



۱ در گراف G ، $\Delta(G) + \delta(G) = 12$ ، $\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = 2$ و G با حداقل تعداد رأس رسم شده است. اگر \bar{G} همبند باشد، کمترین تعداد یال‌های آن کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲ در گراف G ، $\Delta(G) + 2\delta(G) = 17$ ، $\Delta(\bar{G}) - \delta(\bar{G}) = 2$ و G با حداقل تعداد رأس رسم شده است. اگر \bar{G} همبند باشد، بیشترین تعداد یال‌های گراف G ، کدام است؟

- ۱) ۳۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۶ ۴) ۲۴

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۳ در گراف G ، $|V(G)| = 8$ و $|E(G)| = 24$ است. کمترین مقدار ممکن برای $\delta(G)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴ حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G برابر ۴۳۲ است. اگر گراف G با حداقل تعداد یال رسم شود، حاصل $\delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام است؟

- ۱) ۳۱ ۲) ۲۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵ حاصل ضرب درجه رأس‌های گراف G ، ۴۸ است. اگر تعداد رأس‌ها با درجه رأس یک حداقل باشد، حاصل $\Delta(\bar{G}) + q(\bar{G})$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) ۱۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۹ ۴) ۱۳

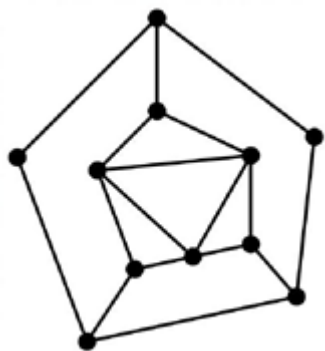
سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۶ اگر در گراف ساده G ، $|V(G)| = 18$ ، $\Delta(G) = 8$ و $\delta(G) = 3$ باشند، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای اندازه گراف G کدام است؟

- ۱) ۴۰ ۲) ۳۸ ۳) ۳۹ ۴) ۳۷

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱





۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۸ در گراف G با درجه رأس‌های ۳، ۳، ۴، ۵، ۶، x ، y ، کمترین مقدار $x + y$ کدام است؟

۳ (۱)

۵ (۲)

۷ (۳)

۴ (۴)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۹ در گراف G ، مجموعه همسایگی باز هر رأس دارای ۳ عضو است. اگر $q(\overline{G}) = 6q(G)$ باشد، مقدار $p(G)$ کدام است؟

۲۴ (۱)

۲۲ (۲)

۲۰ (۳)

۱۸ (۴)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۰ در گراف G ، مجموعه همسایگی بسته هر رأس دارای ۴ عضو است. اگر $p(G) = 6$ باشد، مقدار $q(G)$ چقدر است؟

۹ (۱)

۱۵ (۲)

۱۲ (۳)

۱۰ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱ در گراف با درجه رأس‌های ۱، ۱، ۳، ۳، ۳، ۳، دو رأس با کمترین درجه، غیرمجازند. تعداد دورها به طول ۳ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲ در گراف G ، مجموعه همسایگی باز هر رأس دارای ۲ عضو است. اگر $q(\overline{G}) = 3q(G)$ باشد، مقدار $p(G)$ کدام است؟

۵ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۳ گراف G با ۹ رأس، غیرتهی، غیرکامل و $-K$ منتظم است. بیشترین مقدار K ، کدام است؟

۴ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۴ درجه رأس‌های یک گراف ساده و همبند به صورت اعداد $a, b, c, 3, 4, 4, 5$ هستند. اگر تعداد یال‌های این گراف $5/1$ برابر $(a + b + c)$ باشد، چند حالت مختلف برای مجموعه $\{a, b, c\}$ وجود دارد؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۳ (۳)

۲ (۴)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۵ در یک گراف کامل $q(G) = \Delta^2(G) - 2\delta(G)$ است. مقدار $p(G)$ کدام است؟

۸ (۴)

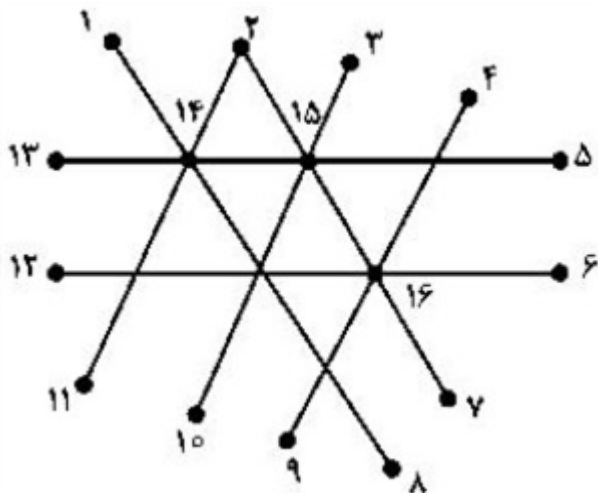
۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۶ برای گراف زیر، عدد احاطه‌گری مینیمال کدام است؟



۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۷ اگر درجه‌ی دو رأس یک درخت مرتبه‌ی ۸، برابر ۳ و ۵ باشد، تعداد رئوس با درجه‌ی ۲ از درخت موردنظر، کدام است؟

۳ (۴)

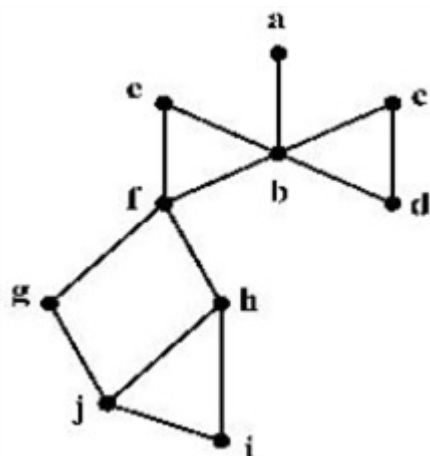
۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸ در گراف زیر، مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال، کدام است؟



$\{a, c, f, j\}$ (۴)

$\{a, c, h\}$ (۳)

$\{b, g, i\}$ (۲)

$\{b, h\}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۹ کوچک‌ترین اندازه‌ی گراف ساده همبند از مرتبه‌ی ۷ که بزرگ‌ترین درجه‌ی رئوس آن ۳ باشد، کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۲۰ در یک گراف ۵ رأسی $K -$ منتظم با بیش‌ترین مقدار ممکن K ، تعداد دورها با طول ۴، کدام است؟

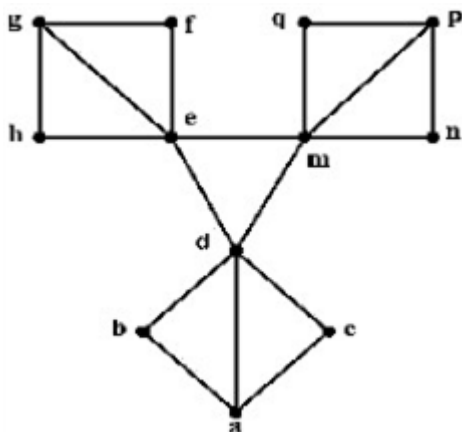
۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

درجه‌ی رأس‌های یک گراف ۵، ۴، ۴، ۳، ۳ و ۱ است. چند دور با طول ۴، موجود است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

فرض کنید P_n با ۴ یال باشد. تعداد رأس‌های آن کدام است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

در یک گراف ۷ رأسی غیرتهی و غیرکامل k - منتظم، K چند عدد می‌تواند اختیار کند؟

۴ (۴)

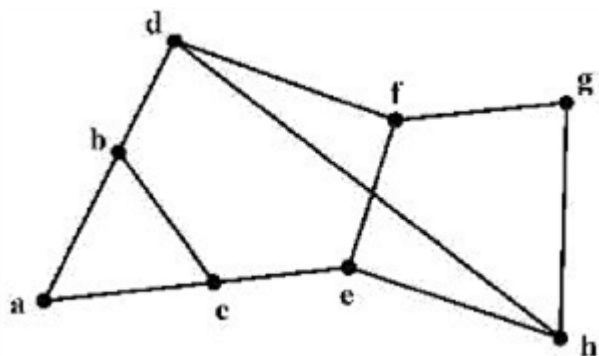
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

در گراف زیر، کدام مجموعه، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال، نیست؟

 $\{c, f, h\}$ (۴) $\{b, c, g\}$ (۳) $\{a, f, g\}$ (۲) $\{a, e, g\}$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

اگر درجه‌ی رأس‌های یک گراف ۴، ۴، ۲، ۲، ۲ و ۲ باشد، تعداد تمام دورهای موجود، کدام است؟

۶ (۴)

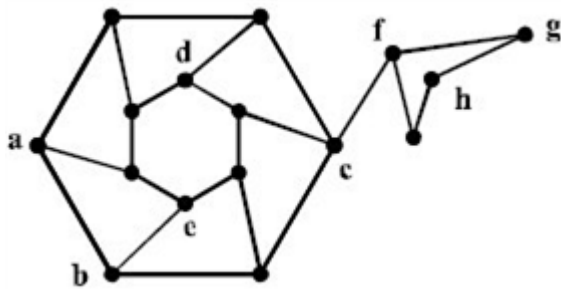
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

کدام مجموعه، برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال است؟



$\{a, c, e, d, g\}$ (۴)

$\{a, c, e, d, h\}$ (۳)

$\{b, c, e, d, g\}$ (۲)

$\{a, b, c, d, h\}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

در یک گراف با درجه‌ی رأس‌های ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، تعداد دورها با طول ۳، کدام است؟

۶ (۴)

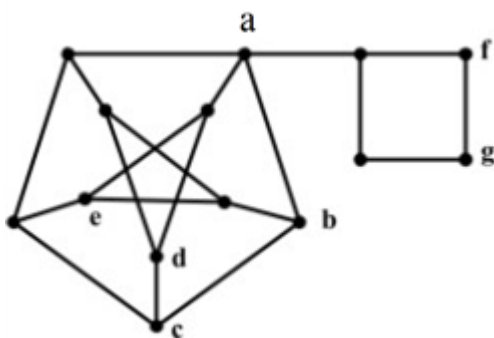
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال است؟



$\{a, d, e, f\}$ (۴)

$\{a, b, d, e\}$ (۳)

$\{a, d, e, g\}$ (۲)

$\{a, c, e, g\}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

یک گراف ساده ۶ رأسی ۴-منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

یک گراف کامل از مرتبه‌ی ۵ چند دور با طول ۴، دارد؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

چند نوع گراف ساده همبند فاقد دور، می‌توان یافت که مجموع مرتبه و اندازه آن ۱۱ باشد؟

۶ (۴)

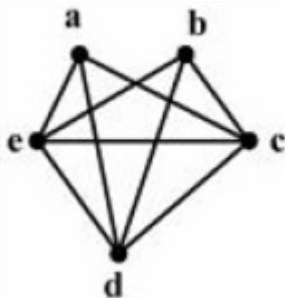
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

در گراف کامل از مرتبه‌ی ۵، یال ab حذف شده است. چند دور با طول ۴ در این گراف موجود است؟



۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

در گرافی با دنباله‌ی درجه رأس‌ها به صورت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۴ و ۴، تعداد دورها با طول ۵، کدام است؟

صفر (۴)

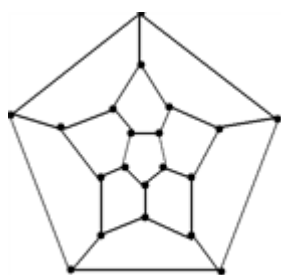
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

گراف مقابل دوری با طول m دارد. بزرگ‌ترین عدد m کدام است؟



۲۱ (۴)

۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

چند نوع گراف ساده و همبند، وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن ۹ باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

گراف ناهمبند ۳- منتظم دارای ۱۲ یال است. این گراف چند دور با طول ۴ دارد؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

در یک گراف ساده‌ی ناهمبند و ۳- منتظم که دارای ۸ راس باشد، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

در یک گراف کامل حاصل‌ضرب اندازه و مرتبه‌ی آن ۵۰ می‌باشد، در این گراف چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

۱۶ (۴)

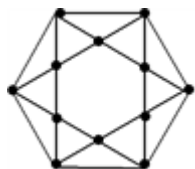
۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

گراف شکل مقابل، چند دور با طول ۵ دارد؟



۴ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۱۲ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۱

در یک گراف ساده با درجه رأس‌های ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴ که دو رأس با می‌نیمم درجه مجاورند، تعداد دورها با طول ۶ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴) صفر

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۲

گراف شکل مقابل شامل چند دوره با طول ۵ است؟



۷ (۱)

۸ (۲)

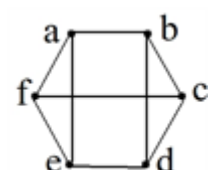
۹ (۳)

۱۲ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۳

در گراف ۳-منتظم مقابل، چند دور با طول ۵ وجود دارد؟



۳ (۱)

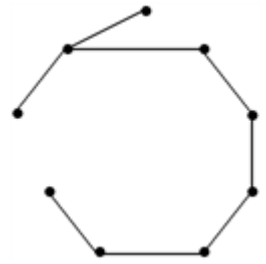
۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} \Delta(G) + \delta(G) &= 12 \\ (P - 1 - \delta(G)) - (P - 1 - \Delta(G)) &= 2 \\ \Rightarrow \Delta(G) - \delta(G) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta(G) = 7 \\ \delta(G) = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{همه } \bar{G}} \min(P) = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta(\bar{G}) = 3 \\ \delta(\bar{G}) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{همه } \bar{G}} \min(q(\bar{G})) = 8$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. \bar{G} همبند است پس $\delta(\bar{G}) \geq 1$. چون می‌خواهیم یال‌های G زیاد شود یال‌های (\bar{G}) را تا حد امکان کم می‌گیریم پس $\Delta(\bar{G}) = 3$, $\delta(\bar{G}) = 1$ فرض کنیم. در این صورت با $p = 8$ رابطه اول نمی‌تواند درست باشد چون:

$$3 + \square = 7 \Rightarrow \square = 4 \Rightarrow \delta(G) = 4$$

$$1 + \bigcirc = 7 \Rightarrow \bigcirc = 6 \Rightarrow \Delta(G) = 6$$

اگر $p = 9$ باشد و $\Delta(\bar{G}) = 3$, $\delta(\bar{G}) = 1$

$$3 + \square = 8 \Rightarrow \delta(G) = 5 \quad \Delta + 2\delta = 17 \quad \checkmark$$

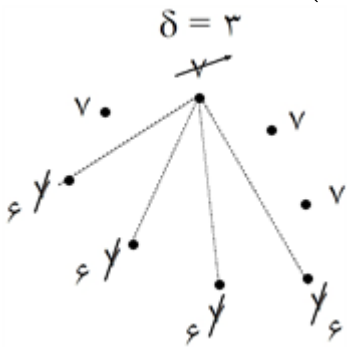
$$1 + \bigcirc = 8 \Rightarrow \Delta(G) = 7$$

اگر \bar{G} همبند باشد حداقل ۸ یال می‌خواهد که با $q(\bar{G}) = 8$ می‌تواند شرایط $\Delta(\bar{G}) = 3$ و $\delta(\bar{G}) = 1$ رعایت شود

$$q_{\max} = \frac{9 \times 8}{2} - 8 = 28$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

\Rightarrow از گراف k_8 باید ۴ تا یال جدا کنیم $\Rightarrow q = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$: اگر G کامل می‌بود



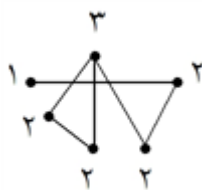
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن‌که حداقل یال را داشته باشیم، درجه رأس‌ها باید کمترین باشد پس:

$$G : 432 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1$$

$$2q = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 \Rightarrow q(G) = 9$$

$$P = 8 \Rightarrow q_{k_8} = \binom{8}{2} = 28 \Rightarrow q(\bar{G}) = 19$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta(G) &= 3 \\ \delta(\bar{G}) + \Delta(G) &= P - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta(\bar{G}) = 4 \Rightarrow q(\bar{G}) + \delta(\bar{G}) = 23$$



$$5 - 1 = 4 \quad \quad \quad 15 - 6 = 9 \Rightarrow \binom{6}{2}$$

$$3 \times 4 \times 4$$

یا

$$48 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\Rightarrow \Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 4 + 9 = 13$$

$$\Rightarrow \Delta(\bar{G}) + q(\bar{G}) = 3 + 4 = 7$$

$$4 - 1 = 3$$

$$\binom{5}{2} - 6 = 10 - 6 = 4$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مرتبهٔ گراف برابر ۱۸ است. برای داشتن بیشترین تعداد یال، رأس‌های از درجهٔ Δ و برای داشتن کمترین تعداد یال، رأس‌های از درجهٔ δ را ماکزیمم می‌کنیم. چون تعداد رأس‌های فرد گراف همواره عددی زوج است، بنابراین داریم:

$$\text{حالت ماکزیمم} : 8, 8, \dots, 8, 7, 3 \Rightarrow 2q_{\max} = 16 \times 8 + 7 + 3 = 138 \Rightarrow q_{\max} = 69$$

۱۶ رأس

$$\text{حالت مینیمم} : 8, 4, 3, 3, \dots, 3 \Rightarrow 2q_{\min} = 8 + 4 + 16 \times 3 = 60 \Rightarrow q_{\min} = 30$$

