$$

و از آنجایی که می‌خواهیم عبارت کوچکتر از صفر باشد، پس باید $-1 < m < \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ باشد و گزینه ۳ پاسخ است.

تذکر: این سؤال، دو ایراد اساسی دارد: اول اینکه باید ذکر می‌شد معادله دارای دو ریشه حقیقی «تمایز» است، زیرا بدون بیان لفظ «تمایز»،

جواب درست تست $-1 \leq m \leq 3\frac{1}{2}$ است و دوم اینکه معادله به ازای $m = \frac{1}{4}$ تبدیل به یک معادله درجه اول می‌شود و قطعاً $\frac{1}{4}$ نباید در

جواب موجود باشد، حال آنکه $\frac{1}{4}$ در بازه $(-1, 3\frac{1}{2})$ قرار دارد. بنابراین در مجموع، تست به نوعی «غلط» است.

۱۰۴- پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱: برای مربع کامل کردن سه جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$:

(الف) در دو جمله اول، از a فاکتور می‌گیریم: $a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$

(ب) مربع نصف ضریب x را داخل پرانتز، اضافه و کم می‌کنیم: $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c$

(پ) به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، عبارت را مربع کامل می‌کنیم: $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

نکته ۲: اگر تابع $y = f(x)$ مفروض باشد: ($a > 0$)

(الف) برای رسم نمودار تابع $f(x+a)$ ، به اندازه a واحد روی محور x ها به سمت چپ می‌رویم.

(ب) برای رسم نمودار تابع $f(x-a)$ ، به اندازه a واحد روی محور x ها به سمت راست می‌رویم.

(پ) برای رسم نمودار تابع $f(x) + a$ ، به اندازه a واحد روی محور y ها به سمت بالا می‌رویم.

(ت) برای رسم نمودار تابع $f(x) - a$ ، به اندازه a واحد روی محور y ها به سمت پایین می‌رویم.

نکته ۳: در تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ در حالتی که دو ریشه حقیقی متمایز دارد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$P(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow \text{ریشه‌ها} = \{x_1, x_2\} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline P(x) & \begin{array}{c} \text{موافق علامت } a \\ \phi \end{array} & \begin{array}{c} \text{مخالف علامت } a \\ \phi \end{array} \end{array}$$

نکته ۴: تجزیه به روش اتحاد جمله مشترک $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

با توجه به نکته ۱، ابتدا تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را مربع کامل می‌کنیم:

$$y = -(x^2 - 2x) + 5 = -(x^2 - 2x + 1 - 1) + 5 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 5 \Rightarrow y = -(x-1)^2 + 6$$

اینک با توجه به نکته ۲، با انتقال نمودار به طرف x ‌های مثبت به اندازه ۳ واحد و به طرف y ‌های منفی به اندازه ۲ واحد، ضابطه تابع به صورت زیر می‌شود:

$$y = -(x-1-3)^2 + 6 - 2 = -(x-4)^2 + 4 = -(x^2 - 8x + 16) + 4 = -x^2 + 8x - 16 + 4 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

حال مطابق با اطلاعات مسئله، می‌خواهیم نمودار تابع، بالای خط $y = x$ قرار گیرد، پس داریم:

$$-x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 < 0$$

و به کمک نکته ۳، عبارت $x^2 - 7x + 12$ را تعیین علامت می‌کنیم تا جواب به دست آید:

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \xrightarrow{\text{نکته ۴}} (x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & 3 & 4 \\ \hline x^2 - 7x + 12 & + & - \end{array}$$

و از روی جدول، واضح است که جواب نامعادله، بازه $(3, 4)$ است. بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۲

نکته: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی، با جمله اول a_1 و جمله آخر a_n برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

اولین عدد دورقمی مضرب ۷ عدد $14 \times 7 = 98$ و آخرین عدد دورقمی مضرب ۷ عدد $98 \times 7 = 686$ است، پس قرار است مجموع $98 + 196 + \dots + 686$ را محاسبه کنیم که تعداد جملات آن ۱۳ تا است.

$$S_{13} = \frac{13}{2}(14 + 686) = \frac{13}{2} \times 700 = 13 \times 350 = 4550$$

با توجه به نکته، داریم:

۱۰۶- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: برای حل معادلات گویا، با ضرب طرفین معادله در ک.م.م مخرج‌ها و ساده کردن عبارت جبری، معادله را حل می‌کنیم. در پایان، جواب‌هایی قابل قبولند که مخرج هیچ یک از کسرهای صفر نکنند.

نکته ۲: تجزیه به روش اتحاد جمله مشترک $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

فرض می‌کنیم زمانی که بهروز برای تایپ مجله صرف می‌کند، x ساعت باشد که در این صورت زمان مصرفی توسط فرهاد، برابر $x+9$ ساعت

خواهد بود، پس بهروز در یک ساعت، $\frac{1}{x}$ کار و فرهاد در یک ساعت، $\frac{1}{x+9}$ کار و هر دو با هم، $\frac{1}{20}$ کار را انجام می‌دهند و داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{20}$$

اینک با توجه به نکته ۱، به حل معادله می‌پردازیم، پس طرفین معادله را در $20x(x+9)$ ضرب می‌کنیم:

$$20(x+9) + 20x = x(x+9) \Rightarrow 20x + 180 + 20x = x^2 + 9x \Rightarrow x^2 - 31x - 180 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{نکته ۲}} (x+5)(x-36) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 & \text{غق} \\ x = 36 & \checkmark \end{cases}$$

پس بهروز به تنهایی در ۳۶ ساعت، کل مجله را تایپ می‌کند و گزینه ۴ پاسخ است.

۱۰۷- پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱: اگر تابع f به صورت زوج مرتب باشد، برای تعیین تابع f^{-1} کفایست در هر زوج مرتب، جای مؤلفه‌های اول و دوم را عوض کنیم.

$$\text{نکته ۲: } \begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) \\ D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \end{cases}$$

$$\text{نکته ۳: } \begin{cases} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \\ D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \end{cases}$$

با توجه به نکات ۱ و ۲، ابتدا تابع $g \circ f^{-1}$ را تعیین می‌کنیم:

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}, \quad f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

$$g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

$$\frac{g}{g \circ f^{-1}} = \left\{ \left(4, \frac{2}{1}\right), \left(5, \frac{6}{3}\right) \right\} = \{(4, 2), (5, 2)\}$$

اینک با توجه به نکته ۳، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ را تعیین می‌کنیم:

۱۰۸- پاسخ: گزینه ۴

نکته:

(۱) نقاط تلاقی دو تابع از حل دستگاهی شامل ضابطه دو تابع به دست می آید.

(۲) نقاط تلاقی دو تابع در ضابطه هر دو تابع، صدق می کنند.

با توجه به نکته، واضح است که نقاط به طول ۱ و ۲ در هر دو ضابطه صدق کنند، پس با جای گذاری در تابع $y = x^2 - x$ ، مقادیر عرض های دو نقطه را به دست می آوریم:

$$x=1 \Rightarrow y=1^2-1=0 \Rightarrow A(1,0)$$

$$x=2 \Rightarrow y=2^2-2=2 \Rightarrow B(2,2)$$

و اینک مختصات نقاط A و B در تابع $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$ صدق می کند، پس داریم:

$$A(1,0): 0 = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 2 \Rightarrow 2^{-A-B} = 2^1 \Rightarrow -A-B=1 \Rightarrow A+B=-1 \quad (1)$$

$$B(2,2): 2 = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 4 \Rightarrow 2^{-2A-B} = 2^2 \Rightarrow -2A-B=2 \Rightarrow 2A+B=-2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \xrightarrow{\text{پس از حل دستگاه}} \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع f به صورت $f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = -2 + 2^x = 2^x - 2$ خواهد بود و $f(3) = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ برابر است با:

۱۰۹- پاسخ: گزینه ۲

$$\text{نکته ۱: } \begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \end{cases}$$

نکته ۲: در توابع تانژانت و کتانژانت، مضارب صحیح π همواره حذف می شوند.

نکته ۳: در توابع سینوس و کسینوس، مضارب صحیح و زوج π همواره حذف می شوند، اما مضارب صحیح و فرد π پس از حذف، نسبت را قرینه می کنند.

با توجه به نکات، داریم:

$$\tan \frac{11\pi}{4} = \tan \frac{12\pi - \pi}{4} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{نکته ۲}} \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{نکته ۱}} -\tan \frac{\pi}{4} = -1 \quad (1)$$

$$\sin \frac{15\pi}{4} = \sin \frac{16\pi - \pi}{4} = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{نکته ۳}} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{نکته ۱}} -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\cos \frac{13\pi}{4} = \cos \frac{12\pi + \pi}{4} = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{نکته ۳}} -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

و با جای گذاری (۱)، (۲) و (۳) در عبارت صورت سؤال، خواهیم داشت:

$$\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4} = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۱۱۰- پاسخ: گزینه ۳

$$\text{نکته ۱: } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

نکته ۲: مشتق تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول a با حد زیر تعریف می شود:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\text{نکته ۳: } f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

با توجه به نکته ۱، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin(a+x)}^{\sin(a)\cos x + \cos a \sin x} - \sin a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin a}{x}$$

حال اگر تغییر متغیر $x = h$ را انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$$

که با توجه به نکته ۲، عبارت اخیر، مشتق تابع سینوس در نقطه ای به طول a است، یعنی: $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x \xrightarrow{x=a} f'(a) = \cos a$$

پس با توجه به نکته ۳، خواهیم داشت:

۱۱۱- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: تابع f در مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) پیوسته است هرگاه در تمام نقاط بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته باشد.

نکته ۲: تابع f را در $x = a$ پیوسته گوئیم هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

نکته ۳: برای محاسبه حد توابع رادیکالی فرجه زوج که به صورت $\frac{0}{0}$ می شوند، دو روش وجود دارد:

روش اول: صورت و مخرج تابع را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنیم.

روش دوم: از قاعده هوییتال استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \\ f(x) = kx \Rightarrow f'(x) = k \\ f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array} \right. \quad \text{نکته ۴: } ((u \text{ تابعی از } x \text{ است}))$$

با توجه به نکته ۱، تابع f باید در $x = 2$ پیوسته باشد، پس حد چپ و راست و مقدار تابع را در ۲ حساب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 = f(2) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} \quad \text{نکته ۳ روش اول} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(4)}{x^2 - x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{12(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{12}{x+1} = \frac{12}{3} = 4 \quad (2) \end{aligned}$$

سپس با توجه به نکته ۲ و استفاده از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$2a - 1 = 4 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = 5/2$$

البته می توانستیم حد $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}}$ را با توجه به روش دوم نکته ۳ (قاعده هوییتال) و استفاده از فرمول های مشتق در نکته ۴ نیز به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2\sqrt{4}}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

۱۱۲- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

نکته ۲: در توابع مثلثاتی $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ، دوره تناوب و مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع عبارتند از:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{2\pi}{|b|} \\ \text{Min} = c - |a| \\ \text{Max} = c + |a| \end{array} \right.$$

نکته ۳: فاصله بین هر دو قله (ماکزیمم) یا هر دو دره (مینیمم) در توابع سینوس و کسینوس، یک دوره تناوب (T) محسوب می شود.

ابتدا با توجه به نکته ۱، تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$y = 1 + a(2 \sin bx \cos bx) \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$$

از روی نمودار واضح است که مینیمم تابع $\frac{1}{2}$ و ماکزیمم تابع $\frac{3}{2}$ است، پس با توجه به نکته ۲، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{|a|}{2} = \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{|a|}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right. \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \quad (1)$$

همچنین با توجه به نکته ۳، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

پس با توجه به نکته ۲، داریم:

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \quad (2)$$

اینک با توجه به اینکه تابع در $x = 0$ روبه بالا حرکت می کند، پس حالت مثبت سینوس است یعنی a و b باید هم علامت باشند، پس به کمک روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a = 1, b = 1 \Rightarrow a + b = 2 \\ a = -1, b = -1 \Rightarrow a + b = -2 \end{cases}$$

که عدد ۲ در گزینه ۳ موجود است و گزینه ۳ پاسخ است.

۱۱۳- پاسخ: گزینه ۱

۱ نکته: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

۲ نکته: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

۳ نکته: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

۴ نکته: $\forall x \in \mathbb{R}; -1 \leq \sin x \leq 1$

۵ نکته: $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

ابتدا با توجه به نکات ۱، ۲ و ۳، معادله را تا حد امکان ساده می کنیم:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\Rightarrow (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2} (2 \sin x \cos x)\right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) - \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2 \xrightarrow{\text{نکته ۳}} \text{غیرممکن} \\ \sin x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 1 \end{cases}$$

اینک طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم:

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

و جواب های معادله را در بازه $[0, 2\pi]$ با قراردادن اعداد صحیح به جای k ، به دست می آوریم، اما باید دقت کنیم که چون جواب عمومی

$x = \frac{k\pi}{2}$ از به توان دو رساندن معادله به دست آمده است، ممکن است به معادله جواب های غیرقابل قبولی اضافه شده باشد، پس هر جوابی را

که به دست می آوریم در معادله چک می کنیم:

$k = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \checkmark$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark$

$k = 2 \Rightarrow x = \pi \quad \times$ در معادله صدق نمی کند.

$k = 3 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \quad \times$ در معادله صدق نمی کند.

$k = 4 \Rightarrow x = 2\pi \quad \checkmark$

پس جواب های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $\left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$ که مجموع آن ها برابر است با:

$$0 + \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

۱۱۴- پاسخ: گزینه ۲

نکته: حد عدد بر صفر، حدی برابر با بی‌نهایت است که علامت بی‌نهایت با توجه به علامت عدد و علامت صفر حدی تعیین می‌شود.

از آنجایی که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{x^2+ax+b} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x^2+ax+b}$ برابر $-\infty$ شده است و صورت کسر، عددی منفی است، پس با توجه به نکته، مخرج

کسر باید صفر حدی مثبت باشد و چون مخرج کسر، یک سه‌جمله‌ای درجه دوم است، پس برای مثبت بودن باید به صورت مربع کاملی باشد که ریشه‌اش برابر ۲ است، یعنی: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ و اینک با متحد قرار دادن دو عبارت $x^2 - 4x + 4$ و $x^2 + ax + b$ ، خواهیم

داشت: $a+b=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=4 \end{cases}$ و گزینه ۲ پاسخ است.

