



p30konkor.com

۱) مساحت مثلثی برابر ۶۴ و مختصات وسط اضلاع آن نقاط $A(3, a, b)$ ، $B(-1, -a, b)$ و $C(5, -4, b)$ هستند. طول ضلع AB کدام می‌تواند باشد؟ (با اندکی تغییر)

- ۱) $2\sqrt{10}$ ۲) $4\sqrt{10}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) $10\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲) یک متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{a} = (2, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ و $\vec{c} = (3, -2, 1)$ تولید شده و صفحه P شامل بردارهای b و c است. اندازه ارتفاع این متوازی‌السطوح عمود بر صفحه P، کدام است؟

- ۱) $\sqrt{5}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۳) فرض کنید \vec{a} و \vec{b} بردارهای ناصفری هستند که ضرب داخلی آنها، $-\frac{3}{5}$ حاصل ضرب اندازه‌های دو بردار است. مساحت

مثلثی را که توسط بردارهای $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ و $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ ساخته می‌شود، کدام است؟

- ۱) $6/4$ ۲) $8/4$ ۳) $2/3$ ۴) $6/1$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۴) اندازه تصویر قائم بردار $(2, -a, 3)$ بر امتداد بردار $(1, 0, a)$ برابر $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۷ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{10}{7}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۵) دو بردار که اندازه یکی دو برابر دیگری است، با هم زاویه ۶۰ درجه می‌سازند. زاویه بین بردار بزرگ‌تر و تفاضل دو بردار، چند درجه است؟

- ۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۶) سه بردار $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ و \vec{c} غیر واقع در یک صفحه و $\vec{h} = (x, y, 4)$ بردار ارتفاع متوازی‌السطوح حاصل از این سه بردار است. اگر $\vec{c} \cdot \vec{a} = 1$ و $\vec{c} \cdot \vec{b} = 5$ باشد، اندازه بردار \vec{c} کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{19}$ ۴) $\sqrt{21}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۷ بردار $\vec{a} = (-1, \alpha, 1)$ با محور z در فضا زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد. اگر $\vec{b} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$ و زاویه‌ی بردار

$\vec{a} \times \vec{b}$ با محور zها، θ باشد، مقدار $\cos \theta$ ، کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \boxed{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \boxed{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \boxed{1}$$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۸ به ازای کدام مقدار m ، سه بردار $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ ، $\vec{b} = (2, 0, 1)$ و $\vec{c} = (-4, m, 5)$ در یک صفحه‌اند؟

$$4 \quad \boxed{4}$$

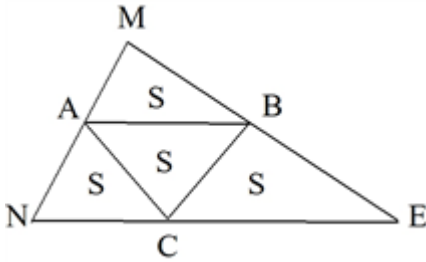
$$3 \quad \boxed{3}$$

$$2 \quad \boxed{2}$$

$$-2 \quad \boxed{1}$$

سراسری-ریاضی-۹۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط A و B و C وسط اضلاع مثلث MNE به مساحت ۶۴ است. چون $\triangle MNE$ با $\triangle ABC$ متشابه با نسبت $\frac{1}{2}$ است داریم:



$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{S_{MNE}=64} S_{ABC} = 16$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$\vec{AB} = B - A = (-4, -2a, 0)$$

$$\vec{AC} = C - A = (2, -4 - a, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -2a & 0 \\ 2 & -4-a & 0 \end{vmatrix} = (16 + 4a + 4a)k = (16 + 8a)k$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \sqrt{(16 + 8a)^2} \Rightarrow |16 + 8a| = 32$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 + 8a = 32 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \vec{AB} = (-4, -4, 0) \Rightarrow |\vec{AB}| = 4\sqrt{2} \\ 16 + 8a = -32 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow \vec{AB} = (-4, 12, 0) \Rightarrow |\vec{AB}| = 4\sqrt{10} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حجم متوازی‌السطوح و مساحت قاعده متوازی‌السطوح که متوازی‌الاضلاع به ضلع‌های \vec{b} و \vec{c} است را پیدا می‌کنیم.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8i + 10j - 4k$$

$$S = |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{8^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$a \cdot (b \times c) = (2, -3, 4) \cdot (8, 10, -4) = 16 - 30 - 16 = -30$$

$$V = |a \cdot (b \times c)| = 30$$

$$V = Sh \Rightarrow 30 = 6\sqrt{5}h \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم θ زاویه بین بردارهای \vec{a} و \vec{b} باشد بنابر فرض سؤال می‌نویسیم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = -\frac{3}{5} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{3\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{3\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{3\vec{b}}{|\vec{a}|} \right) \right|$$

بنابراین:

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{3\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} + \frac{3\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{9\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b}| |\vec{a}|} - \frac{9\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{3\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right|$$

$$= \frac{3}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{3}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 3 \sin \theta = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم طول تصویر قائم بردار \vec{a} روی امتداد بردار \vec{b} از رابطه $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ به دست می‌آید،