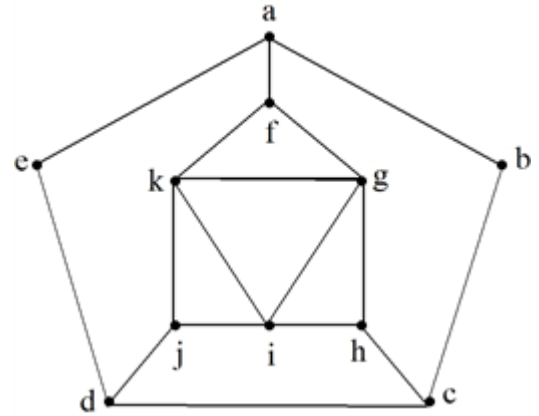
۱۶ رأس

$$q_{\max} - q_{\min} = 69 - 30 = 39$$

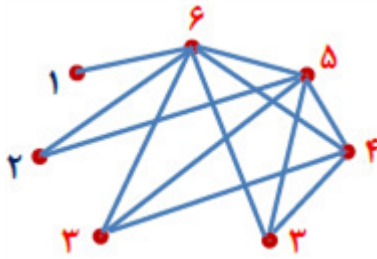
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرتبه گراف G ، برابر $n = 11$ و ماکزیمم درجه در این گراف، برابر $\Delta = 4$ است، بنابراین داریم:

$$\sigma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{11}{5} \right\rceil = 3$$

از طرفی مجموعه $A = \{a, i, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است، پس $\sigma(G) = 3$.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. کافی است رسم شکل تابع را انجام دهیم:



$$x = 2, y = 1 \Rightarrow x + y = 2 + 1 = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. این گراف ۳-منتظم است. اگر گراف دارای n رأس باشد، درجه هر رأس مکمل برابر $-(n - 4)$ است. داریم:

$$nr = 2q_G \xrightarrow{r=3} q_G = \frac{3n}{2}, nr = 2q_{\bar{G}} \xrightarrow{r=n-4} q_{\bar{G}} = \frac{(n-4)n}{2}$$

$$q_{\bar{G}} = 6q_G \Rightarrow \frac{(n-4)n}{2} = 6 \times \frac{3n}{2} \Rightarrow n - 4 = 18 \Rightarrow n = 22$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مجموعه همسایگی بسته هر رأس شامل خود آن رأس و همسایه‌هایش است. پس به‌جز خودش هر رأس با ۳ رأس دیگر مجاور است و گرافی ۳-منتظم داریم.

$$kp = 2q \Rightarrow 3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گراف را رسم می‌کنیم.



در شکل واضح است که گراف مقابل ۲ دور به طول ۳ خواهد داشت!

۱۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تعداد اعضای همسایه‌های باز همان درجه رئوس است پس درجه رئوس گراف

$$r.p = 2q \xrightarrow{r=2} 2p = 2q$$

همگی ۲ می‌باشد یعنی ۲- منتظم پس:

می‌دانیم:

$$q(G) + q(\bar{G}) = q_{kp} \xrightarrow[p=q]{q(\bar{G})=2q_G} 2q = \frac{q(q-1)}{2} \Rightarrow q-1=8 \Rightarrow q=9 \Rightarrow p=9$$

از طرفی

۱۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر k برابر ۸ باشد، گرافی کامل خواهیم داشت که غیرقابل قبول است و چون می‌دانیم k

عددی فرد نمی‌تواند باشد، پس $k=6$ بیشترین مقدار قابل قبول برای k است.

نکته: گراف فرد - منتظم مرتبه فرد نداریم.

۱۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sum \deg V_i = 2q \Rightarrow 5 + 4 + 4 + 3 + a + b + c = 2 \times 1 / 5 \times (a + b + c)$$

$$\Rightarrow a + b + c = 8 \xrightarrow{\text{راس ایزوله نداریم}} \{5, 2, 1\} \{4, 3, 1\} \{4, 2, 2\} \{3, 3, 2\}$$

$$\text{گزینه ۲ پاسخ صحیح است.} \quad q = \binom{p}{2}, \delta = \Delta = p - 1$$

$$q = \Delta^2 - 2\delta \Rightarrow \frac{P(P-1)}{2} = (P-1)^2 - 2(P-1) \Rightarrow \frac{P}{2} = P-1-2 \Rightarrow 2P-6 = P \Rightarrow P=6$$

۱۶

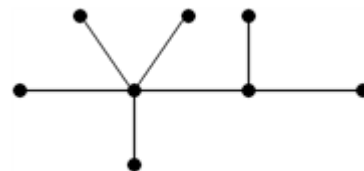
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سه رأس ۱۴، ۱۵ و ۱۶، تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند، پس مجموعه‌ی $\{14, 15, 16\}$ یک

مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم برای گراف بوده و عدد احاطه‌گری گراف برابر ۳ است.

۱۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل این درخت فاقد رأس درجه‌ی ۲ است. منظور از درخت، گراف همبند فاقد دور

است.



تذکر: مبحث درخت در گراف در کتاب نظام جدید ریاضیات گسسته موجود نیست.

۱۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه‌ی ۱: مجموعه‌ی $\{b, h\}$ قادر به احاطه‌ی رأس g نیست.