۱۱۵- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: مشتق تابع $f(x)$ در نقطه به طول a به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\begin{cases} f(x) = kx \Rightarrow f'(x) = k \\ f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

نکته ۳: $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$

ابتدا با توجه به نکته ۱، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3} \quad (*)$$

سپس با توجه به نکته ۲، مشتق تابع g به صورت زیر است:

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

و اینک با توجه به نکته ۳، داریم:

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \times f'(g(1)) \quad (**)$$

پس باید $g'(1)$ و $g(1)$ را حساب کنیم و داریم:

$$g(1) = 1 + \sqrt{1} = 2$$

$$g'(1) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

با جای‌گذاری $g(1)$ و $g'(1)$ در رابطه $(**)$ ، خواهیم داشت:

$$(f \circ g)'(1) = \frac{3}{2} \times f'(2) \stackrel{(*)}{=} \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

۱۱۶- پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱: تابع f در نقطه به طول a مشتق‌پذیر است هرگاه:

(۱) در a پیوسته باشد. (حد چپ در a حد راست در a مقدار تابع در a)

(۲) مشتق چپ و راست در a موجود و با هم برابر باشد.

$$\begin{cases} f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \\ f(x) = kx \Rightarrow f'(x) = k \\ f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \end{cases}$$

با توجه به نکته ۱، در ابتدا تابع باید در $x=2$ پیوسته باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} |x^2 - 2x| = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{2}x^2 + ax + b \right) \Rightarrow 0 = 2 + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -2 \quad (1)$$

و سپس مشتق چپ و راست تابع در $x=2$ باید موجود و با هم برابر باشد، پس خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} x < 2: f(x) = |x^2 - 2x| = |x||x-2| = -x(x-2) = -x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(2^-) = -2 \\ x \geq 2: f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax + b \Rightarrow f'(x) = x + a \Rightarrow f'(2^+) = 2 + a \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 = 2 + a \Rightarrow a = -4$$

و با جای‌گذاری $a = -4$ در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$2a + b = -2 \xrightarrow{a=-4} -8 + b = -2 \Rightarrow b = 6$$

و در نهایت داریم: $a+b = -4+6 = 2$ ، بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۱۷- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

نکته ۲: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول x_0 برابر است با $f'(x_0)$

$$\begin{cases} y = f(x)g(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \\ f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \\ f(x) = kx \Rightarrow f'(x) = k \\ y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad ((u \text{ تابعی از } x \text{ است})) \end{cases}$$

نکته ۳:

ابتدا با توجه به نکته ۱، آهنگ تغییر متوسط تابع را در بازه $[0, 2]$ حساب می‌کنیم:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{(2+2)\sqrt{4(2)+1} - (0+2)\sqrt{4(0)+1}}{2} = \frac{12-2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad (1)$$

سپس با توجه به نکات ۲ و ۳، آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در $x = 2$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)\sqrt{4x+1} \\ f'(x) &= 1 \times \sqrt{4x+1} + \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2) = \sqrt{4x+1} + \frac{2(x+2)}{\sqrt{4x+1}} \\ f'\left(\frac{3}{4}\right) &= \sqrt{4\left(\frac{3}{4}\right)+1} + \frac{2\left(\frac{3}{4}+2\right)}{\sqrt{4\left(\frac{3}{4}\right)+1}} = 2 + \frac{11}{2} = 2 + \frac{11}{2} = \frac{15}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

اینک مقدار اختلاف اعداد (۱) و (۲) برابر است با:

$$5 - \frac{15}{2} = \frac{10}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{5}{2}$$

۱۱۸- پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱: مختصات نقطه اکسترمم در ضابطه تابع و طول نقطه اکسترمم در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند.

نکته ۲: طول نقطه‌ای که تابع در آن مماس افقی دارد، در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند.

نکته ۳: مختصات نقطه عطف در ضابطه تابع و طول نقطه عطف در معادله $f''(x) = 0$ صدق می‌کند.

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

با توجه به نمودار تابع، نقطه $(0, 0)$ اکسترمم تابع است، پس با توجه به نکته ۱ مقدار $x = 0$ در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند و داریم:

$$f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

همچنین تابع در $x = 1$ مماس افقی دارد، پس با توجه به نکته ۲، داریم:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 12 + 3a + 2b = 0 \Rightarrow 3a + 2b = -12 \quad (1)$$

و در نهایت اینکه، تابع در $x = 1$ نقطه عطف دارد، پس با توجه به نکته ۳، داریم:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 36x^2 + 6ax + 2b \\ f''(1) &= 0 \Rightarrow 36 + 6a + 2b = 0 \Rightarrow 6a + 2b = -36 \Rightarrow 3a + b = -18 \quad (2) \end{aligned}$$

با حل دستگاه روابط (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 3a + 2b = -12 \\ 3a + b = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = -8 \end{cases}$$

۱۱۹- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: در توابع کسری، مجانب قائم تابع، ریشه مخرج است به شرطی که در دامنه موجود بوده و ریشه صورت نباشد.

نکته ۲: طول اکسترمم‌های تابع از حل معادله $f'(x) = 0$ به دست می‌آیند.

نکته ۳: با رسم جدول تغییرات تابع و تعیین علامت مشتق، نوع اکسترمم‌های تابع (مینیمم یا ماکزیمم) را می‌توان تشخیص داد.

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

نکته ۴:

ابتدا با توجه به نکته ۱، مجانب قائم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2} : (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad \text{مجانب قائم}$$

سپس با توجه به نکته ۲، طول اکسترمم‌های تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow 2(x-1)[(x+1)(x-1) - (x^2+2x)] = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-1)(x^2-1-x^2-2x) = 0 \Rightarrow 2(x-1)(-2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ -2x-1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

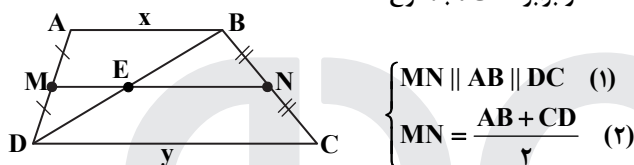
اینک برای تعیین اینکه کدام یک مینیمم تابع است، با توجه به نکته ۳، جدول تغییرات تابع را رسم کرده و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x		$-\frac{1}{2}$		1	
y'		-	+	-	
y		↘	↗	↘	
		Min		Max	

پس $x = -\frac{1}{2}$ طول نقطه مینیمم تابع است که فاصله‌اش تا خط مجانب تابع یعنی $x = 1$ برابر $\frac{3}{2} = 1 - (-\frac{1}{2})$ است.

۱۲۰- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: خطی که وسط دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی دو قاعده و برابر نصف مجموع اندازه‌های دو قاعده است.



$$\begin{cases} MN \parallel AB \parallel DC & (1) \\ MN = \frac{AB + DC}{2} & (2) \end{cases}$$

اثبات (۱):

$$\left. \begin{aligned} \frac{AM}{MD} = 1 \\ \frac{BN}{NC} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \xrightarrow[\text{در دوزنقه}]{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel AB \parallel DC \quad \checkmark$$

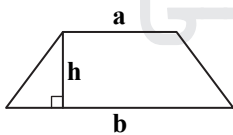
اثبات (۲): قطر BD را رسم می‌کنیم تا MN را در E قطع کند. اگر فرض کنیم، $AB = x$ و $DC = y$ ، به کمک تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\triangle DAB: \frac{DM}{DA} = \frac{ME}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ME}{x} \Rightarrow ME = \frac{1}{2}x$$

$$\triangle BDC: \frac{BN}{BC} = \frac{EN}{DC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{EN}{y} \Rightarrow EN = \frac{1}{2}y$$

$$MN = ME + EN = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \Rightarrow MN = \frac{x+y}{2} \quad \checkmark$$

نکته ۲: مساحت دوزنقه برابر است با نصف مجموع اندازه‌های دو قاعده ضربدر ارتفاع.



$$S = \frac{a+b}{2} \times h$$

اگر فرض کنیم $AB = x$ و $CD = y$ با توجه به نکته ۱، خواهیم داشت: $MN = \frac{x+y}{2}$

همچنین با توجه به شکل، واضح است که $BH = HH' = h$ ، پس مساحت دوزنقه‌ها را با توجه به نکته ۲، می‌نویسیم:

$$S_{ABNM} = \frac{1}{2}h(x + \frac{x+y}{2}) = \frac{1}{4}h(3x+y)$$

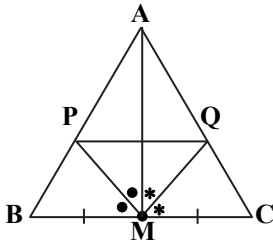
$$S_{MNCD} = \frac{1}{2}h(\frac{x+y}{2} + y) = \frac{1}{4}h(x+3y)$$

طبق فرض می‌دانیم $\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{3}{5}$ ، پس داریم:

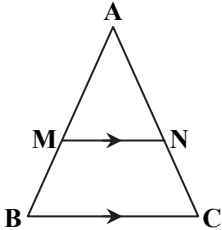
$$\frac{\frac{1}{4}h(3x+y)}{\frac{1}{4}h(x+3y)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3x+y}{x+3y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 15x+5y=3x+9y \Rightarrow 12x=4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{3}$$

۱۲۱- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: «تمرین کتاب هندسه ۲ فصل ۳ درس ۳»: اگر در مثلث ABC ، M وسط BC بوده و MP و MQ نیمسازهای زوایای \widehat{AMB} و \widehat{AMC} باشند، آنگاه $PQ \parallel BC$ است.



نکته ۲: «قضیه تالس و تعمیم تالس در مثلث»

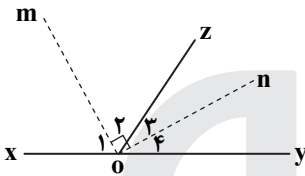


$$MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \end{cases}$$

نکته ۳: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

نکته ۴: نیمسازهای دو زاویه مجاور و مکمل بر هم عمودند.

اثبات:

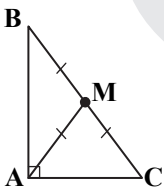


$$\widehat{xOz} + \widehat{yOz} = 180^\circ$$

$$\frac{\widehat{xOz}}{2} + \frac{\widehat{yOz}}{2} = 90^\circ$$

$$0_2 + 0_3 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{mOn} = 90^\circ$$

نکته ۵: در هر مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

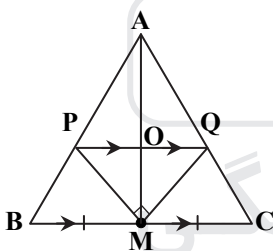


$$AM = BM = CM$$

با توجه به نکته ۱ و به کمک شکل روبه‌رو، داریم: $PQ \parallel BC$

پس با توجه به نکته ۲ در مثلث ABC ، داریم: (*) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$

همچنین با توجه به نکته ۲ و به کمک تعمیم تالس در مثلث‌های ABM و ACM داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \frac{AP}{AB} = \frac{PO}{BM} \\ \frac{AQ}{AC} = \frac{OQ}{CM} \end{array} \right\} \xrightarrow{(*)} \frac{PO}{BM} = \frac{OQ}{CM} \xrightarrow{\text{نکته ۳}} \frac{PO}{OQ} = \frac{BM}{CM} = 1 \Rightarrow PO = OQ$$

از طرفی با توجه به نکته ۴، می‌دانیم:

$$\widehat{PMQ} = 90^\circ$$

حال دقت کنید که در مثلث قائم الزاویه MPQ ($M = 90^\circ$)، پاره خط MO میانه است، پس با توجه به نکته ۵، خواهیم داشت:

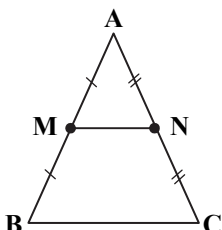
$$MO = \frac{PQ}{2} \Rightarrow MO = OP = OQ$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۲۲- پاسخ: گزینه ۱

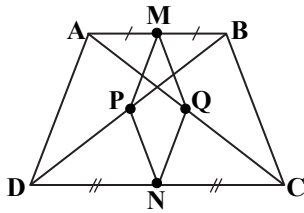
نکته ۱: لوزی چهارضلعی است که اضلاعش با هم برابرند.

نکته ۲: خطی که وسط دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و نصف ضلع سوم است.



$$MN \parallel \frac{1}{2} BC$$

مطابق شکل روبه‌رو، نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و DC و نقاط P و Q به ترتیب وسط قطرهای BD و AC هستند. با توجه به نکات ۱ و ۲، داریم:

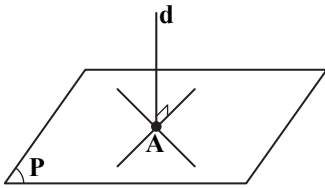


$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : MQ = \frac{1}{2} BC \\ \triangle BAD : MP = \frac{1}{2} AD \\ \text{نکته ۱: } MQ = MP \end{array} \right\} \Rightarrow BC = AD$$

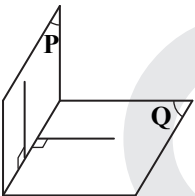
یعنی دو ضلع غیرمجاور دیگر در این چهارضلعی با هم برابرند و گزینه ۱ پاسخ است.

۱۲۳- پاسخ: گزینه ۴

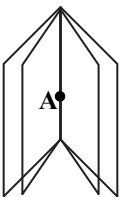
نکته ۱: خط d بر صفحه P عمود است اگر آن را قطع کند و بر هر خطی که از نقطه تقاطع می‌گذرد، عمود باشد.



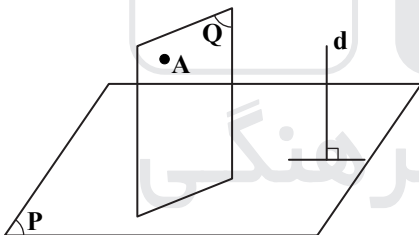
نکته ۲: دو صفحه را بر هم عمود گوئیم هرگاه در هریک خطی باشد که بر دیگری عمود است.



نکته ۳: از یک نقطه خارج یک خط، بیشمار صفحه می‌توان به موازات خط مفروض، رسم کرد.



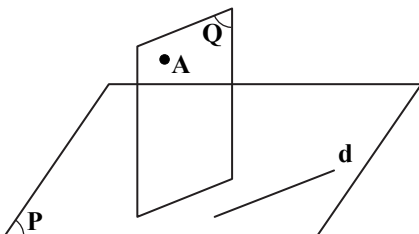
نکته ۴: اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، هر صفحه که از نقطه‌ای خارج خط به موازات آن رسم می‌شود، بر صفحه مفروض، عمود است.



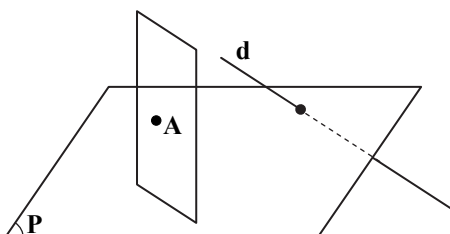
$$\left. \begin{array}{l} d \perp P \\ Q \parallel d \\ A \in Q \end{array} \right\} \Rightarrow Q \perp P$$

با توجه به نکات ۱ و ۲، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

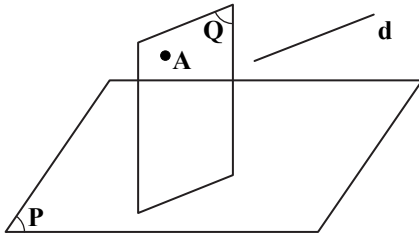
گزینه ۱: اگر $d \cap P = d$ یعنی خطی d داخل صفحه P قرار دارد که در این صورت، فقط یک صفحه شامل A وجود خواهد داشت که بر P عمود است و با d موازی است.



گزینه ۲: اگر $d \cap P \neq \emptyset$ دو حالت وجود دارد: یا صفحه P شامل خط d است که مطابق گزینه ۱ فقط یک جواب داریم یا خط d صفحه P را در یک نقطه قطع می‌کند که ممکن است یک جواب داشته باشیم یا اصلاً جواب نداشته باشیم.