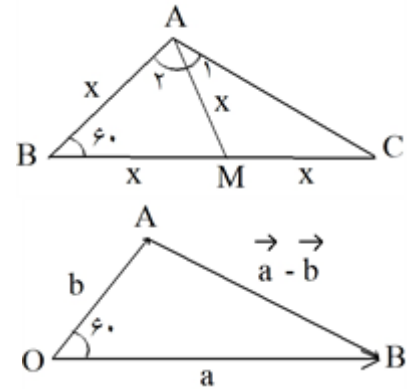
بنابراین با فرض $\vec{b} = (1, 0, a)$, $\vec{a} = (2, -a, 3)$ داریم:

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|2 + 0 + 3a|}{\sqrt{1 + 0 + a^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|2 + 3a|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$\frac{(2 + 3a)^2}{1 + a^2} = \frac{25}{2} \Rightarrow 2(4 + 12a + 9a^2) = 25(1 + a^2) \Rightarrow 7a^2 - 24a + 17 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است}} \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{17}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف مقادیر } a = \frac{17}{7} - 1 = \frac{10}{7}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در نظر بگیرید $\vec{a} = 2\vec{b}$ در این صورت بردار $\vec{a} - \vec{b}$ مطابق شکل مقابل خواهد بود. در مثلث OAB یک زاویه 60° و اندازه‌ی دو ضلع این زاویه‌ی 60° به نسبت ۱ به ۲ هستند پس مثلث OAB قائم الزاویه است و $\hat{A} = 90^\circ$ پس $\hat{B} = 30^\circ$ در نتیجه زاویه‌ی بین بردار \vec{a} و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر 30° است. نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC زاویه \hat{B} مساوی 60° و $AB = x$ و $BC = 2x$ و $\hat{A} = 90^\circ$ زیرا اگر میانه AM وارد بر BC را رسم کنید مثلث ABM متساوی الاضلاع و مثلث AMC متساوی الساقین است. پس $\hat{A}_1 = 60^\circ$ و $\hat{A}_2 = 30^\circ$ در نتیجه $\hat{A} = 90^\circ$.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ارتفاع بردار \vec{h} برابر ۴ است پس انتهای بردار \vec{h} روی صفحه‌ی $z = 4$ قرار دارد. در ضمن بردار h بر بردارهای a و b عمود نیست زیرا $\vec{a} \cdot \vec{h} \neq 0$ و $\vec{b} \cdot \vec{h} \neq 0$ بنابراین بردار h روی صفحه $z = 4$ قرار دارد. در نتیجه انتهای بردار \vec{c} روی صفحه $z = 4$ واقع است در نتیجه مختصات بردار c به صورت $(x, y, 4)$ است بنابر فرض سؤال داریم. در نتیجه انتهای بردار \vec{c} روی صفحه $z = 4$ واقع است در نتیجه مختصات بردار c به صورت $(x, y, 4)$ است بنابر فرض سؤال داریم:

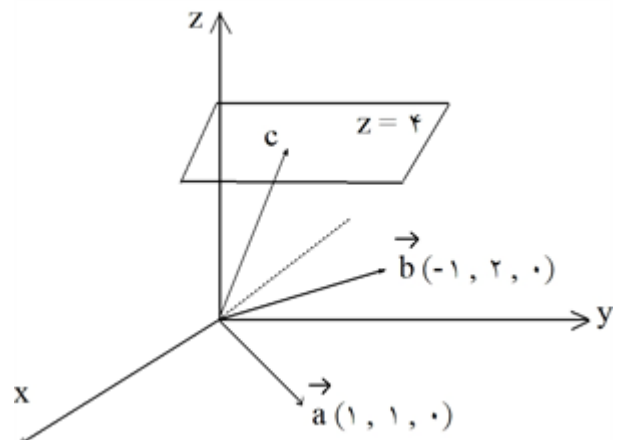
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \Rightarrow (1, 1, 0) \cdot (x, y, 4) = 1 \Rightarrow x + y = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 5 \Rightarrow (-1, 2, 0) \cdot (x, y, 4) = 5 \Rightarrow -x + 2y = 5$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 3y = 6 \Rightarrow y = 2, x = -1$$

بنابراین:

$$\text{پس } (-1, 2, 4) \text{ پس } |\vec{c}| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زاویه بین بردار a و محور z ها همان زاویه بین a و بردار \vec{k} است.

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(-1, \alpha, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{1 + \alpha^2 + 1} \sqrt{1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\alpha^2 + 2} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^2 + 2 = 2 \Rightarrow \alpha = 0$$

پس $a = (-1, 0, 1)$ بنابراین:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}i - \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k$$

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{k}}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{k}|} = \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} \times 1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضرب مختلط این سه بردار صفر است پس:

$$a \cdot (b \times c) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & m & 5 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{بسط بر حسب}} -2(10 + 4) - m(-1 - 6) = 0$$

$$\Rightarrow -28 = -7m \Rightarrow m = 4$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