گزینه‌ی ۲: مجموعه‌ی $\{b, g, i\}$ قادر به احاطه‌ی تماس رئوس گراف است.

گزینه‌ی ۳: مجموعه‌ی $\{a, c, h\}$ قادر به احاطه‌ی رئوس e و g نیست.

گزینه‌ی ۴: مجموعه‌ی موردنظر تمام رئوس را احاطه می‌کند و با حذف هرکدام از اعضای آن احاطه‌گری از بین می‌رود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل کوچک‌ترین اندازه‌ی گراف ساده‌ی همبندی از مرتبه‌ی ۷ که در آن $\Delta = 3$

۱۹

باشد، برابر ۶ است.



$$p = \text{فرد} \xrightarrow{r \text{ منتظم}} \begin{cases} r = \text{زوج} \\ 0 \leq r \leq 4 \end{cases} \Rightarrow r_{\text{Max}} = 4 \Rightarrow K_5 = \text{منتظم مرتبه } 54$$

$$\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2} : K_p \text{ در } m \text{ طول به دور}$$

$$\xrightarrow{K_5} \text{دور به طول } 4 \rightarrow \binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا رئوسی را می‌یابیم که احاطه‌گر باشند و سپس تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر مینیمال را شمار می‌کنیم:

سه مجموعه $\{a, d\}$, $\{g, e\}$, $\{m, p\}$ را در نظر می‌گیریم، از هر مجموعه یک عضو انتخاب کرده به کمک اصل ضرب

$$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 8 \quad \text{جواب یافت می‌شود:}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رأس f را کنار می‌گذاریم. اگر یال ed را اضافه کنیم، گراف کامل مرتبه ۵ ساخته می‌شود.

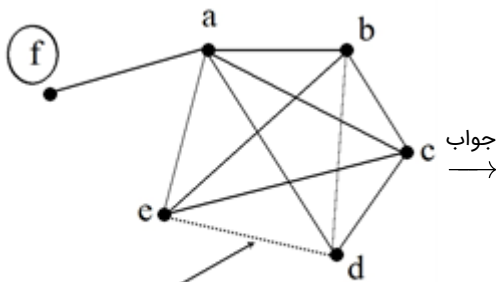
$$\binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 15$$

تعداد دورها در گراف کامل مرتبه ۵ به طول ۴ برابر است با:

حال دورهای به طول ۴ که یال ed را دارد حذف می‌کنیم:

$$\text{دور به طول } 4 \text{ شامل } ed : \underbrace{\underline{e} \quad \underline{d} \quad \underline{c} \quad \underline{a}}_{\text{یال } ed} = 6$$

رئوس a و b و c



$$\text{جواب} \rightarrow 15 - 6 = 9 = \text{غ ق ق - کل}$$

اگر ed باشد گراف کامل است

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۳

$$q = 4 \xrightarrow{P_n} n = q + 1 = 4 + 1 = 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گراف‌های 7 -منتظمی که می‌توان با رأس کشید باید k زوج باشد زیرا $7k = 2q$

$$k = 2$$

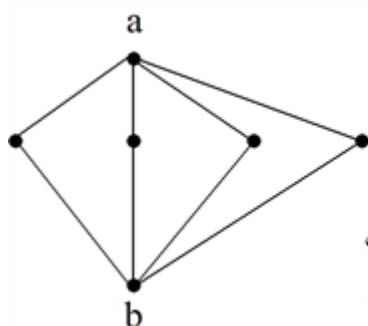
پس: $k = 0$ که غیرقابل قبول است زیرا در سوال گرفته شده غیرتهی:

$$k = 4$$

$k = 6$ که این هم غیرقابل قبول است زیرا گراف کامل می‌شود که سوال گفته غیرکامل پس دو مقدار 2 و 4 قابل قبول هستند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زیرا این مجموعه اصلاً احاطه‌گر نیست. هیچ‌کدام به d وصل نیستند. ۲۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. همه دورهای این گراف دور به طول ۴ هستند.

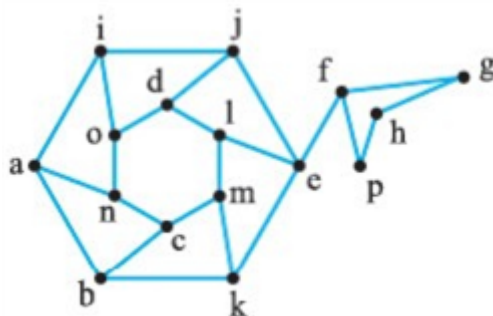


$$\Rightarrow \binom{4}{2} = 6$$

کلاً ۶ دور داریم.

هر دو راس که از وسط برداریم،
با a و b دور ۴ خواهیم داشت.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. رأس‌های گراف را نام‌گذاری می‌کنیم.



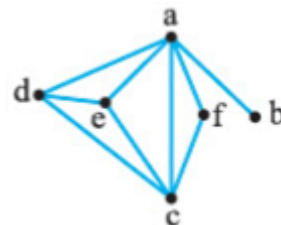
حالا گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینه ۱ مجموعه $\{a, b, c, d, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر نیست، چون در آن رأس e احاطه نمی‌شود. در گزینه‌های ۲ و ۴ مجموعه داده شده احاطه‌گر نیستند، زیرا در هیچ‌کدام از آن‌ها رأس p احاطه نمی‌شود. اما مجموعه داده شده در گزینه ۳ یعنی $\{a, c, e, d, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. چون همه رأس‌ها با این ۵ رأس احاطه می‌شوند و با حذف هر کدام از این رأس‌ها، مجموعه باقی‌مانده دیگر احاطه‌گر نیست.

رأس انتخابی	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p
رأسی که آن را پوشش می‌دهد	a	a	c	d	e	e	h	h	a	d	e	d	c	a	d	h

همچنین با حذف هر کدام از رأس‌ها، دیگر خود آن رأس احاطه نمی‌شود.

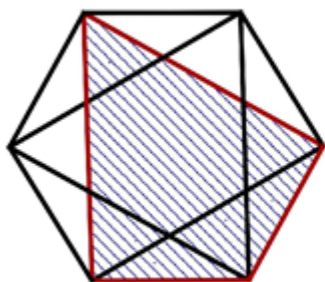
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل ساده شده گراف به صورت روبه‌رو است:



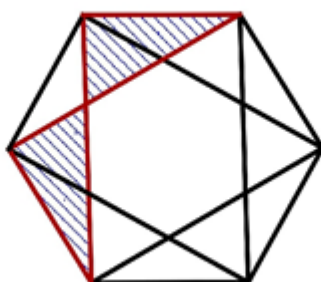
تعداد دورهای به طول ۳ در این گراف ۵ تا است: aeda, aeac, adca, decd, afca

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با حذف هر عضو مینیمال، مجموعه از احاطه‌گری خارج می‌شود که با بررسی گزینه‌ها به جواب می‌رسیم.

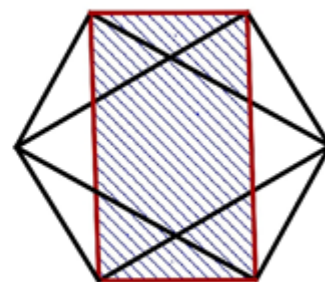
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
بنابراین ۱۵ گراف ۴-منتظم تشکیل می شود.



۶ گراف چهارضلعی



۶ گراف پروانه ای



۳ گراف مستطیلی

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\binom{5}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (تمرین کتاب درسی)

$p = q + 1$: درخت \rightarrow همبند فاقد دور

۶ نوع $\rightarrow q = 5$ و $p = 6 \Rightarrow p + q = 11$: از طرفی

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد دورها به طول ۴ در گراف K_5 برابر است با:

$$\binom{5}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

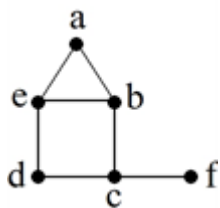
دورهایی به طول ۴ که شامل یال ab هستند، عبارتند از:

abcda, abdca, abcea, abeca, abdea, abeda

یعنی با حذف یال ab، ۶ دور به طول ۴ حذف می شود، پس تعداد دورهای به طول ۴ در گراف باقیمانده برابر است با:

$$15 - 6 = 9$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید شکل گراف را رسم کنیم:



دور ۵ \rightarrow abcdea / abdcea /

۳۵

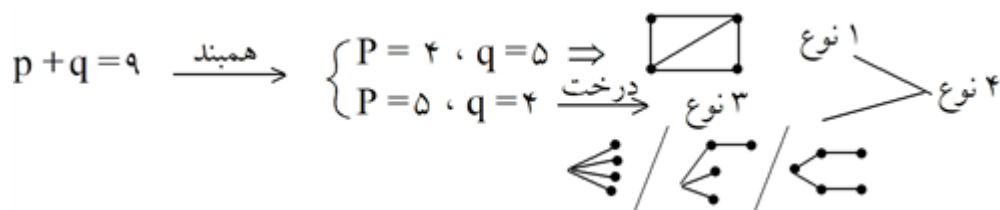
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مرتبه‌ی این گراف ۲۰ است، بنابراین نمی‌تواند دوری بیشتری از ۲۰ داشته باشد (گزینه‌ی ۴ برای گراف از مرتبه‌ی ۲۰ امکان ندارد). با توجه به این که این گراف همیلتنی است، بنابراین دوری به طول ۲۰ دارد. دور



مقابل دور همیلتنی این گراف است.

۳۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

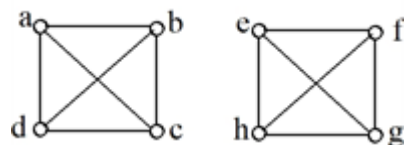


۳۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که مجموع درجات رئوس در این گراف برابر است با: $2p = 2q = 24$ ، پس $p = 8$ و در نتیجه شکل این گراف ناهمبند به صورت مقابل است:

$$\text{تعداد دورها} = 2 \times \left[\binom{4}{2} \times \frac{(4-1)!}{2} \right] = 6$$

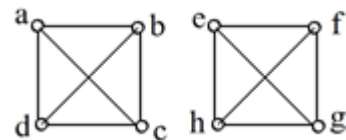
البته با شمارش تعداد دورهای به طول ۴ هم می‌توانستیم تست را حل کنیم: $abcda$ و $abdca$ و $acbda$ و به همین ترتیب $efghe$ و $efhge$ و $efghe$ ، بنابراین در مجموع ۶ دور به طول ۴ وجود دارد.



۳۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گراف ۳-منتظم باید حداقل ۴ راس داشته باشد، در نتیجه اگر یک گراف ۸ راسی ناهمبند قرار باشد ۳-منتظم هم باشد، الزاما باید به دو بخش ۴ راسی افراز شود. یعنی مطابق شکل دو گراف کامل K_4 داریم. در هر یک از بندها ۳ دور به طول چهار و در مجموع ۶ دور به طول چهار وجود دارد:

$abcda$ و $abdca$ و $acbda$ و $efghe$ و $efhge$ و $efghe$



۳۹

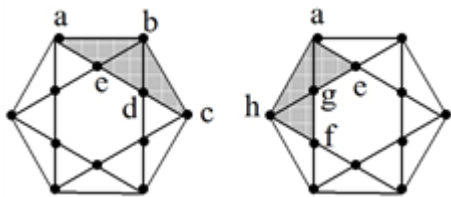
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$p \times q = 50 = 5 \times 10 = 5 \times \binom{5}{2} \Rightarrow P = 5$$

$$\text{تعداد دور به طول } r \text{ در } K_p = \binom{p}{r} \frac{(r-1)!}{2} \Rightarrow \binom{5}{4} \times \frac{3!}{2} = 15$$

۴۰

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. یک نمونه از دوره‌های به طول ۵، در شکل هاشورخورده است: aegfha، که ۶ دور به طول ۵ هم به این صورت وجود دارد abcdea. پس در مجموع ۱۲ دور به طول ۵ وجود دارد.



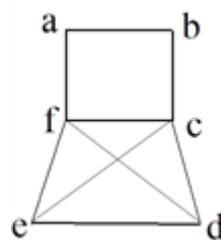
۴۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نمودار این گراف به صورت مقابل است که دارای دو دور به طول ۶ است.

$$a - b - c - d - e - f - a$$

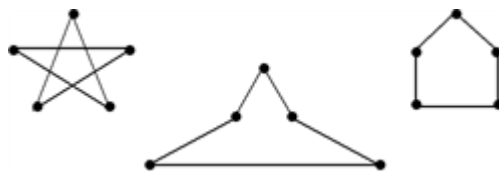
$$a - b - c - e - d - f - a$$



۴۲

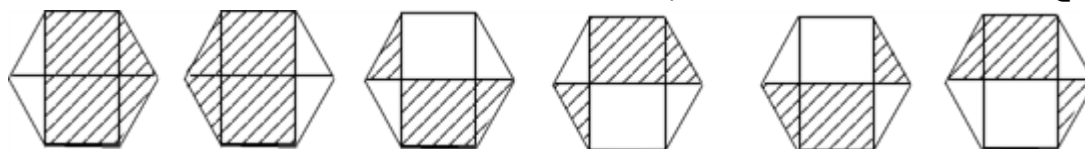
گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

فرم کلی دوره‌های به طول ۵ در گراف به صورت‌های مقابل می‌باشد که تعداد آن‌ها ۷ تا است.



۴۳

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. هیچ راهی به جز شمارش نداریم. برای این‌که بهتر متوجه شوید همه‌ی دوره‌های به طول پنج را در شکل جداگانه هاشور می‌زنیم:



می‌بینید که شش دور به طول پنج وجود دارد.

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴

