۱ رابطه $f=\left\{(۲,۳n^۲-۱),(۱,۱),\left(۳,\frac{۱}{n}\right),(۲,۲n),(n,۲)\right\}$ تابع است. مقدار تابع f در ۳، کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳- ۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲ رابطه $f=\left\{(۷,۱-۳n^۲),(۱,-۱),(۲,n),(۷,-۲n),\left(\frac{۱}{n},۲\right)\right\}$ تابع است. مقدار تابع f در ۲، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱- ۴) ۱

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۳ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳}+۲a & |x|\leq ۱\\ ax^۲+۵ & |x|\geq ۱\end{cases}$، ضابطه تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۴۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۵ ۴) ۱۴

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴ حداقل چند عضو از مجموعه $f=\left\{(x,y)|x,y\in Z,x=\frac{۳۰}{۱+|y|}\right\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵ حداقل چند عضو از مجموعه $f=\left\{(x,y)|x,y\in Z,x=\frac{۷۲}{y^۲-۱}\right\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۶ نمودار $\frac{۱}{f}$ را در امتداد محور xها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن‌را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{۱}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a)=۳$ کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۷) اگر $f(x)=(\mathrm{ax}+۲)(b-x)-۷x^۲$ ضابطهٔ یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $-\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۸) نمودار تابع با ضابطه $f(x)=۴x-x^۲$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۹) دو تابع $f(x)=b-۳\,\mathrm{ax}$ و $g(x)=c-(۳b-۳)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=۵$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۶

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰) در بازه‌ی (a,b)، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\left|۲x^۲-۴\right|$ در زیر خط $y=۲x$ واقع است. بیش‌ترین مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سراسری-تجربی-۹۹

۱۱) به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y=۲\mathrm{x}^۲+(m+۱)x+m+۶$، بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

۱) -۴ ۲) $-۱۲,۴$ ۳) $۱۲,-۴$ ۴) ۱۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۲)

۱) ۲) ۳) ۲ ۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۳) رابطه‌ی $\left\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\right\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) هیچ‌مقدار m

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۴) نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\mathrm{ax}^۲+\mathrm{bx}+c$، محور xها را در نقطه‌ای به طول یک و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه $(-۲,-۶)$ می‌گذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۵ ۴) -۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$۳n^۲-۱=۲n \Rightarrow ۳n^۲-۲n-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=۱ \Rightarrow f=\{(۲\,,\,۲),(۱\,,\,۱),(۳\,,\,۱),(۱\,,\,۲)\} \quad \times \\ n=-\frac{۱}{۳} \checkmark \Rightarrow \left(۳\,,\,\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}}\right)=(۳\,,\,-۳) \end{cases}$$

۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$۱-۳n^۲=-۲n \Rightarrow ۳n^۲-۲n-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=۱ \\ n=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$n=۱ \Rightarrow f=\{(۷,-۲),(۱,-۱),(۲,۱),(۷,-۲),(۱,۲)\} \quad \times$$

$$n=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow f=\left\{\left(۷,\frac{۲}{۳}\right),(۱,-۱),\left(۲,-\frac{۱}{۳}\right),\left(۷,\frac{۲}{۳}\right),(-۳,۲)\right\} \Rightarrow f(۲)=-\frac{۱}{۳}$$

۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^۲+۳}+۲a & -۱\leq x\leq ۱ \\ ax^۲+۵ & x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \end{cases}$$

$$x=۱ \Rightarrow ۲+۲a=a+۵ \Rightarrow a=۳$$

$$f(a)=f(۳)=۲۷+۵=۳۲$$

۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$۱+|y| \in \{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\}$$

$$|y| \in \{۰,۱,۲,۴,۵,۹,۱۴,۲۹\} \Rightarrow y \in \{۰,\pm۱,\pm۲,\pm۴,\pm۵,\pm۹,\pm۱۴,\pm۲۹\}$$

پس ۷ عضو باید حذف شود تا به ازای هر x فقط یک y وجود داشته باشد.

۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید ۷۲ بر $y^۲-۱$ بخشپذیر باشد، پس:

$$y^۲=۰,۴,۹,۲۵ \Rightarrow y=۰,\pm۲,\pm۳,\pm۵$$

$\Rightarrow f=\{(-۷۲,۰),(۲۴,\pm۲),(۹,\pm۳),(۳,\pm۵)\}$ ۳ عضو باید حذف شود.

۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

همانی $f \Rightarrow f(x)=x$

$$g(x)=\frac{۱}{x-a} \Rightarrow |g(x)|-۲=\left|\frac{۱}{x-a}\right|-۲=\frac{۱}{|x|} \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\frac{۱}{\left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a\right|}=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+۲=۲+\sqrt{۲} \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a\right|=\frac{۱}{۲+\sqrt{۲}}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{۲}}{۲}-a=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a_۱=\sqrt{۲}-۱ \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲}-a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۱ \Rightarrow a_۲=۱ \end{cases} \Rightarrow a_۲-a_۱=۱-(\sqrt{۲}-۱)=۲-\sqrt{۲}$$

توجه: چون تابع f همانی است پس اختلاف جواب‌های $f(x+a)=۳$ همان اختلاف دو مقداری است که برای a به دست آمده است.

۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
$$f(x) = -ax^{2} - 7x^{2} + abx - 2x + 2b$$
$$-a - 7 = 0 \Rightarrow a = -7$$
$$-7bx - 2x = 0 \Rightarrow -7\cancel{bx} = \cancel{2x} \Rightarrow b = \frac{-2}{7}$$
$$f(x) = 2b = \frac{-4}{7}$$

۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
$$4(x+2) - (x+2)^{2} = -x^{2} + 4$$ منحنی جدید
$$4x - x^{2} = -x^{2} + 4 \Rightarrow x = 1$$
نقطه تلاقی $(1, 3)$ $\quad OA = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع ثابت نباید x داشته باشد، پس: $a = 0, b = 1$

چون: $f + g = 5 \Rightarrow b + c = 5 \xrightarrow{b=1} c = 4$

۱۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
$$2x^{2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$
$$x \geq \sqrt{2} \Rightarrow 2x^{2} - 4 < 2x \Rightarrow x^{2} - x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$
$$x \geq \sqrt{2} \cap -1 < x < 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq x < 2 \ (1)$$
$x < \sqrt{2} \Rightarrow -2x^{2} + 4 < 2x \Rightarrow x^{2} + x - 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2$ یا $x > 1$
$$x < \sqrt{2} \cap ((-\infty, -2) \cup (1, +\infty)) = 1 < x < \sqrt{2} \ (2)$$
$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} = (1, 2) \Rightarrow b - a = 2 - 1 = 1$$

۱۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. باید معادله‌ی تلاقی نمودار تابع $y = 2x^{2} + (m+1)x + m + 6$ با نیم‌ساز ناحیه‌ی اول $(y = x)$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.
$$2x^{2} + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^{2} + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m^{2} - 4(2)(m+6) = 0$$
$$\Rightarrow m^{2} - 8m - 48 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$
چون تأکید شده نمودار بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول مماس است. ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی تلاقی (طول نقطه‌ی تماس) باید مثبت باشد.

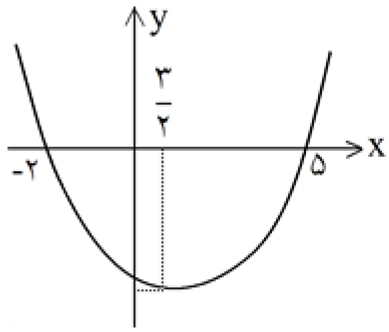
$m = 12 \Rightarrow 2x^{2} + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^{2} + 6x + 9 = 0$ ریشه‌ی مضاعف منفی دارد.

$m = -4 \Rightarrow 2x^{2} - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^{2} - 2x + 1 = 0$ ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد.

پس $m = -4$ صحیح است. نمودار بر نیم‌ساز ربع اول مماس است.

۱۲ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = x^{۲} - ۳x - ۱۰$ یک سهمی قائم است که محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

$y = ۰ \Rightarrow x^{۲} - ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲) = ۰ \Rightarrow x = ۵, x = -۲$ با توجه به آن‌که سهمی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کرده است. اگر سهمی را ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، سهمی از مبدأ خواهد گذشت و دیگر طول تلاقی‌اش با محور xها منفی نیست. به نمودار روبه‌رودقت کنید.



۱۳ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای‌این‌که رابطه‌ی $\left\{(۳, m^{۲}), (۲, ۱), (-۲, m), (۳, m+۲), (m, ۴)\right\}$ یک تابع باشد، نباید دو (یا چند) زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول یکسان در آن رابطه وجود داشته باشند. دقت کنیم اگر در تابعی دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن ها نیز مساوی باشند تا آن دو زوج مرتب برابر شده و در واقع تبدیل به یک زوج مرتب شوند. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در دو زوج مرتب اول و چهارم، مؤلفه‌های اول یکسان می‌باشند. در نتیجه با برابر قرار دادن مؤلفه‌های دوم آن دو، داریم:

$$m^{۲} = m + ۲ \Rightarrow m^{۲} - m - ۲ = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = -۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \left\{(۳,۱)\text{و}(۲,۱)\text{و}(-۲,-۱)\text{و}(۳,۱)\text{و}(-۱,۴)\right\} \Rightarrow \text{تابع است} \\ m = ۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \left\{(۳,۴)\text{و}(۲,۱)\text{و}(-۲,۲)\text{و}(۳,۴)\text{و}(۲,۴)\right\} \Rightarrow \text{تابع نیست} \end{cases}$$

$m = ۲$ قابل قبول نمی‌باشد چون به‌ازای آن دو زوج مرتب دوم و پنجم مؤلفه‌های اول یکسان می‌شوند اما مؤلفه‌های دوم برابر نمی‌شوند.

۱۴ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. بدیهی است نقاط $(۱,۰)$ و$(۰,-۶)$ و$(-۲,-۶)$ در تابع $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ صدق می‌کنند.

$$(۰,-۶) \Rightarrow c = -۶$$

$$(۱,۰) \Rightarrow a + b - ۶ = ۰$$

$$(-۲,-۶) \Rightarrow ۴a - ۲b - ۶ = -۶ \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۶ \\ ۲a - b = ۰ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۴ \end{cases} \end{cases}$$

پس تابع داده شده به صورت $f(x) = ۲x^{۲} + ۴x - ۶$ خواهد بودکه $f(-۱)$ برابراست با: $f(-۱) = ۲ - ۴ - ۶ = -۸$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	**۳**	۴
۲	**۱**	۲	۳	۴
۳	۱	**۲**	۳	۴
۴	**۱**	۲	۳	۴
۵	۱	**۲**	۳	۴
۶	۱	۲	**۳**	۴
۷	۱	۲	**۳**	۴
۸	۱	۲	۳	**۴**
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	**۱**	۲	۳	۴
۱۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۴	**۱**	۲	۳	۴