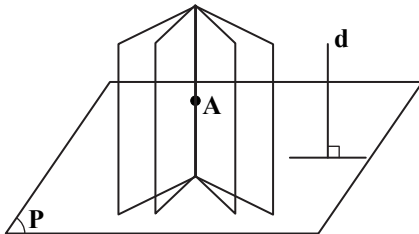
گزینه ۳: اگر $d \parallel P$ باشد، فقط یک صفحه وجود دارد که از نقطه A عمود بر P رسم می‌شود.



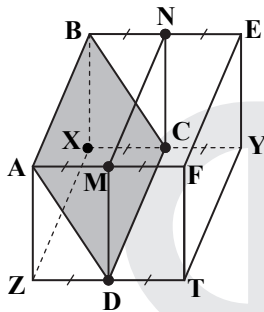
گزینه ۴: اگر $d \perp P$ باشد، آنگاه با توجه به نکته ۳، می‌توان بیشمار صفحه از نقطه A به موازات d رسم کرد که با توجه به نکته ۴، همه این صفحات بر صفحه P عمودند؛ زیرا:

$$d \perp P \xrightarrow{\forall Q \parallel d} Q \perp P$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

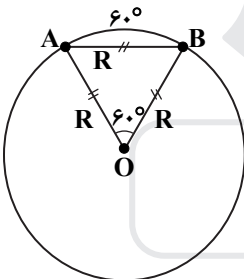


۱۲۴- پاسخ: گزینه ۲

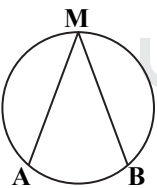


مطابق شکل، صفحه $ABCD$ ، شامل یال AB بوده و یال‌های XY و ZT را در نقاط C و D وسط آن‌ها، قطع می‌کند. حال اگر صفحه $MNCD$ گذرا بر وسط یال‌های BE و AF و نقاط C و D را رسم کنیم، مکعب به دو حجم برابر تقسیم می‌شود. از طرفی صفحه $ABCD$ نیز نیمی از مکعب را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده است، پس حجم‌های حاصل از صفحه $ABCD$ به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ حجم کل مکعب هستند. بنابراین نسبت آن‌ها $\frac{1}{3}$ است.

۱۲۵- پاسخ: گزینه ۴



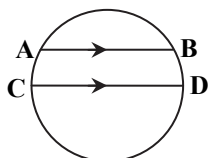
نکته ۱: در هر دایره، کمان متناظر با هر وتر برابر با شعاع دایره، 60° درجه است.



$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

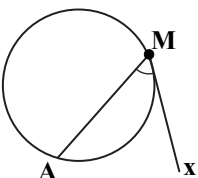
نکته ۲: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف کمان روبه‌روی آن:

نکته ۳: در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی، مساویند.



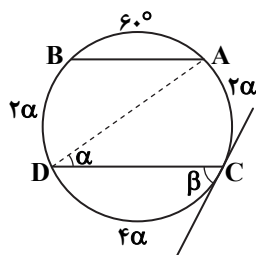
$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

نکته ۴: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌روی آن:



$$\widehat{AMx} = \frac{\widehat{AM}}{2}$$

نکته ۵: مجموع کمان‌های روی یک دایره، برابر با 360° درجه است.



$$\widehat{AC} = 2\alpha \xrightarrow{\text{نکته ۳}} \widehat{BD} = 2\alpha$$

$$\widehat{DC} = 2\beta \xrightarrow{\beta=2\alpha} \widehat{DC} = 4\alpha$$

با توجه به نکته ۱، داریم: $\widehat{AB} = 60^\circ$

همچنین با توجه به نکات ۲ و ۳، داریم:

همچنین با توجه به نکته ۴، داریم:

و در نهایت با توجه به نکته ۵، خواهیم داشت:

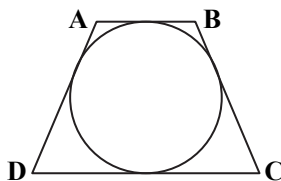
$$\widehat{AB} + \widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{CA} = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + 2\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 360^\circ \Rightarrow 8\alpha = 300^\circ \Rightarrow \alpha = 37.5^\circ$$

پس اندازه کمان \widehat{BD} برابر است با:

$$\widehat{BD} = 2\alpha = 75^\circ$$

۱۲۶- پاسخ: گزینه ۴

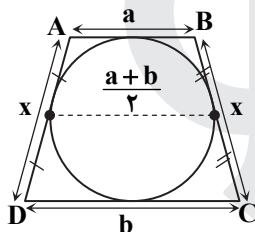
نکته ۱: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشد.



$$AB + DC = AD + BC$$

نکته ۲: خطی که وسط دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند، موازی دو قاعده و برابر نصف مجموع اندازه‌های دو قاعده است.

با توجه به نکته ۱، برای آنکه دوزنقه متساوی‌الساقین ABCD مطابق شکل، محیطی باشد، باید:

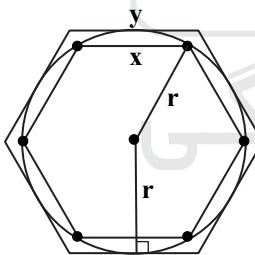


$$AB + DC = AD + BC \Rightarrow a + b = x + x \Rightarrow 2x = a + b \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

و این یعنی با توجه به نکته ۲، اندازه ساق دوزنقه بایستی با اندازه پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند، برابر باشد.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۲۷- پاسخ: گزینه ۳



نکته ۱: اندازه ضلع n ضلعی منتظم محاط در یک دایره به شعاع r برابر است با: $2r \sin \frac{180^\circ}{n}$

نکته ۲: اندازه ضلع n ضلعی منتظم محیط بر یک دایره به شعاع r برابر است با: $2r \tan \frac{180^\circ}{n}$

نکته ۳: مساحت هر شش ضلعی منتظم به طول ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

با توجه به نکته ۱، اگر طول ضلع ۶ ضلعی محیطی را برابر x در نظر بگیریم، داریم:

$$x = 2r \sin \frac{180^\circ}{6} = 2r \sin 30^\circ = 2r \times \frac{1}{2} = r$$

و با توجه به نکته ۳، داریم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \quad (*)$$

همچنین با توجه به نکته ۲، اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم محیط بر دایره را برابر y در نظر بگیریم، داریم:

$$y = 2r \tan \frac{180^\circ}{6} \stackrel{(*)}{=} 2 \times 2 \tan 30^\circ = 4 \times \tan 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

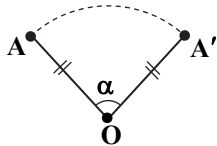
و در نهایت، مساحت شش ضلعی منتظم محیط بر دایره برابر است با:

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{4} y^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16 \times 3}{9} = 4\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۲۸- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر نقطه A' تصویر نقطه A باشد، داریم:

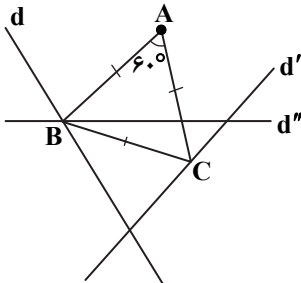


$$\begin{cases} 1) OA = OA' \\ 2) \angle AOA' = \alpha \end{cases}$$

نکته ۲: دوران یک تبدیل طولپاست؛ یعنی فاصله بین نقاط (اندازه پاره خط) را حفظ می کند. مطابق شکل و با توجه به نکته ۱، ابتدا خط d' را به مرکز A و زاویه 60° دوران می دهیم تا خط d'' حاصل شود. آنگاه نقطه تلاقی d'' و d را B می نامیم. از آنجایی که d' و d'' دوران یافته هم به مرکز A و زاویه 60° هستند، پس دوران یافته هر نقطه روی خط d'' به مرکز A و زاویه 60° در خلاف جهت دوران قبلی، قطعاً روی خط d' می افتد، پس اگر نقطه B را به مرکز A و زاویه 60° در خلاف جهت دوران اولیه، دوران دهیم، نقطه تصویر روی d' قرار می گیرد. این نقطه را C می نامیم. مثلث ABC متساوی الاضلاع است؛ زیرا با توجه به

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ \\ AB = AC = BC \end{cases}$$

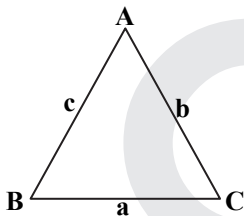
نکته ۲، دوران طولپاست و چون $A = 60^\circ$ ، پس



بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۲۹- پاسخ: گزینه ۱

نکته (قضیه کسینوس ها): در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع، برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه های آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن دو ضلع:



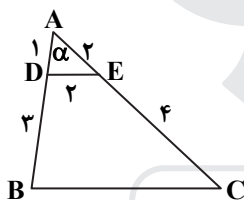
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{A} \end{cases}$$

ابتدا با توجه به نکته، در مثلث ADE، مقدار کسینوس زاویه α را حساب می کنیم:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cdot \cos \alpha \Rightarrow 4 = 1 - 4 \times 2 \times 1 \times 2 \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 4 \cos \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4} \quad (*)$$

اینک باز هم با توجه به نکته، در مثلث ABC، اندازه ضلع BC را حساب می کنیم:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha \xrightarrow{(*)} BC^2 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{4} = 52 - 12 = 40$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$$

۱۳۰- پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱ (ضرب ماتریس سطری در ستونی): اگر A ماتریس سطری و B ماتریس ستونی باشد به طوری که تعداد ستون های A با تعداد سطرهای B برابر باشد، در این صورت برای به دست آوردن $A \times B$ کافیست هر درایه ماتریس A را در درایه نظیرش در ماتریس B ضرب کرده و حاصل ضرب ها را با هم جمع کنیم تا یک عدد حقیقی حاصل شود.

نکته ۲: اگر ماتریس A از مرتبه $m \times p$ و ماتریس B از مرتبه $p \times n$ باشد (تعداد ستون های A با تعداد سطرهای B برابر باشد)، برای به دست آوردن ماتریس $A \times B$ ، درایه های هر سطر ماتریس A را در درایه های هریک از ستون های ماتریس B نظیر به نظیر ضرب کرده و حاصل ضرب ها را با هم جمع می کنیم و در جایگاه متناظرش می نویسیم تا ماتریس حاصل ضرب از مرتبه $m \times n$ به دست آید. با توجه به نکات، داریم:

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3x + 8x - 1 & -x + 0 - 2 & x - 4x + 0 \end{bmatrix}_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 11x - 1 & -x - 2 & -3x \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

و باز خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 11x - 1 & -x - 2 & -3x \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} x(11x - 1) - 2x(x + 2) - 3x(-1) \end{bmatrix} = 11x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x = 9x^2 - 2x$$

و اینک عبارت را برابر صفر قرار می دهیم:

$$9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(9x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \times \\ x = \frac{2}{9} & \checkmark \end{cases}$$

۱۳۱- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: اگر A^{-1} وارون ماتریس A باشد، داریم: $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

نکته ۲: $AI = IA = A$

نکته ۳: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را با A^{-1} نمایش داده و برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا طرفین رابطه $AX = A - 2I$ را در A^{-1} ضرب می‌کنیم. با توجه به نکته ۱، خواهیم داشت:

$$A^{-1}AX = A^{-1}A - A^{-1}(2I) \Rightarrow IX = I - 2(A^{-1}I) \Rightarrow X = I - 2A^{-1} \xrightarrow{\text{نکته ۳ و ۲}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۳۲- پاسخ: گزینه ۴

نکته: $\langle k \in \mathbb{R} \rangle |kA_{n \times n}| = k^n |A_{n \times n}|$
با توجه به نکته، داریم:

$$|A| \cdot |A_{3 \times 3}| = |A|^3 |A| = |A|^4 = 4^4 = 2^8 = 256$$

۱۳۳- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: معادله ضمنی دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ می‌باشد که در آن:

$$a^2 + b^2 - 4c > 0$$

نکته ۲: برای به دست آوردن معادله خط وتر مشترک دو دایره کافی است دستگاه دو معادله را تشکیل داده و از هم کم کنیم تا جملات x^2 و y^2 حذف شوند. آنچه باقی می‌ماند معادله وتر مشترک دو دایره است.

با توجه به نکته ۱، فرض می‌کنیم معادله دایره (C) به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد، در این صورت با توجه به نکته ۲، داریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -4x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ -4x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-(a+4)}{b}x - \frac{c+6}{b}$$

اما از آنجایی که، وتر مشترک دو دایره بر خط $y = x$ منطبق است، پس داریم:

$$\begin{cases} -\frac{(a+4)}{b} = 1 \Rightarrow b = -(a+4) \quad (*) \\ \frac{c+6}{b} = 0 \Rightarrow c+6=0 \Rightarrow c=-6 \end{cases}$$

و با جای گذاری در معادله دایره (C) داریم:

$$x^2 + y^2 + ax - (a+4)y - 6 = 0$$

اینک می‌دانیم نقطه $(-1, 4)$ روی دایره (C) قرار دارد، پس خواهیم داشت:

$$1 + 16 - a - 4a - 16 - 6 = 0 \Rightarrow -5a = 5 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} b = -(a+4) = -3$$

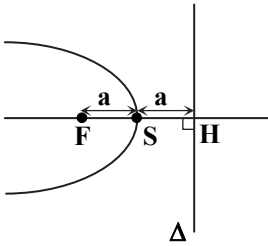
و در نهایت با داشتن $a = -1$ و $b = -3$ و $c = -6$ ، معادله دایره (C) به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 - x - 3y - 6 = 0$$

توجه: این تست، بدون حل نیز قابل پاسخ‌گویی بود، زیرا نقطه $(-1, 4)$ فقط در گزینه ۴ صدق می‌کند.

۱۳۴- پاسخ: گزینه ۱

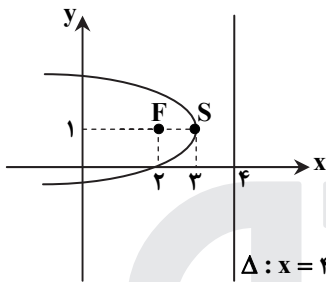
نکته ۱: معادله سهمی افقی به رأس $S(h, k)$ و فاصله کانونی $a > 0$ که دهانه آن روبه چپ باشد به صورت $(y - k)^2 = -4a(x - h)$ است. در این سهمی، مختصات کانون به صورت $F(-a + h, k)$ و معادله خط هادی به فرم $x = a + h$ می باشد.



نکته ۲: در هر سهمی، فاصله مرکز تا خط هادی برابر است با فاصله مرکز تا کانون.

$$SF = SH = a$$

با توجه به نکات، رأس سهمی دقیقاً وسط کانون و خط هادی است. یعنی:



$$S\left(\frac{2+4}{2}, 1\right) = (3, 1) \Rightarrow \begin{cases} h = 3 \\ k = 1 \end{cases}$$

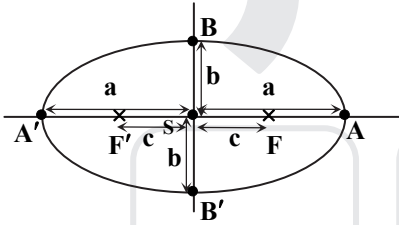
همچنین با توجه به نکته ۲، مقدار a برابر است با: $a = \frac{4-2}{2} = 1$

پس با توجه به نکته ۱، خواهیم داشت:

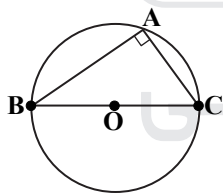
$$\Delta: x = 4 \quad (y-1)^2 = -4(1)(x-3) \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -4x + 12 \Rightarrow y^2 - 2y + 4x = 11$$

۱۳۵- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: در بیضی به طول قطر بزرگ $AA' = 2a$ ، طول قطر کوچک $BB' = 2b$ و فاصله کانونی $FF' = 2c$ رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار بوده و شکل آن به صورت زیر است:



نکته ۲: در هر دایره، زاویه محاطی روبه‌رو به قطر، قائمه است.



