

۱) اگر $a = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{a + \frac{1}{a}} + \frac{1}{a - \frac{1}{a}}$ چقدر است؟

- ۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۲) اگر $a = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{a^3 + 1} + \frac{1}{a^3 - 1}$ چقدر است؟

- ۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۳) اگر $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}(12)^{-1/5}}$ باشد، حاصل $(1 + A^{-1})^{1/2}$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴) اگر $A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4/3}}$ باشد، حاصل $(2A)^{-1/3}$ کدام است؟

- ۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

سراسری-ریاضی-۹۸

۵) اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{(2 + \sqrt{3})^{3/4}} \times \sqrt[4]{(2 - \sqrt{3})^{3/4}}$ به صورت \sqrt{A} باشد، A کدام است؟

- ۱) $\sqrt{3} - 1$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{3} + 1$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶) حاصل عبارت $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[2]{2\sqrt[4]{6}}$ کدام است؟

- ۱) $6\sqrt[3]{2}$ ۲) $3\sqrt[6]{32}$ ۳) $2\sqrt[3]{9}$ ۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{a + \frac{1}{a}} + \frac{1}{a - \frac{1}{a}} = 2a \Rightarrow \frac{a - \frac{1}{a} + a + \frac{1}{a}}{a^2 - \frac{1}{a^2}} = 2a \Rightarrow 2a = 2a \left(a^2 - \frac{1}{a^2} \right) \Rightarrow a^2 - \frac{1}{a^2} = 1$$

$$a^2 - 1 = a^2 \Rightarrow a^2 = a^2 + 1$$

$$x = \frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{a^2 - a + 1} = \frac{a^2 - a + 1 + a^2 + a + 1}{(a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)} = \frac{2(a^2 + 1)}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{2a^4}{a^4 + a^2} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. داریم:

$$\frac{1}{a^r + 1} + \frac{1}{a^r - 1} = 2 \Rightarrow \frac{2a^r}{(a^r + 1)(a^r - 1)} = 2 \Rightarrow (a^r + 1)(a^r - 1) = a^r \Rightarrow a^r - 1 = a^r$$

$$\Rightarrow a^r = a^r + 1$$

$$\frac{1}{a^r - \sqrt{a^r} + 1} = \frac{1}{a^r + 1 - \sqrt{a^r}} \times \frac{a^r + 1 + \sqrt{a^r}}{a^r + 1 + \sqrt{a^r}} = \frac{a^r + 1 + \sqrt{a^r}}{(a^r + 1)^2 - a^r}$$

$$\frac{1}{a^r + \sqrt{a^r} + 1} = \frac{1}{a^r + 1 + \sqrt{a^r}} \times \frac{a^r + 1 - \sqrt{a^r}}{a^r + 1 - \sqrt{a^r}} = \frac{a^r + 1 - \sqrt{a^r}}{(a^r + 1)^2 - a^r}$$

جمع دو کسر بالا:

$$\frac{a^r + 1 + \cancel{\sqrt{a^r}}}{(a^r + 1)^2 - a^r} + \frac{a^r + 1 - \cancel{\sqrt{a^r}}}{(a^r + 1)^2 - a^r} = \frac{2(a^r + 1)}{(a^r + 1)^2 - a^r} = \frac{2(a^r + 1)}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{2(a^r + 1)}{(a^r + 1) + (a^r + 1)}$$

$$= \frac{2(a^r + 1)}{2(a^r + 1)} = 1$$

حاصل داخل پرانتز یک می‌شود پس به توان ۱۴۰۱ همان یک می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \sqrt[9]{\sqrt{3}(12)^{-1/5}} = \sqrt[9]{3^2 \times 3^{1/5}} \cdot \frac{1}{12^{1/5}} = \sqrt[9]{3^{2 + 1/5}} \cdot \frac{1}{(2^2)^{1/5} \times 3^{2/5}} = \frac{3^{11/5}}{2^2 \times 3^{2/5}}$$

$$= \frac{1}{2^2 \times 3^{2/5 - 11/5}} = \frac{1}{8 \times 3} = \frac{1}{24}$$

$$(1 + A^{-1})^{1/5} = (1 + 24)^{1/5} = (25)^{1/5} = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = \sqrt[9]{\sqrt{2^2} \sqrt{2^4}} \cdot 2^{2/3} = \sqrt[9]{2^2 \times 2^4} \times 2^{2/3} = \sqrt[9]{2^{10}} \cdot 2^{2/3} \Rightarrow A = \left(2^{10/9} \right)^{1/5} \cdot 2^{2/3}$$

$$= 2^{2/3} \cdot 2^{2/3} = 2^2 \Rightarrow (2A)^{-1/3} = (2^2)^{-1/3} = 2^{-1} = 1/2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{A} &= (2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (2 + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} \sqrt[3]{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 (2 + \sqrt{3})^2} (\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} = \sqrt{((2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}))^2} (\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} \\ &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow A = \sqrt{3} - 1\end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۶

$$\begin{aligned}\sqrt[12]{12^2} \times \sqrt[12]{54^3} \times \sqrt[12]{2^4 \times 6} &= \sqrt[12]{(2^2 \times 3)^2} \times \sqrt[12]{(3^3 \times 2)^3} \times \sqrt[12]{2^4 \times 2 \times 3} \\ \sqrt[12]{2^4 \times 3^2} \times \sqrt[12]{3^9 \times 2^3} \times \sqrt[12]{2^5 \times 3} &= \sqrt[12]{2^{12} \times 3^{12}} = 2 \times 3 = 6\end{aligned}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴