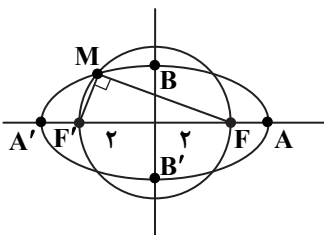
ابتدا با توجه به نکته ۱، داریم:

$$2a = 2\sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5 = 1 + c^2 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$$

از آنجایی که دایره مفروض به مرکز بیضی و شعاع ۲ است، پس از کانون‌های بیضی می‌گذرد:



با توجه به شکل و نکته ۲، زاویه M ، محاطی و روبه‌رو به قطر FF' بوده، پس قائمه است. بنابراین

در مثلث قائم‌الزاویه MFF' خواهیم داشت:

$$\triangle MFF': MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 4 \times 4 = 16$$

۱۳۶- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} را هم صفحه می‌گوییم هرگاه: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

نکته ۲: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

نکته ۳: ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر از طریق محاسبه یک دترمینان 3×3 حاصل می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

نکته ۴: ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ برابر است با:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با توجه به نکته ۱، برای آنکه سه بردار $\vec{a}(-1, 2, 3)$ ، $\vec{b}(2, 0, 1)$ و $\vec{c}(-4, m, 5)$ در یک صفحه باشند بایستی $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ باشد.

اما با توجه به نکته ۲، برای ساده‌تر شدن محاسبات، حاصل $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ را برابر صفر قرار می‌دهیم.

اینک با توجه به نکته ۳، ابتدا باید بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را به دست آوریم، پس داریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k} = (2, 7, -4)$$

و در نهایت با توجه به نکته ۴، داریم:

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \Rightarrow (-4, m, 5) \cdot (2, 7, -4) = 0 \Rightarrow -8 + 7m - 20 = 0 \Rightarrow 7m = 28 \Rightarrow m = 4$$

۱۳۷- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: $A \cap B' = A - B = A - (A \cap B)$

نکته ۲: تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه n عضوی برابر با 2^n است.

با توجه به نکته ۱، داریم:

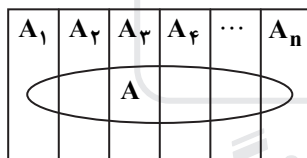
$$A \cap B' = A - B = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\} - \{\{1\}, \{1, 2\}\} = \{1, 2, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$$

واضح است که این مجموعه دارای ۴ عضو است و با توجه به نکته ۲، دارای $2^4 = 16$ زیرمجموعه است.

۱۳۸- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱ (قانون احتمال کل): فرض کنید $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای S را افزاز کرده‌اند.

اگر پیشامد A به پیشامدهای A_1 تا A_n وابسته باشد، احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

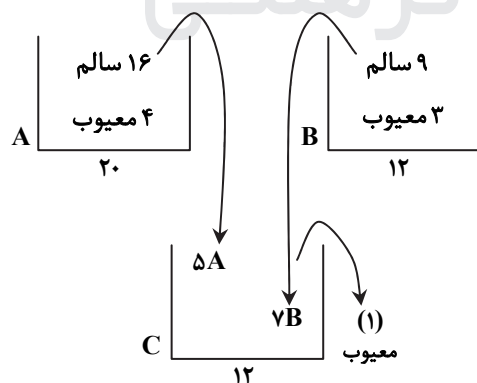


$$P(A) = P(A_1) \times P(A | A_1) + P(A_2) \times P(A | A_2) + \dots + P(A_n) \times P(A | A_n)$$

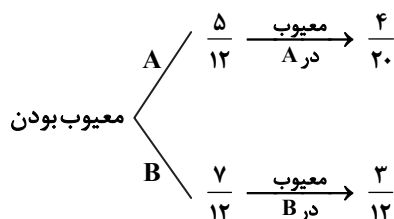
نکته ۲: در حل مسائل قانون احتمال کل، برای پرهیز از استفاده از فرمول و ساده‌تر

شدن راه‌حل، مسئله را به صورت نمودار درختی رسم کرده و احتمال هر شاخه را

روی آن می‌نویسیم و در نهایت، احتمال شاخه‌ها را با هم جمع می‌کنیم:



با توجه به نکات، احتمال معیوب بودن لامپ خروجی از جعبه جدید را محاسبه می‌کنیم:



$$\Rightarrow P(\text{معیوب}) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{20} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{12} = \frac{11}{48}$$

۱۳۹- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

نکته ۲: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، داریم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

نکته ۳: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

نکته ۴: $P(A') = 1 - P(A)$

نکته ۵: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه A و B' مستقلند، همچنین A' و B مستقلند و همچنین A' و B' مستقل هستند. ابتدا با توجه به نکته ۱، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B') = P(A - B) = 0.2 \\ P(A \cap B) = 0.6 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.2 = P(A) - 0.6 \Rightarrow P(A) = 0.8$$

سپس با توجه به نکته ۲، داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow 0.6 = 0.8 \times P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

اینک، با توجه به نکته ۳، داریم:

$$\begin{aligned} P(A \cup B') &= P(A) + P(B') - P(A \cap B') \quad \begin{array}{l} \text{نکته ۴} \\ \text{نکته ۵} \end{array} \\ &= 0.8 + (1 - P(B)) - P(A) \times P(B') = 0.8 + (1 - 0.75) - 0.8 \times (1 - 0.75) \\ &= 0.8 + 0.25 - 0.8 \times 0.25 = 1.05 - 0.2 = 0.85 \end{aligned}$$

۱۴۰- پاسخ: گزینه ۱

نکته: میانگین وزنی n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ با فراوانی به ترتیب $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ را با \bar{x}_w نمایش داده و برابر است با:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

راه حل اول:

با توجه به نکته، داریم:

$$\bar{x}_w = \frac{\frac{50}{(5 \times 10)} + \frac{96}{(8 \times 12)} + \frac{98}{(7 \times 14)} + \frac{150}{(10 \times 15)} + \frac{102}{(6 \times 17)} + \frac{72}{(4 \times 18)}}{5 + 8 + 7 + 10 + 6 + 4} = \frac{568}{40} = 14.2$$

راه حل دوم:

برای ساده تر شدن محاسبات می توانیم از همه داده ها ۱۴ واحد کم کرده، میانگین داده های حاصل را به دست آورده و در نهایت ۱۴ واحد به میانگین اضافه کنیم.

$x_i - 14$	-4	-2	0	1	3	4
f	5	8	7	10	6	4

$$\bar{x}_w = 14 + \frac{5(-4) + 8(-2) + 7(0) + 10(1) + 6(3) + 4(4)}{5 + 8 + 7 + 10 + 6 + 4} = 14 + \frac{8}{40} = 14.2$$

۱۴۱- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: عدد وسط مجموعه ای از داده ها که از کوچک به بزرگ مرتب شده اند را میانه گفته و با Q_2 نمایش می دهیم.

اگر تعداد داده ها فرد باشد، میانه، دقیقاً داده وسط است.

اگر تعداد داده ها زوج باشد، میانه برابر است با میانگین دو داده وسط.

نکته ۲: میانه نیمه اول داده ها را چارک اول نامیده و با Q_1 نمایش می دهیم. همچنین میانه نیمه دوم داده ها را چارک سوم نامیده و با Q_3 نمایش می دهیم.

با توجه به نکات، ابتدا داده ها را به صورت صعودی مرتب کرده و سپس مقادیر Q_1 ، Q_2 و Q_3 را به دست می آوریم:

$$\begin{array}{ccccccc} 10/6, 10/6, 11/2, 11/5, 11/9, 12/3, 12/7, 12/8, 13/5, 13/2, 13/2 \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ Q_1 = 11/2 \qquad \qquad \qquad Q_2 = \frac{11/9 + 12/3}{2} = 12/1 \qquad \qquad \qquad Q_3 = 12/8 \end{array}$$

$$\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{11/2 + 12/8 - 2(12/1)}{12/8 - 11/2} = \frac{24 - 24/2}{1/6} = \frac{-0.2}{1/6} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8} = -0.125$$

بنابراین خواهیم داشت:

۱۴۲- پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت اعداد صحیح و منحصر به فرد q و r یافت می شوند به طوری که:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

که به آن «قضیه تقسیم» می گوئیم.

در رابطه $a = bq + r$ ، a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقیمانده می گوئیم. با توجه به رابطه $0 \leq r < b$ دقت کنید که باقیمانده تقسیم همواره عددی بزرگ تر یا مساوی صفر بوده و از مقسوم علیه، کوچک تر است. با توجه به نکته و اطلاعات مسئله، اگر عدد مورد نظر را a در نظر بگیریم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a = 6q + 5 \xrightarrow{\times 11} 11a = 66q + 55 \\ a = 11q' + 7 \xrightarrow{\times 6} 6a = 66q' + 42 \quad (*) \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} \Delta a = 66(q - q') + 13 \Rightarrow \Delta a = 66k + 13$$

اینک، رابطه اخیر را دوباره در یک دستگاه از رابطه (*) کم می کنیم، خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6a = 66q' + 42 \\ \Delta a = 66k + 13 \end{array} \right. \xrightarrow{(-)} a = 66(q' - k) + 29 \Rightarrow a = 66k' + 29$$

یعنی باقیمانده تقسیم a بر ۶۶، برابر ۲۹ است.

۱۴۳- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: $a \mid b \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} a \mid mb$

نکته ۲: $\left. \begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid b \pm c$

نکته ۳: $a \mid P$ ، $P \Rightarrow a = 1$ یا $a = P$ اول

نکته ۴: $a \mid b \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} b = aq$

نکته ۵: $m \mid a - b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$

نکته ۶: به طرفین هم نهشتی می توان مضربی از پیمانه را اضافه کرد یا مضربی از پیمانه را کم کرد.

نکته ۷: $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، $(m, c) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

نکته ۸: $x \equiv b \pmod{m} \Rightarrow x = mk + b$

با توجه به نکات ۱ و ۲، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \mid 13n + 3 \xrightarrow{\times 7} \alpha \mid 91n + 21 \\ \alpha \mid 7n + 4 \xrightarrow{\times 13} \alpha \mid 91n + 52 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} \alpha \mid 31 \xrightarrow{\text{نکته ۳}} \alpha = 1 \text{ یا } 31 \xrightarrow{\alpha \neq 1} \alpha = 31$$

و در نتیجه داریم:

$$31 \mid 7n + 4 \xrightarrow{\text{نکته ۴}} 7n + 4 = 31q; q \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{نکته ۵}} 7n \equiv -4 \pmod{31} \xrightarrow[\text{نکته ۶}]{\text{طرف دوم} - 31} 7n \equiv -35 \pmod{31} \xrightarrow[\div 7]{\text{نکته ۷}} n \equiv -5 \pmod{31}$$

$$\xrightarrow{\text{نکته ۸}} n = 31k - 5$$

$$n = 31(1) - 5 = 26$$

حال اگر $k = 1$ را در رابطه زیر قرار دهیم، کوچک ترین مقدار طبیعی n حاصل می شود:

واضح است که مجموع ارقام این عدد، $2 + 6 = 8$ است.

۱۴۴- پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱: برای حل معادله سیاله به فرم $ax + by = c$ ابتدا متغیر x یا y را از طریق تبدیل به معادله هم نهشتی به صورت زیر به دست می آوریم:

$$ax - c = -by \Rightarrow ax \equiv -c \pmod{b}$$

$$by - c = -ax \Rightarrow by \equiv c \pmod{a}$$

سپس با جای گذاری جواب عمومی به دست آمده در معادله اصلی، جواب عمومی متغیر دیگر نیز به دست می آید.

نکته ۲: به طرفین هم نهشتی می توان مضربی از پیمانه را اضافه کرد یا مضربی از پیمانه را کم کرد.

نکته ۳: $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، $(m, c) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$

نکته ۴: $x \equiv b \pmod{m} \Rightarrow x = mk + b$

فرض می‌کنیم تعداد x کالای ۲۲۰ تومانی و تعداد y کالای ۱۴۰ تومانی خریداری کرده‌ایم. در این صورت داریم:

$$220x + 140y = 19000 \xrightarrow{+20} 11x + 7y = 950$$

با توجه به نکته ۱، داریم:

$$11x \equiv 950 \xrightarrow[\text{نکته ۲}]{\substack{945 \\ (135 \times 7) - (7x - \text{طرف اول})}} 4x \equiv 5 \xrightarrow[\text{نکته ۲}]{(7 - \text{طرف دوم})} 4x \equiv 12 \xrightarrow[\text{نکته ۳}]{+4} x \equiv 3 \xrightarrow{\text{نکته ۴}} x = 7k + 3$$

اینک جواب عمومی x را در معادله قرار می‌دهیم:

$$11(7k + 3) + 7y = 950 \Rightarrow 77k + 33 + 7y = 950 \Rightarrow 7y = -77k + 917 \xrightarrow{+7} y = -11k + 131$$

$$\begin{cases} x = 7k + 3 \\ y = -11k + 131 \end{cases}$$

و در نتیجه جواب‌های عمومی معادله، عبارتند از:

واضح است که مقادیر x و y به‌ازای $k = \{0, 1, 2, 3, \dots, 11\}$ اعداد حسابی هستند و طبیعتاً جواب‌های قابل‌قبولی برای معادله تولید خواهند کرد.

پس معادله ۱۲ جواب دارد.

۱۴۵- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: برای به‌دست آوردن باقیمانده تقسیم a^n بر b کافی است از توان‌های کوچک a شروع کرده و روابط هم‌نهشتی در پیمانه b ، هم‌نهشت

با 1 یا -1 پیدا کنیم. سپس با ضرب کردن یا به توان رساندن طرفین هم‌نهشتی می‌توانیم به باقی‌مانده تقسیم a^n بر b برسیم.

نکته ۲: طرفین هم‌نهشتی را می‌توان در یک عدد صحیح ضرب کرد.

نکته ۳: به طرفین هم‌نهشتی می‌توان مضاربی از پیمانه را که یا زیاد کرد.

نکته ۴: طرفین هم‌نهشتی را می‌توان به توان عددی طبیعی رساند.

برای آنکه عدد $a + 7^{13}$ بر 23 بخش‌پذیر باشد بایستی: $7^{13} + a \equiv 0$

پس باید کوچکترین عدد a را به‌دست آوریم تا در رابطه بالا صدق کند.

با توجه به نکته ۱، با کمترین توان‌های 7 آغاز می‌کنیم:

$$7^2 = 49 \equiv 3 \xrightarrow[\text{نکته ۲}]{\times 7} 7^3 \equiv 21 \xrightarrow[\text{نکته ۳}]{-(23 - \text{طرف دوم})} 7^3 \equiv -2 \xrightarrow[\text{نکته ۴}]{\text{توان ۴}} 7^{12} \equiv 16 \xrightarrow[\text{نکته ۳}]{-(23 - \text{طرف دوم})} 7^{13} \equiv -7$$

$$\xrightarrow[\text{نکته ۲}]{\times 7} 7^{14} \equiv -49 \xrightarrow[\text{نکته ۳}]{(2 \times 23 - \text{طرف دوم})} 7^{14} \equiv -3 \Rightarrow 7^{13} + \underbrace{3}_a \equiv 0$$

و از رابطه اخیر، واضح است که $a = 3$

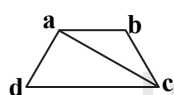
۱۴۶- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: گراف G را k -منتظم گوئیم هرگاه درجه همه رئوس آن، عدد حسابی k باشد.

مثلاً گراف ۴-منتظم مرتبه ۶ گرافی ۶ رأسی است که درجه همه رئوس آن، برابر ۶ است.


نکته ۲: دنباله $V_1 V_2 V_3 \dots V_n V_1$ ($n \geq 3$) از رئوس دوبه‌دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را

یک دور به طول n می‌نامیم. مثلاً در گراف شکل زیر، دورهای $abca$ و $acda$ دورهایی به طول ۳ و دور $abcd$ دوری به طول ۴ است.



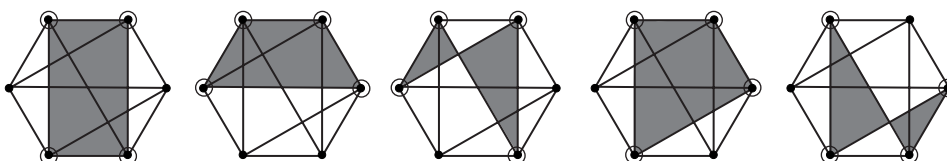
نکته ۳: دورها را می‌توان از روی چندضلعی‌های هندسی تشخیص داد. مثلاً مثلث، دور به طول ۳ است و هر چهارضلعی به هر شکلی، دور به

طول ۴ محسوب می‌شود و به همین ترتیب، پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی و ... دورهایی به طول ۵ و ۶ و ... هستند.

نکته ۴: گرافی به‌شکل  که به «پروانه» معروف است با حرکت دادن رئوسش در صفحه تبدیل به چهارضلعی می‌شود و یک دور به طول ۴

محسوب می‌گردد.

ابتدا با توجه به نکته ۱، باید یک گراف ۴-منتظم مرتبه ۶ به‌صورت زیر رسم کنیم:



اینک با توجه به نکات ۲، ۳ و ۴، همانگونه که مشاهده می‌کنید هر ۴ رأس که از گراف مذکور را انتخاب می‌کنیم، تشکیل دور به طول ۴ خواهند

داد، پس تعداد دورهای به طول ۴ در این گراف، برابر است با:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 15$$

۱۴۷- پاسخ: گزینه ۳

نکته: تعداد روش‌های توزیع n شیء یکسان بین k نفر به‌طوری که به هر نفر حداقل یک شیء برسد برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

با توجه به نکته، داریم:

$$\begin{matrix} n = 11 \\ k = 5 \end{matrix} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

۱۴۸- پاسخ: گزینه ۴

نکته: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه $m \geq 3$ عضو به یک مجموعه ۳ عضوی برابر است با:

$$3^m - 3 \times 2^m + 3$$

با توجه به نکته، داریم:

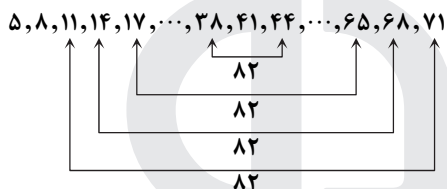
$$m = 6: 3^6 - 3 \times 2^6 + 3 = 729 - 192 + 3 = 540$$

۱۴۹- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم به‌طوری که $m > n$ و بخواهیم همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، آنگاه حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل ۲ کبوتر جای می‌گیرد. (اصل لانه کبوتری)

نکته ۲: از اصل لانه کبوتری در حل برخی مسائل استفاده کرده و بدترین حالت‌ها را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم که حتی در بدترین حالات نیز، شرط مسئله برقرار است.

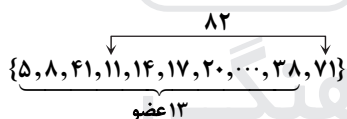
ابتدا بایستی زیرمجموعه‌های دو عضوی از اعضای مجموعه $\{5, 8, 11, \dots, 65, 68, 71\}$ را در نظر بگیریم که مجموعشان ۸۲ می‌شود. نگاه کنید:



پس اعضای مجموعه‌ها را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

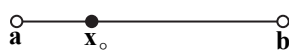
$$\{5, 8, 41, \{11, 71\}, \{14, 68\}, \{17, 65\}, \{20, 62\}, \dots, \{37, 44\}\}$$

همانگونه که مشاهده می‌کنید، ۱۰ زیرمجموعه دو عضوی داریم که مجموع اعضایشان ۸۲ است. حال با توجه به نکته ۲، در بدترین حالت، اگر از هر زیرمجموعه دو عضوی، یک عضو به همراه اعداد ۵، ۸ و ۴۱ برداریم، تعداد ۱۳ عدد برداشته‌ایم که مجموع هیچ دو عضوی برابر ۸۲ نیست. حال به کمک نکته ۱ و اصل لانه کبوتری اگر فقط یک عضو دیگر از مجموعه برداریم، حداقل دوتا عضو خواهیم داشت که مجموعشان ۸۲ است، پس با تشکیل یک زیرمجموعه حداقل ۱۴ عضو از اعضای این مجموعه، حداقل دو عضو یافت می‌شود که مجموعشان ۸۲ است و بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.



۱۵۰- پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر x یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x را یک همسایگی x می‌نامیم. بنابراین اگر $x_0 \in (a, b)$ ، آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی برای x_0 است.



$$a < x_0 < b$$

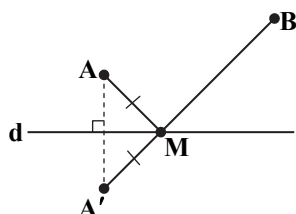
با توجه به نکته، داریم:

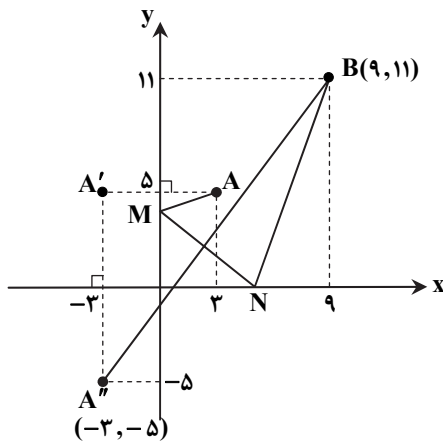
$$\begin{aligned} 3 \in (x+1, 2x-1) &\Rightarrow x+1 < 3 < 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 < 3 \Rightarrow x < 2 & (1) \\ 2x-1 > 3 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 & (2) \end{cases} \\ (1) \cap (2) &= \emptyset \end{aligned}$$

۱۵۱- پاسخ: گزینه ۳

نکته: در مسایل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر، بر اساس قواعد مسئله هرون، ابتدا مطابق شکل، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d به‌دست آورده و A' می‌نامیم و پس از A' به B وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطه M قطع کند. آنگاه مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر است که طول آن با طول پاره خط $A'B$ برابر است.

$$|A'B| = \text{اندازه مسیر } AMB$$





با توجه به نکته و مطابق شکل روبه‌رو، از آنجایی که نقاط M و N به ترتیب روی محور y ها و محور x ها قرار دارند، پس طبق مسئله هرون ابتدا نقطه A را نسبت به محور y ها بازتاب می‌دهیم تا نقطه A' به دست آید سپس نقطه A' را نسبت به محور x ها بازتاب می‌دهیم تا نقطه A'' به دست آید. واضح است که مختصات نقطه A'' به صورت $(-3, -5)$ است. حال با توجه به نکته، می‌دانیم که $A''B$ کوتاه‌ترین مسیر معادل مسیر $AMNB$ است، پس داریم:

$$A''B = \sqrt{(-3-9)^2 + (-5-11)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

۱۵۲- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: $p \vee q \equiv \sim p \vee q$

نکته ۲: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

نکته ۳: $\sim(\sim p) \equiv p$

با توجه به نکات داریم: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$

۱۵۳- پاسخ: گزینه ۱

نکته ۱: برای بیان عبارتهایی نظیر «به‌ازای هر»، «به‌ازای جمع مقادیر» و نظایر آن‌ها از نماد \forall استفاده کرده و آن را سور عمومی می‌نامیم.
 $\forall x ; P(x)$

گزاره‌نما شامل متغیر x که با سورهای عمومی همراه می‌شود، زمانی درست است که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند و به عبارتی هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

نکته ۲: برای بیان عباراتی نظیر «وجود دارد»، «به‌ازای بعضی مقادیر» و نظایر آن‌ها از نماد \exists استفاده کرده و آن را سور وجودی می‌نامیم.
 $\exists x ; P(x)$

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، زمانی درست است که مجموع جواب آن تهی نباشد.

گزاره سوری سؤال را ببینید:
 $\forall x \in \mathbb{N} , \exists y \in \mathbb{N} ; P(x, y)$

یعنی به‌ازای هر عدد طبیعی بایستی حداقل یک عدد طبیعی دیگر وجود داشته باشد تا یکی از گزاره‌نماهای گزینه‌ها، همواره درست باشد و این موضوع فقط برای گزینه ۱ برقرار است، زیرا هر عدد طبیعی مانند x که در نظر بگیریم حتماً یک عدد طبیعی مانند y وجود خواهد داشت که از x بیشتر است و تفاضلشان برابر ۶ می‌شود.

$$\forall x \in \mathbb{N} , \exists y \in \mathbb{N} ; y - x = 6$$

اما برای گزاره‌نماهای دیگر، مثال نقض وجود دارد.

مثال نقض گزینه ۲: اگر $x = 5$ باشد، هیچ عدد طبیعی یافت نمی‌شود که $x - y = 6$ شود.

مثال نقض گزینه ۳: اگر $x = 7$ باشد، هیچ عدد طبیعی یافت نمی‌شود که $x + y = 6$ شود.

مثال نقض گزینه ۴: اگر $x = 10$ باشد، هیچ عدد طبیعی یافت نمی‌شود که $xy = 10$ شود.

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۱۵۴- پاسخ: گزینه ۲

نکته ۱: زیرمجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

نکته ۲: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۳: یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رئوسش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

با توجه به نکات، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

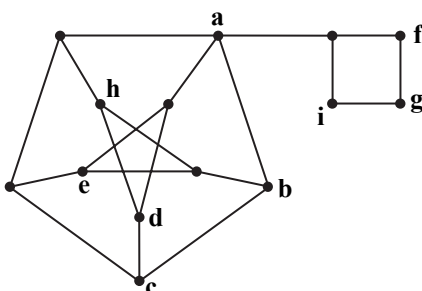
گزینه ۱ اصلاً احاطه‌گر نیست، زیرا مثلاً رأس h را احاطه نمی‌کند.

گزینه ۲: هم احاطه‌گر است و هم مینیمال زیرا با حذف هریک از رئوسش دیگر احاطه‌گر نیست.

گزینه ۳: اصلاً احاطه‌گر نیست، زیرا مثلاً رئوس f و g را احاطه نمی‌کند.

گزینه ۴: اصلاً احاطه‌گر نیست، زیرا مثلاً رأس i را احاطه نمی‌کند.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

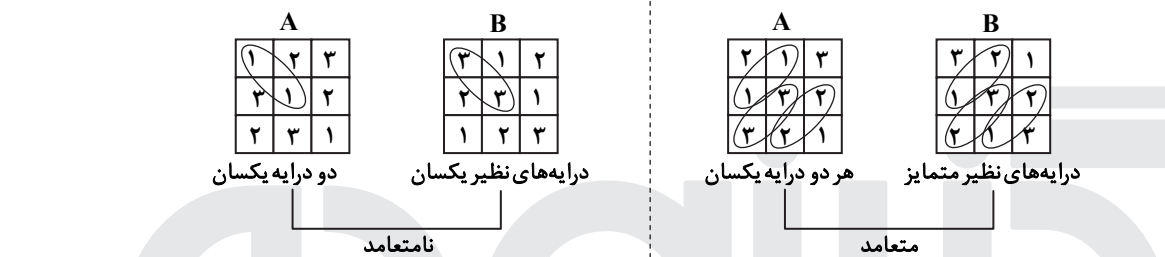


۱۵۵- پاسخ: گزینه ۴

نکته ۱: یک جدول مربعی از اعداد ۱، ۲، ۳، ... و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ۳، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم و به هریک از اعداد درون مربع لاتین، یک «درایه» می‌گوییم.

نکته ۲: فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ، مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست، مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. می‌گوییم دو مربع لاتین A و B متعامدند هرگاه هیچ یک از اعداد دورقمی موجود در خانه‌های مربع جدید، تکراری نباشند.

نکته ۳: یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن، باید هر دو درایه در یکی از مربع‌ها که اعداد یکسانی دارند، درایه‌های نظیر آن‌ها در مربع دیگر، اعدادی متمایز باشند.



با توجه به نکات، برای ساختن مربع لاتین متعامد 3×3 با یک مربع لاتین، کفایت یک سطر یا یک ستون را ثابت نگه داشته و دو سطر یا دو ستون دیگر را جابه‌جا کنیم.

مثلاً سطر اول را ثابت نگه می‌داریم:

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱ مربع لاتین متعامد

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۱ مربع لاتین متعامد

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱ مربع لاتین متعامد

و سطر دوم را ثابت نگه می‌داریم:

و سطر سوم را ثابت نگه می‌داریم:

همانگونه که مشاهده می‌کنید با ثابت نگهداشتن هر سطر و تغییرات در دو سطر دیگر، فقط یک مربع لاتین متعامد با مربع اولیه حاصل می‌شود.

از آنجایی که مربع 3×3 دارای ۳ سطر و ۳ ستون است، پس با ثابت نگه داشتن هریک، یک مربع لاتین متعامد با مربع اولیه به دست می‌آید، پس در مجموع ۶ مربع لاتین متعامد می‌توان ساخت.

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: با توجه به اینکه برای ساختن هر مربع لاتین متعامد 3×3 با مربع اولیه باید یک سطر یا یک ستون را ثابت نگه داشته و دو سطر یا دو ستون دیگر را تغییر دهیم، پس انتخاب ۱ سطر از ۳ سطر یا انتخاب ۱ ستون از ۳ ستون می‌تواند تعداد مربع‌های لاتین متعامد 3×3 را حاصل کند، پس داریم:

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{1} = 3 + 3 = 6$$

که البته این روش زمانی قابل استفاده است که به یقین بدانیم که ثابت نگهداشتن هر سطر یا هر ستون، فقط یک مربع لاتین متعامد می‌دهد. بنابراین روش اولیه بیشتر توصیه می‌شود.

فیزیک

۱۵۶- پاسخ: گزینه ۴

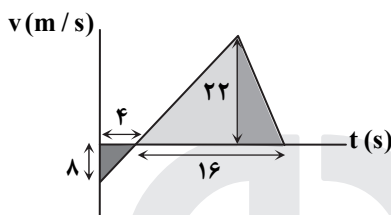
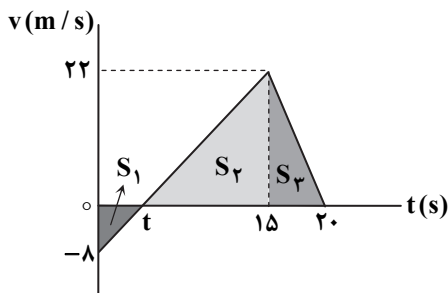
$$\frac{v+v_0}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v+0}{2} = \frac{-122/5}{5} \Rightarrow v = 49 \frac{m}{s}$$

۱۵۷- پاسخ: گزینه ۴

دو مثلثی که در شکل روبه‌رو دارای مساحت‌های S_1 و S_2 هستند، با هم متشابه‌اند.

با نوشتن رابطه تشابه خواهیم داشت:

$$\frac{\lambda}{22} = \frac{t}{15-t} \Rightarrow 4 \times 15 - 4t = 11t \Rightarrow t = 4s$$



مسافت طی شده برابر جمع مساحت همه مثلث‌هاست؛ بنابراین:

$$\text{مسافت طی شده} = S_1 + (S_2 + S_3) = \frac{8 \times 4}{2} + \frac{22 \times 16}{2} = 16 + 176 = 192m$$

۱۵۸- پاسخ: گزینه ۱

برای مسیر AB می‌توان نوشت:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g\Delta y$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}v^2 - v^2 = 2 \times 10 \times 9 \Rightarrow \frac{5}{4}v^2 = 2 \times 10 \times 9 \Rightarrow v^2 = 4 \times 4 \times 9 \Rightarrow v = 12 \frac{m}{s}$$

$$v_B = \frac{3}{2}v = \frac{3}{2} \times 12 = 18 \frac{m}{s}$$

$$v_B^2 - v_O^2 = 2g\Delta y \Rightarrow 18^2 - 0^2 = 2g \times h \Rightarrow h = \frac{18^2}{2 \times 10} = 16.2m$$

می‌توان نوشت: $h = 16.2m$

جهت مثبت محور را رو به پایین در نظر گرفتیم.

۱۵۹- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به نمودار، سرعت در لحظه $t = 4s$ برابر صفر است.

$$\Delta x = \frac{v+v_0}{2} \Delta t \Rightarrow -12 = \frac{0+v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = -6 \frac{m}{s}$$

در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 4s$ می‌توان نوشت: اندازه سرعت در لحظه $t = 8s$ نیز دقیقاً برابر v_0 است؛ زیرا نمودار سهمی نسبت به خط عمودی گذرنده از رأس متقارن است؛ بنابراین ۴ ثانیه پس از لحظه $t = 4s$ (یعنی لحظه $t = 8s$) اندازه سرعت متحرک دقیقاً برابر اندازه سرعت اولیه خواهد بود.

۱۶۰- پاسخ: گزینه ۴

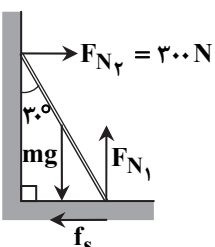
$$v = 36 \frac{km}{h} = 36 \frac{km}{h} \times \frac{1000m}{1km} \times \frac{1h}{3600s} = 10 \frac{m}{s}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 - 10^2 = 2a \times 4 \Rightarrow a = \frac{-100}{8} = -12.5 \frac{m}{s^2}$$

$$F_{net} = ma \Rightarrow 0 - f_k = ma \Rightarrow -f_k = 2000 \times (-12/5) \Rightarrow f_k = 2500N$$

۱۶۱- پاسخ: گزینه ۲

نردبان در حال تعادل است، پس برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است.



$$\begin{cases} F_{N2} = f_s \Rightarrow f_s = 300N \\ F_{N1} = mg \Rightarrow F_{N1} = 400N \end{cases}$$

$$R = \sqrt{F_{N1}^2 + f_s^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500N$$

نیروی سطح افقی:

۱۶۲- پاسخ: گزینه ۲

$$g_h = g \times \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2$$

$$F = mg_h = 500 \times 10 \times \left(\frac{6400}{6400 + 1600} \right)^2 = 5000 \times \left(\frac{64}{80} \right)^2 = 3200 \text{ N}$$

۱۶۳- پاسخ: گزینه ۳

هرگاه شتاب آسانسور به سمت بالا باشد، وزن ظاهری بیشتر از وزن در حال سکون است که در دو حالت تندشونده به بالا و کندشونده به پایین شتاب به سمت بالا خواهد بود.

۱۶۴- پاسخ: گزینه ۴

$$f_k = 10 \text{ N} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \text{ kg} \\ \hline \end{array} \rightarrow F_n = 10 \text{ N} \quad f_{s, \max} = F_n \mu_s \Rightarrow f_{s, \max} = mg \mu_s = 20 \times 0.6 = 12 \text{ N}$$

$$f_k = F_n \mu_k \Rightarrow mg \mu_k = 20 \times 0.5 = 10 \text{ N}$$

نیروی $F_1 = 40 \text{ N}$ بیشتر از $f_{s, \max}$ است، پس جسم با شتاب حرکت می‌کند؛ اما وقتی نیروی F ، ۳۰ نیوتون کاهش پیدا می‌کند، این نیرو برابر $F_2 = 10 \text{ N}$ می‌شود که با f_k برابر خواهد شد. بنابراین برآیند نیروهای وارد بر آن صفر می‌شود؛ در نتیجه شتاب حرکت صفر شده و این جسم با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

۱۶۵- پاسخ: گزینه ۱

کار نیروی وزن به مسیر بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدا و انتها بستگی دارد و با توجه به اینکه هر سه توپ از یک سطح پرتاب و به یک سطح می‌رسند، پس کار نیروی وزن در هر سه یکسان است.

۱۶۶- پاسخ: گزینه ۳

$$mv_1 = 20 \Rightarrow v_1 = \frac{20}{m}$$

$$mv_2 = 22 \Rightarrow v_2 = \frac{22}{m}$$

$$\text{درصد افزایش انرژی جنبشی} = \frac{K_2 - K_1}{K_1} \times 100 = \frac{\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)}{\frac{1}{2}mv_1^2} \times 100 = \frac{\left(\frac{22}{m}\right)^2 - \left(\frac{20}{m}\right)^2}{\left(\frac{20}{m}\right)^2} \times 100 = \frac{22^2 - 20^2}{20^2} \times 100$$

$$= \left(\left(\frac{22}{20} \right)^2 - 1 \right) \times 100 = 21\%$$

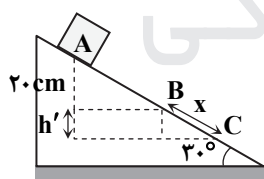
انرژی جنبشی ۲۱ درصد افزایش می‌یابد.

۱۶۷- پاسخ: گزینه ۲

$$E_A = E_C \Rightarrow mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = U_{\text{فتر}}$$

$$\Rightarrow 2 \times 10 \times \left(\frac{20 + h'}{100} \right) + \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 = 10 \Rightarrow \frac{20 + h'}{5} = 6 \Rightarrow h' = 10 \text{ cm}$$

$$y = x \sin 30^\circ \Rightarrow 10 = x \times \frac{1}{2} \Rightarrow x = 20 \text{ cm}$$



۱۶۸- پاسخ: گزینه ۴

$$v_2 = v_1 - 0.25v_1 = 0.75v_1 = \frac{3}{4}v_1 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{3}{4}$$

$$v_4 = v_3 + 0.4v_3 = 1.4v_3 = \frac{7}{5}v_3 \Rightarrow \frac{v_4}{v_3} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{n_3}{n_4} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\sin 53^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{n_4}{n_1} \Rightarrow \frac{n_4}{n_1} = \frac{0.8}{0.7} \Rightarrow \frac{n_4}{n_1} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{n_2}{n_3} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{n_1}{n_4} \times \frac{n_4}{n_1} = \frac{4}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{32}{35}$$

۱۶۹- پاسخ: گزینه ۱

هرقدر بسامد یک نور بیشتر باشد، ضریب شکست نور برای آن بیشتر خواهد بود؛ بنابراین نور سبز که بسامد بیشتری دارد، بیشتر شکسته شده و به خط عمود نزدیک تر می شود.

۱۷۰- پاسخ: گزینه ۴

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot \frac{m}{s}}{0.2}} = 20 \frac{m}{s}$$

$$\frac{3}{2} \lambda = 15 \Rightarrow \lambda = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0.1}{20} = \frac{1}{200} \text{ s}$$

زمان سپری شده در صورت مسئله 0.1 s است که برابر $2T$ است؛ یعنی هر ذره در مدت ۲ برابر دوره تناوب حرکت کرده است.

ذره در هر دوره تناوب، ۴ برابر دامنه را طی می کند؛ پس:

$$\ell = 2 \times (4A) = 8A = 16 \text{ cm}$$

۱۷۱- پاسخ: گزینه ۳

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{250}{4 \times 10^{-3}}} = \frac{5}{2} \times 10^2 = 250 \frac{m}{s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{250}{312/5} = 0.8 \text{ m}$$

۱۷۲- پاسخ: گزینه ۱

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{L_2}{80}} \Rightarrow L_2 = 20 \text{ cm}$$

$$L_2 - L_1 = -60 \text{ cm}$$

پس طول آونگ باید ۶۰ سانتی متر کاهش پیدا کند.

۱۷۳- پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} U + K = E \\ U = K \end{array} \right\} \Rightarrow 2K = E \Rightarrow K = 4 \text{ mJ}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = 4 \times 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 0.1 \times v^2 = 4 \times 10^{-3} \Rightarrow v^2 = 8 \times 10^{-2} \Rightarrow v = 2\sqrt{2} \times 10^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{5} \frac{m}{s}$$

۱۷۴- پاسخ: گزینه ۳

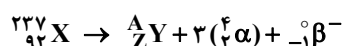
$$P \times \Delta t = nhf \xrightarrow{f = \frac{c}{\lambda}} P \Delta t = nh \frac{c}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{P \Delta t \lambda}{hc} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\Rightarrow \frac{n_{\text{زرد}}}{n_{\text{بنفش}}} = \frac{P_{\text{زرد}}}{P_{\text{بنفش}}} \times \frac{\lambda_{\text{زرد}}}{\lambda_{\text{بنفش}}} = \frac{200}{200} \times \frac{600}{400} = \frac{3}{2}$$

۱۷۵- پاسخ: گزینه ۱

$$W_0 = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow 4/14 = \frac{4/14 \times 10^{-15} \times 3 \times 10^8}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = 3 \times 10^{-7} \text{ m} = 300 \text{ nm}$$

۱۷۶- پاسخ: گزینه ۲



A تعداد نوکلئون های هسته Y و Z تعداد پروتون های آن است. $A + 3 \times 4 = 237 \Rightarrow A = 225$

۱۷۷- پاسخ: گزینه ۲

$$\text{تعداد هسته های باقی مانده} = N_0 - \frac{31}{32} N_0 = \frac{1}{32} N_0$$

$$\text{تعداد هسته های باقی مانده} = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 32 = 2^5 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = \frac{t}{n} = \frac{125}{5} = 25 \text{ روز}$$

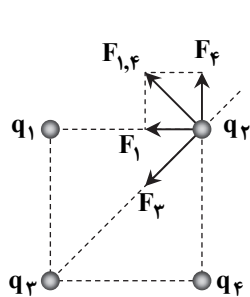
۱۷۸- پاسخ: گزینه ۴

وقتی بار منفی در خلاف جهت خطوط میدان حرکت می کند، انرژی پتانسیل الکتریکی آن کاهش می یابد؛ پس:

$$\Delta U = -\Delta mJ$$

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{-\Delta \times 10^{-3}}{-\Delta \times 10^{-6}} \Rightarrow V_B - 120 = 100 \Rightarrow V_B = 220 \text{ V}$$

۱۷۹- پاسخ: گزینه ۴



$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \Rightarrow F_1 = F_2 = 9 \times 10^9 \times \frac{4 \times 5 \times 10^{-12}}{4 \times 10^{-2}} = 4.5 \text{ N}$$

$$F_{1,2} = \sqrt{2} F_1 = 4.5 \sqrt{2} \text{ N}$$

$\vec{F}_{1,2}$ بر قطر مربع عمود است و برای اینکه برآیند همه نیروها در راستای $-\vec{i}$ باشد، باید $F_3 = F_{1,2}$

بوده و جهت F_3 مطابق شکل باشد؛ یعنی نیروی بین q_2 و q_3 باید جاذبه باشد؛ پس:

$$q_3 > 0$$

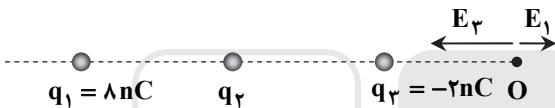
$$F_{1,2} = F_3 \Rightarrow 4.5 \sqrt{2} = 9 \times 10^9 \times \frac{q_3 \times 5 \times 10^{-12}}{(20 \sqrt{2} \times 10^{-2})^2} \Rightarrow 4.5 \sqrt{2} = \frac{45}{8} \times q_3 \times 10^{-1} \Rightarrow q_3 = 8 \sqrt{2} \mu\text{C}$$

۱۸۰- پاسخ: گزینه ۲

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \Rightarrow \frac{F'}{F} = \frac{|q'_1|}{|q_1|} \times \frac{|q'_2|}{|q_2|} \times \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = 3 \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

۱۸۱- پاسخ: گزینه ۱

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$



$$E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{8 \times 10^{-9}}{0.3^2} = 800 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-9}}{0.1^2} = 1800 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

برایند \vec{E}_1 و \vec{E}_2 برابر $1000 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ در راستای $-\vec{i}$ است و اگر بخواهیم اندازه میدان برایند هر سه بار در نقطه O برابر ۱۰۰ باشد، بنابراین اندازه

میدان حاصل از q_2 در نقطه O باید برابر $900 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ یا $1100 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ در راستای $+\vec{i}$ باشد.

$$q_2 > 0$$

$$E_2 = 900 \frac{\text{N}}{\text{C}} \Rightarrow 900 = 9 \times 10^9 \times \frac{q_2 \times 10^{-9}}{(0.2)^2} \Rightarrow q_2 = +4 \text{ nC}$$

$$E_2 = 1100 \frac{\text{N}}{\text{C}} \Rightarrow 1100 = 9 \times 10^9 \times \frac{q_2 \times 10^{-9}}{(0.2)^2} \Rightarrow 11 = \frac{9}{4} q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{44}{9} = 4.9 \text{ nC}$$

با توجه به گزینه های صورت سؤال، اندازه q_2 برابر با $+4 \text{ nC}$ خواهد بود.

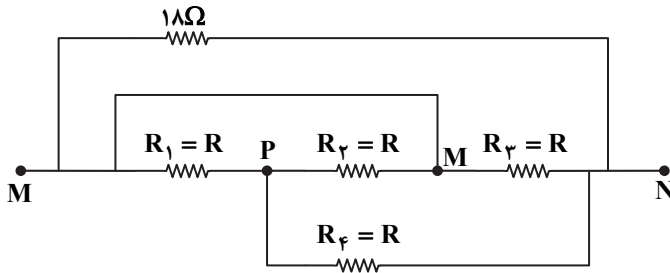
۱۸۲- پاسخ: گزینه ۳

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{15}{20}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

۱۸۳- پاسخ: گزینه ۴

۱۸۴- پاسخ: گزینه ۳



مدار مسئله را می توان به صورت زیر مجدداً رسم کرد
(برای نقاطی که پتانسیل الکتریکی یکسانی دارند و با
یک سیم به هم وصل شده اند، نام یکسانی قرار داده
شده است.)

R_1 و R_2 با هم موازی و معادل آن ها با R_4 متوالی است و
 R_1, R_2, R_4 با R_3 و 18Ω موازی است.

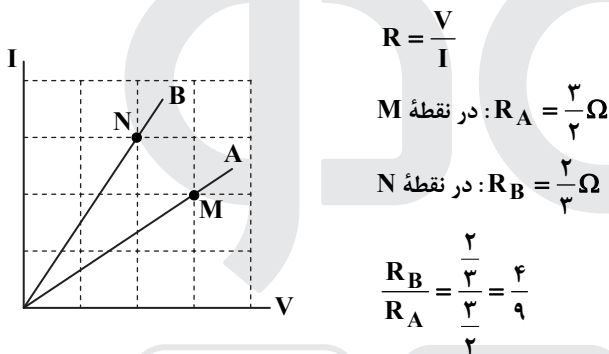
$$R_{1,2} = \frac{R}{2} \text{ و } R_{1,2,4} = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{1,2,4}} + \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{R} = \frac{1}{R} + \frac{2}{3R} + \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{6-3-2}{3R} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1}{3R} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow R = \frac{18}{3} = 6\Omega$$

۱۸۵- پاسخ: گزینه ۱



۱۸۶- پاسخ: گزینه ۱

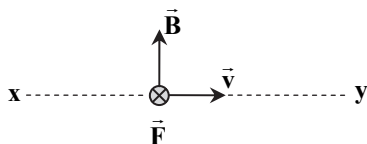
دو سر ولت سنج و باتری اتصال کوتاه شده اند، بنابراین اختلاف پتانسیل هر دو صفر است، پس ولت سنج صفر ولت را نشان می دهد.

۱۸۷- پاسخ: گزینه ۲

$$\pi R^2 = 64\pi \Rightarrow R = 8\text{cm}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \times \frac{NI}{R} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2} \times \frac{50 \times 8}{0.08} = \pi \times 10^{-3} \text{ T}$$

۱۸۸- پاسخ: گزینه ۳



با توجه به اینکه سرعت بر \vec{B} و \vec{F} عمود است، پس راستای آن در امتداد خط xy است و
طبق قاعده دست راست و با توجه به علامت منفی بار الکترون، سرعت الکترون باید به سمت
راست باشد.

۱۸۹- پاسخ: گزینه ۴

$$|\mathcal{E}| = \left| -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| \Rightarrow |\mathcal{E}| = 60 \times \frac{\left| \Phi\left(\frac{1}{10}\right) - \Phi\left(\frac{1}{20}\right) \right|}{\frac{1}{10} - \frac{1}{20}} = \frac{60 \times \left| (-4 \times 10^{-3} - 0) \right|}{\frac{1}{20}} \Rightarrow |\mathcal{E}| = 48 \text{ V}$$

۱۹۰- پاسخ: گزینه ۱

$$\mathcal{E} = B\ell v \Rightarrow 0.15 = 0.12 \times 0.25 \times v \Rightarrow v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

با حرکت میله به سمت چپ، شار مغناطیسی در جهت برون سو کاهش می یابد؛ بنابراین طبق قانون لنز جهت جریان باید به گونه ای باشد که با
کاهش شار مخالفت کند، پس میدان حاصل از جریان القایی باید برون سو باشد، پس جریان در حلقه پادساعتگرد است یعنی جریان در میله
MN از N به طرف M خواهد بود.

۱۹۱- پاسخ: گزینه ۴

$$V = 5 \times 4 \times 2 = 40 \text{ cm}^3$$

$$m = \rho V = 8 \times 40 = 320 \text{ g} = 0.32 \text{ kg}$$

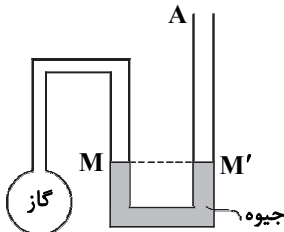
$$F = mg = 0.32 \times 10 = 3.2 \text{ N}$$

برای اینکه فشار بیشترین باشد، مساحت باید کمترین باشد.

$$P = \frac{F}{A} = \frac{3.2}{2 \times 4 \times 10^{-4}} = 4 \times 10^3 \text{ Pa}$$

۱۹۲- پاسخ: گزینه ۳

در حالت اول:

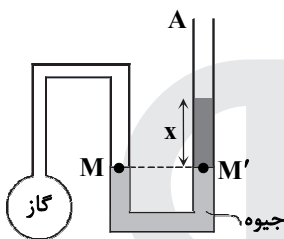


$$\text{فشار گاز} = P_1 = 75 \text{ cmHg}$$

$$T_1 = 273 + 27 = 300 \text{ K}$$

با توجه به اینکه $P_M = P_{M'}$ ، پس فشار محیط 75 cmHg است.

در حالت دوم:



$$P_M = P_{M'} \Rightarrow P_r = x + P_o = (x + 75) \text{ cmHg}$$

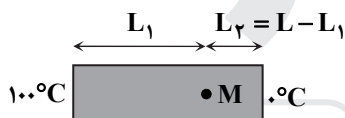
$$T_r = 300 + 30 = 330 \text{ K}$$

$$\text{قانون عمومی گازها: } \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_r V_r}{T_r} \Rightarrow \frac{75 \times V}{300} = \frac{(x + 75) \times V}{330}$$

$$\Rightarrow 75 \times 11 = 10(x + 75) = 10x + 75 \times 10 \Rightarrow 75 = 10x \Rightarrow x = 7.5 \text{ cm}$$

۱۹۳- پاسخ: گزینه ۳

جریانی گرمایی که در اثر رسانش عبور می‌کند، در دو قسمت میله یکسان است.



$$H_1 = H_r$$

$$\Rightarrow k \frac{A \Delta \theta_1}{L_1} = k \frac{A \Delta \theta_r}{L_r} \Rightarrow \frac{L_1}{L_r} = \frac{\Delta \theta_1}{\Delta \theta_r} = \frac{100 - 30}{30 - 0} = \frac{70}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{L_1}{L_1 + L_r} = \frac{70}{70 + 30} = 0.7$$

۱۹۴- پاسخ: گزینه ۱

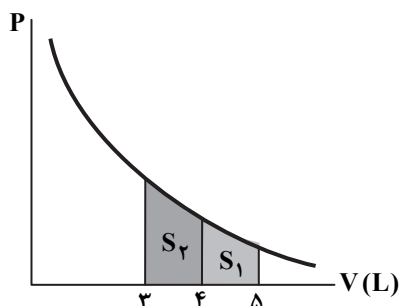
$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_r V_r}{T_r} \Rightarrow \frac{1/8 \times 10^{-5} \times 1/4}{280} = \frac{1 \times 10^{-5} \times V_r}{300} \Rightarrow V_r = \frac{300 \times 1/8 \times 1/4}{280} = 2/7 \text{ cm}^3$$

$$V_r - V_1 = 2/7 - 1/4 = 1/3 \text{ cm}^3$$

۱۹۵- پاسخ: گزینه ۲

با توجه به اینکه مساحت زیر نمودار $P-V$ برابر کار انجام شده روی گاز است، بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} S_r > S_1 \Rightarrow W_r > W_1 \\ \Delta U = W + Q \\ Q = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta U = W \Rightarrow \Delta U_r > \Delta U_1$$



۱۹۶- پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{Q_H}{Q_L} = \frac{5}{4}$$

$$K = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_L}{Q_H - Q_L} = \frac{Q_L}{\frac{5}{4} Q_L - Q_L} = 4$$

۱۹۷- پاسخ: گزینه ۲

$$T_b = T_c \Rightarrow P_b V_b = P_c V_c \Rightarrow P_b \times 5 = 10^5 \times 8 \Rightarrow P_b = 1/6 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_b = T_c \Rightarrow U_b = U_c$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{ac} &= \Delta U_{ab} = n C_V \Delta T \\ C_V &= C_P - R = \frac{5}{2} R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta U_{ac} = \frac{5}{2} n R (T_b - T_a)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} (P_b V_b - P_a V_a) = \frac{5}{2} P_b \Delta V \Rightarrow \frac{5}{2} \times 1/6 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3} = 720 \text{ J}$$

۱۹۸- پاسخ: گزینه ۱

گاز اکسیژن دو اتمی است و گرمای ویژه مولی آن $C_V = \frac{5}{2} R$ و گاز هلیوم تک اتمی است و گرمای ویژه مولی آن $C_V = \frac{3}{2} R$ است. با توجه به اینکه $Q = n C_V \Delta T$ است و گرمای ویژه مولی گاز اکسیژن بیشتر از گاز هلیوم است، پس تغییر دمای اکسیژن کمتر از هلیوم است.

$$k = \frac{\Delta T_{\text{He}}}{\Delta T_{\text{O}_2}} > 1$$

از طرفی در فرایند هم حجم، تغییر انرژی درونی گاز برابر با گرمای داده شده به آن است.

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= Q + W \\ W &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta U = Q$$

و چون گرمای هر دو یکسان است، پس تغییر انرژی درونی هر دو با هم برابر است.

۱۹۹- پاسخ: گزینه ۲

$$F = \frac{9}{5} \theta + 32 \Rightarrow 122 = \frac{9}{5} \theta + 32 \Rightarrow 90 = \frac{9}{5} \theta \Rightarrow \theta = 50^\circ \text{C}$$

$$T = 273 + \theta = 273 + 50 = 323 \text{ K}$$

۲۰۰- پاسخ: گزینه ۳

شیمی

۲۰۱- پاسخ: گزینه ۳

عبارت های «الف» و «ب» درست هستند.

بررسی عبارت های نادرست:

پ) واکنش FeO با Na انجام پذیر است؛ زیرا واکنش پذیری سدیم از آهن بیشتر است. در واکنش های انجام پذیر، واکنش پذیری فراورده ها از واکنش دهنده ها کمتر است.

ت) C واکنش پذیری کمتری از Na دارد؛ پس واکنش C با Na_2O به طور طبیعی انجام نمی شود. یعنی واکنش پذیری واکنش دهنده ها در آن کمتر از فراورده ها است.

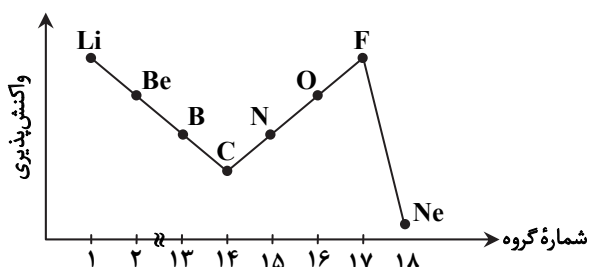
۲۰۲- پاسخ: گزینه ۲

در دوره سوم، عنصر Na ، Mg و Al فلز و بدون در نظر گرفتن گاز نجیب آرگون، عنصر P ، S و Cl نافلز هستند.

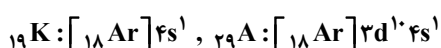
توجه: در دوره سوم، Si شبه فلز است.

۲۰۳- پاسخ: گزینه ۴

نمودار روند کلی تغییر واکنش پذیری عنصرهای دوره دوم جدول دوره ای به صورت زیر است. روند واکنش پذیری برای چهار عنصر نخست، کاهشی است.



۲۰۴- پاسخ: گزینه ۱



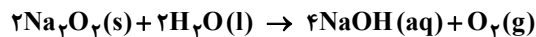
۲۰۵- پاسخ: گزینه ۲

$$\bar{M} = \frac{M_1 F_1 + M_2 F_2}{F_1 + F_2} \Rightarrow 14/2 = \frac{14F_1 + 16F_2}{F_1 + F_2} \Rightarrow 14/2 F_1 + 14/2 F_2 = 14F_1 + 16F_2 \Rightarrow 0/2 F_1 = 1/8 F_2$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{0/2}{1/8} = \frac{1}{9}$$

۲۰۶- پاسخ: گزینه ۲

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



$$\text{مجموع ضرایب} = 2 + 2 + 4 + 1 = 9$$

۲۰۷- پاسخ: گزینه ۴

معادله موازنه شده واکنش به صورت زیر است:



راه حل اول:

$$LiAlH_4 \text{ جرم مولی} = 7 + 27 + 4(1) = 38 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$11/2 \text{ L } H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{22/4 \text{ L } H_2} \times \frac{1 \text{ mol } LiAlH_4}{4 \text{ mol } H_2} \times \frac{38 \text{ g } LiAlH_4}{1 \text{ mol } LiAlH_4} = 4/75 \text{ g } LiAlH_4$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم ماده خالص}}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times 100 = \frac{4/75}{5} \times 100 = 95$$

راه حل دوم:

$$\frac{5 \times \frac{x}{100}}{1 \times 38} = \frac{11/2}{4 \times 22/4} \Rightarrow x = 95$$

۲۰۸- پاسخ: گزینه ۴

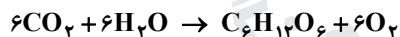
همه آهن موجود در سنگ معدن به صورت رسوب $Fe(OH)_3$ درآمده اند. در هر مول از این رسوب، ۱ مول آهن وجود دارد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$5/35 \text{ g } Fe(OH)_3 \times \frac{1 \text{ mol } Fe(OH)_3}{107 \text{ g } Fe(OH)_3} \times \frac{1 \text{ mol } Fe}{1 \text{ mol } Fe(OH)_3} \times \frac{56 \text{ g } Fe}{1 \text{ mol } Fe} = 2/8 \text{ g } Fe$$

$$\text{درصد جرمی آهن در سنگ معدن} = \frac{\text{جرم آهن}}{\text{جرم سنگ معدن}} \times 100 = \frac{2/8}{20} \times 100 = 14$$

۲۰۹- پاسخ: گزینه ۱

ابتدا واکنش را موازنه می کنیم:



راه حل اول:

$$66 \times 10^3 \text{ g } CO_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{44 \text{ g } CO_2} \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{6 \text{ mol } CO_2} \times \frac{180 \text{ g } C_6H_{12}O_6}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} = 45 \text{ kg } C_6H_{12}O_6$$

راه حل دوم:

$$\frac{66}{6 \times 44} = \frac{x}{1 \times 180} \Rightarrow x = 45 \text{ kg}$$

۲۱۰- پاسخ: گزینه ۴

همه عبارت های داده شده درست اند.

۲۱۱- پاسخ: گزینه ۴

همه عبارت های داده شده درست اند.

■ هر نقطه روی منحنی انحلال پذیری (B)، نشان دهنده محلول سیر شده است؛ زیرا در این حالت، ماده حل شونده دقیقاً به اندازه انحلال پذیری خودش در آن دما، در حلال حل شده است.

■ نقطه A (عرض از مبدأ نمودار)، انحلال پذیری نمک را در دمای $0^\circ C$ نشان می دهد.

■ هر نقطه زیر منحنی انحلال پذیری (D)، یک محلول سیر نشده را نشان می دهد.

■ هر نقطه بالای منحنی انحلال پذیری (C)، نشان دهنده محلول فراسیر شده است. در محلول فراسیر شده، مقدار ماده حل شونده بیشتر از مقدار انحلال پذیر آن ماده در همان دما است.

۲۱۲- پاسخ: گزینه ۳

۲۱۳- پاسخ: گزینه ۲

فرض می‌کنیم ۱۰۰ گرم محلول داریم:

$$\text{چگالی محلول} = \frac{\text{جرم محلول}}{\text{حجم محلول}} \Rightarrow 0.9 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1} = \frac{100 \text{ g}}{\text{حجم محلول}} \Rightarrow \text{حجم محلول} = \frac{100}{0.9} \text{ mL}$$

$$\Rightarrow \text{حجم محلول} = \frac{100}{0.9} \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} = \frac{1}{9} \text{ L}$$

$$\text{مول حل‌شونده} = \frac{23 \text{ g C}_7\text{H}_5\text{OH}}{46 \text{ g C}_7\text{H}_5\text{OH}} \times \frac{1 \text{ mol C}_7\text{H}_5\text{OH}}{1} = 0.5 \text{ mol C}_7\text{H}_5\text{OH}$$

$$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{مول حل‌شونده}}{\text{حجم محلول (L)}} = \frac{0.5 \text{ mol}}{\frac{1}{9} \text{ L}} = 4.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

روش تستی: اگر a درصد جرمی و d چگالی محلول برحسب $\text{g} \cdot \text{mL}^{-1}$ باشد، خواهیم داشت:

$$M = \frac{10ad}{\text{جرم مولی حل‌شونده}} = \frac{10 \times 23 \times 0.9}{46} = 4.5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

۲۱۴- پاسخ: گزینه ۳

راه حل اول:

ابتدا جرم Cl^- را در محلول نهایی به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه حجم محلول اضافه شده، ناچیز است. حجم محلول را با حجم آب اولیه برابر در نظر می‌گیریم. ۱۰ لیتر آب، معادل ۱۰ کیلوگرم آب است:

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 109/5 = \frac{\text{جرم Cl}^-}{10 \times 10^3} \times 10^6 \Rightarrow \text{جرم Cl}^- = 1.095 \text{ g}$$

حال از جرم Cl^- به حجم محلول هیدروکلریک اسید می‌رسیم:

$$1.095 \text{ g Cl}^- \times \frac{1 \text{ mol Cl}^-}{35.5 \text{ g Cl}^-} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol Cl}^-} \times \frac{36.5 \text{ g HCl}}{1 \text{ mol HCl}} \times \frac{100 \text{ g محلول}}{36.5 \text{ g HCl}} \times \frac{1 \text{ mL محلول}}{1.2 \text{ g محلول}} \approx 2.57 \text{ mL محلول}$$

راه حل دوم:

با توجه به رابطه‌های $M_1V_1 = M_2V_2$ ، $M = \frac{10ad}{\text{جرم مولی}}$ و $\text{ppm} \times 10^{-4} = \text{درصد جرمی}$ ، خواهیم داشت:

$$M_1V_1 = M_2V_2 \Rightarrow \frac{10 \times 36.5 \times 1/2}{36.5} \times V_1 = \frac{10 \times 109/5 \times 10^{-4} \times 1}{35.5} \times 10 \Rightarrow V_1 = 2.57 \text{ mL}$$

توجه: غلظت مولی Cl^- و HCl در محلول با هم برابر است.

۲۱۵- پاسخ: گزینه ۳

در مورد گزینه ۲، دقت کنید که مصرف کلسیم برای پیشگیری و ترمیم پوکی استخوان مفید است.

۲۱۶- پاسخ: گزینه ۱

مقدار گرما در سمت راست واکنش نوشته شده است؛ پس واکنش گرماده بوده و سطح انرژی فراورده در آن پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است.

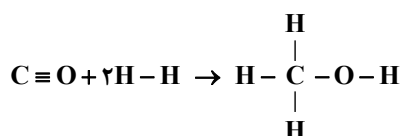
بررسی سایر گزینه‌ها:

(۲) با توجه به معادله واکنش، به ازای تولید هر دو مول آمونیاک 183 kJ انرژی تولید می‌شود.

(۳) واکنش گرماده است و با انجام آن در یک ظرف، دما افزایش می‌یابد.

(۴) در واکنش‌های گرماده، انرژی از سامانه به محیط جریان می‌یابد.

۲۱۷- پاسخ: گزینه ۳



$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$$

$$\Rightarrow \Delta H = [\Delta H(\text{C} \equiv \text{O}) + 2\Delta H(\text{H} - \text{H})] - [3\Delta H(\text{C} - \text{H}) + \Delta H(\text{C} - \text{O}) + \Delta H(\text{O} - \text{H})]$$

$$\Rightarrow \Delta H = [1075 + 2(436)] - [(3 \times 414) + 351 + 464] = 1947 - 2057 = -110 \text{ kJ}$$

۲۱۸- پاسخ: گزینه ۲

آب مانع تماس اکسیژن با فسفر سفید می‌شود و یک بازدارنده است.

۲۱۹- پاسخ: گزینه ۱

با توجه به نمودار، انرژی فعال‌سازی (E_a) واکنش برابر با 381 kJ است. باید به کمک آنتالپی پیوند، ΔH واکنش را هم محاسبه کنیم:

$$\Delta H = [2\Delta H(\text{N}=\text{O})] - [\Delta H(\text{O}=\text{O})] = (2 \times 607) - [444 + 496] = -226 \text{ kJ}$$

$$\Delta H + E_a = -226 + 381 = +155 \text{ kJ}$$

۲۲۰- پاسخ: گزینه ۱

$$\bar{R}(\text{PI}_3) = \left| \frac{\Delta n(\text{PI}_3)}{\Delta t} \right|$$

$$\left. \begin{aligned} |\Delta n(\text{PI}_3)| &= (20/6 - 4/12) \text{ g PI}_3 \times \frac{1 \text{ mol PI}_3}{412 \text{ g PI}_3} = 0.04 \text{ mol} \\ \Delta t &= 2 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 120 \text{ s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{R}(\text{PI}_3) = \frac{0.04}{120} = \frac{1}{3} \times 10^{-3} \approx 3/3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$$

با توجه به معادله واکنش و قانون پایستگی جرم، به ازای مصرف هر مول PI_3 ، سه مول HI تولید می‌شود:

$$0.04 \text{ mol PI}_3 \times \frac{3 \text{ mol HI}}{1 \text{ mol PI}_3} = 0.12 \text{ mol HI}$$

$$\text{غلظت مولی HI} = \frac{0.12 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 0.12 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

۲۲۱- پاسخ: گزینه ۳

در هر دو ترکیب اتین (C_2H_2) و هیدروژن سیانید (HCN)، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن برابر با ۱ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

$$1) \text{ اتن } (\text{C}_2\text{H}_2): \frac{\text{H}}{\text{C}} = \frac{2}{2} = 1, \text{ بوتان } (\text{C}_4\text{H}_{10}): \frac{\text{H}}{\text{C}} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$2) \text{ بنزن } (\text{C}_6\text{H}_6): \frac{\text{H}}{\text{C}} = \frac{6}{6} = 1, \text{ نفتالن } (\text{C}_{10}\text{H}_8): \frac{\text{H}}{\text{C}} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$4) \text{ بنزن } (\text{C}_6\text{H}_6): \frac{\text{H}}{\text{C}} = \frac{6}{6} = 1, \text{ سیکلوهگزان } (\text{C}_6\text{H}_{12}): \frac{\text{H}}{\text{C}} = \frac{12}{6} = 2$$

۲۲۲- پاسخ: گزینه ۴

برخی پلیمرها مانند پلی‌استرها و پلی‌آمیدها می‌توانند از مونومرهایی ساخته شوند که در ساختار خود پیوند دوگانه کربن-کربن ندارند.

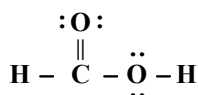
۲۲۳- پاسخ: گزینه ۲

فورمیک اسید (متانوئیک اسید) نخستین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها است و به دلیل داشتن گروه OH - می‌تواند با آب پیوند هیدروژنی برقرار می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) پرکاربردترین کربوکسیلیک اسید، استیک اسید (اتانوئیک اسید) است.

(۳) در ساختار فورمیک اسید، ۴ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد:

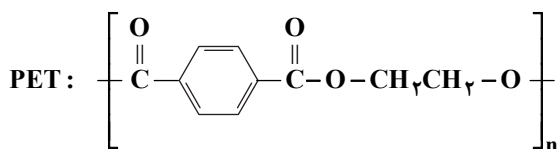


(۴) فورمیک اسید در طبیعت در نیش مورچه سرخ وجود دارد.

۲۲۴- پاسخ: گزینه ۴

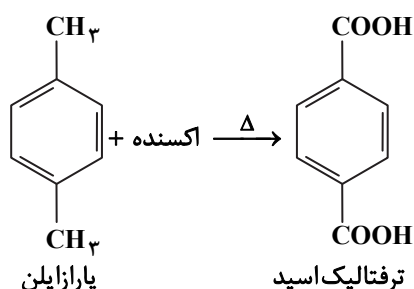
لاکتیک اسید، هر دو گروه عاملی اسیدی (COOH -) و گروه عاملی الکلی (OH -) را دارد؛ بنابراین می‌تواند با مولکول‌های خود واکنش

داده و یک پلی‌استر تولید کند. پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) هم پلی‌استر و دارای گروه عاملی استری ($-\text{C}(=\text{O})-\text{O}-$) است.



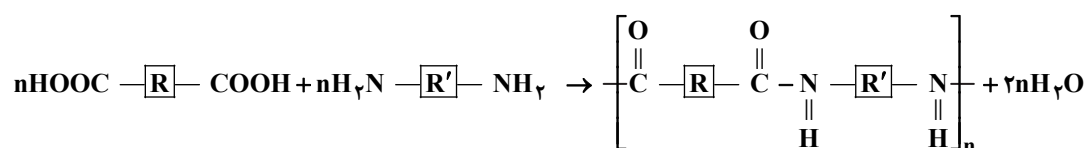
۲۲۵- پاسخ: گزینه ۱

از اکسایش پارازایلن در شرایط مناسب می توان ترفتالیک اسید تهیه کرد.



۲۲۶- پاسخ: گزینه ۲

از واکنش n مول دی آمین با n مول دی اسید، ۲n مول آب تشکیل می شود.



$$n = 10 \Rightarrow \text{شمار مول های آب} = 2(10) = 20$$

۲۲۷- پاسخ: گزینه ۳

برای افزایش قدرت پاک کنندگی شوینده ها باید به آن ها موادی اضافه کرد که در آب محلول باشند و با شوینده رسوب تشکیل ندهند. یون های Ca^{2+} و Mg^{2+} با شوینده رسوب تشکیل می دهند و آلومینیم هیدروکسید در آب نامحلول است؛ بنابراین سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین) درست است.

۲۲۸- پاسخ: گزینه ۴

باید ببینیم ۲۰۰ گرم آب سخت با چند گرم صابون واکنش می دهد:



$$200\text{ g آب سخت} \times \frac{200\text{ g Ca}^{2+}}{10\text{ g آب سخت}} \times \frac{1\text{ mol Ca}^{2+}}{40\text{ g Ca}^{2+}} \times \frac{2\text{ mol صابون}}{1\text{ mol Ca}^{2+}} \times \frac{236\text{ g صابون}}{1\text{ mol صابون}} = 4/72\text{ g صابون}$$

از ۴/۷۲ گرم صابون، همه آن (۱۰۰٪ آن) واکنش داده و به صورت رسوب درآمده است.

۲۲۹- پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اطلاعات داده شده، خواهیم داشت:

$$\text{درصد یونش} = \frac{[\text{H}^+]}{[\text{HA}]} \times 100 = \frac{4 \times 10^{-3}}{0/1} \times 100 = 4$$

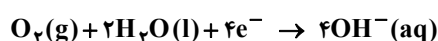
$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log(4 \times 10^{-3}) = 3 - \log 4 = 3 - 0/6 = 2/4$$

۲۳۰- پاسخ: گزینه ۱

نیم سلول استاندارد مس، شامل تیغه مس در محلول ۱ مولار کاتیون های Cu^{2+} است.

۲۳۱- پاسخ: گزینه ۳

در فرایند زنگ زدن آهن در هوای مرطوب، آهن نقش کاهنده و مولکول های اکسیژن نقش اکسنده دارند؛ پس گزینه ۳ درست است (آب نقش کاهنده و اکسنده ندارد). در نیم واکنش کاهش O_2 ، آب یکی از مواد واکنش دهنده است:



آب در زنگ زدن آهن، نقش الکترولیت را هم دارد؛ زیرا یون های Fe^{2+} تولید شده در آند برای کامل کردن مدار الکتریکی در قطره آب جریان می یابند و از قسمت آندی به قسمت کاتدی مهاجرت می کنند.

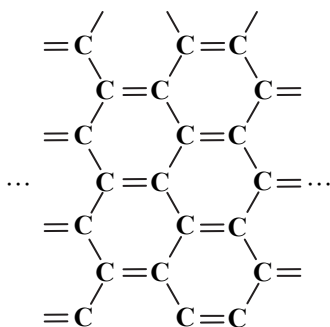
۲۳۲- پاسخ: گزینه ۴


در واکنش داده شده، M اکسایش یافته و نقش آند را دارد.

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = 1/56 = 0/8 - E^\circ_{\text{M}} = -0/76\text{ V}$$

با توجه به واکنش، M کاهنده تر از Ag و Ag^+ اکسنده تر از M است.

۲۳۳- پاسخ: گزینه ۱

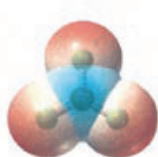
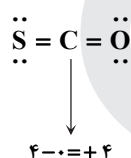


گرافن، تک لایه‌ای از گرافیت است و در آن، هر اتم کربن به ۳ اتم کربن دیگر متصل است و در ساختار آن، مانند بنزن () هر اتم کربن، یک پیوند دوگانه و دو پیوند یگانه تشکیل داده است.

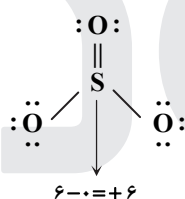
۲۳۴- پاسخ: گزینه ۲



کربونیل سولفید



گوگرد تری اکسید

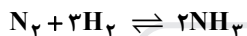


در کربونیل سولفید (SO_2) و گوگرد تری اکسید (SO_3)، به ترتیب اتم‌های کربن و گوگرد اتم مرکزی هستند. هر دوی این اتم‌ها، خاصیت نافلزی کمتری از اکسیژن دارند؛ به همین دلیل دارای بار جزئی δ^+ هستند (در نقشه پتانسیل، به رنگ آبی هستند). بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) گوگرد تری اکسید برخلاف کربونیل سولفید مولکول خطی نیست.
(۳) کربونیل سولفید، مولکول قطبی و گشتاور دوقطبی آن بزرگ‌تر از صفر است، در حالی که گوگرد تری اکسید، ناقطبی و گشتاور دوقطبی آن برابر با صفر است.

(۴) عدد اکسایش کربن در کربونیل سولفید +۴ است، در حالی که عدد اکسایش گوگرد در گوگرد تری اکسید، +۶ است.

۲۳۵- پاسخ: گزینه ۱



$$K = \frac{[\text{NH}_3]^2}{[\text{N}_2][\text{H}_2]^3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

در واکنش گرماده، با کاهش دما، تعادل در جهت رفت (تولید گرما) جابه‌جا شده و ثابت تعادل افزایش می‌یابد.