



p30konkor.com

عنوان آزمون : تست فصل ۴ حسابان دوازدهم

دانلود شده از : سایت پی سی کنکور

۱ اگر $f(x) = \frac{27 - \sin^2 x}{9 - \sin^2 x}$ و $g(x) = \frac{3}{3 + \sin x}$ باشد، حاصل عبارت $g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲ به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x - a)^m & x \geq a \end{cases}$ دارای نقطه گوشه‌ای است؟

- ۱ صفر ۲ بیش از ۲ ۳ ۲ ۴ ۱

سراسری - ریاضی - تیرماه ۱۴۰۳

۳ اگر $f(x) = \frac{8 + \cos^2 x}{4 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2g'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

سراسری - ریاضی - تیرماه ۱۴۰۳

۴ اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۳ ۴ ۲

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۳ اردیبهشت

۵ به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx + c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی R مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ ۱ ۳ -۲ ۴ ۲

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۳ اردیبهشت

۶ خط d موازی محور x ها، سهمی $y = x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

- ۱ $-\frac{3}{2}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{1}{4}$ ۴ $-\frac{3}{4}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۷

خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

۲/۷۵ (۴)

۰/۷۵ (۳)

۳/۲۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۸

اگر $f(x) = \frac{5 \cos x}{1 - \sin x}$ و $f(x) = xg(x) - 2x + 5$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

وجود ندارد. (۴)

صفر (۳)

۷ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹

آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \frac{\pi}{4} (\cos^2 x - \sin^2 x)$ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در

$$x = \frac{3\pi}{8}$$
 است؟

$$-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$
 (۴)

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$
 (۳)

$$-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$
 (۲)

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$
 (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۰

اگر $f(x) = \left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)^2$ و $f(x) = xg(x) + 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

-۲ (۴)

-۴ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۱

در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = -\sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x^2} - 2$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات، خط مماسی بر $g(x)$ رسم می‌شود. فاصله نقطه برخورد این خط با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات، کدام است؟

$$\frac{1}{3}$$
 (۴)

$$\frac{2}{3}$$
 (۳)

$$\frac{4}{3}$$
 (۲)

$$\frac{5}{3}$$
 (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۲

تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب $\frac{\pi}{8}$ است. اگر $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + f\left(2x - \frac{23\pi}{24}\right)$ حاصل $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

$$-\sqrt{3}$$
 (۴)

$$\sqrt{3}$$
 (۳)

$$\frac{-2}{\sqrt{3}}$$
 (۲)

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$
 (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

به ازای کدام مقدار a ، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = |4x - 3|\sqrt{ax}$ در

نقطه $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{6}$ می‌شود؟

$$\frac{1}{8} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$8 \quad \text{۲}$$

$$2 \quad \text{۱}$$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۴ اگر f تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$ و $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ باشد، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{۳}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos^2 x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ است؟

$$\frac{1}{2} \quad \text{۴}$$

$$-\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$1 \quad \text{۲}$$

$$-1 \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۶ در کدام نقطه از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ ، خط مماس بر منحنی، بر خط $y - 3x = 1$ عمود است؟

$$(2, 1) \quad \text{۴}$$

$$(1, 2) \quad \text{۳}$$

$$(-1, 10) \quad \text{۲}$$

$$(-2, 17) \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۷ اگر $f(x) = (x - 4)\sqrt[3]{x + 3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(5 - h) - 3f(5 - h) + 2}{h(5 - h)}$ کدام است؟

$$-\frac{13}{15} \quad \text{۴}$$

$$\frac{5}{6} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{5}{12} \quad \text{۲}$$

$$\frac{13}{30} \quad \text{۱}$$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۸ تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{2}{3}$ و $g(x) = f(x + 1) + f(3x + 10)$ باشد، حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

$$\frac{13}{2} \quad \text{۴}$$

$$6 \quad \text{۳}$$

$$\frac{7}{2} \quad \text{۲}$$

$$3 \quad \text{۱}$$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۹ در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = \sin x + \frac{1}{4}\cos x$ و $g(x) = \frac{3}{4}\sin x$ در بازه $[0, \pi]$ خط مماسی بر منحنی

$f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{8}$ (۲)

$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۲۰ فرض کنید $f(x) = \sin^n(x)$ و $\sqrt{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f'(x)}{(1 - \cos(x))^m} = 32$ مقدار $m + n$ ، کدام است؟

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۱ از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x) = \sqrt{x} + 2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر α زاویه حاده بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(\alpha)$ ، کدام است؟

$\frac{240}{289}$ (۴)

$\frac{225}{289}$ (۳)

$\frac{8}{15}$ (۲)

$\frac{7}{15}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۲ باقیمانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 + 2x + 1$ به ترتیب $3x + 1$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-2) = 3$ ، آنگاه مقدار باقیمانده تقسیم $P'(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

-۳ (۴)

-۴ (۳)

-۵ (۲)

-۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۳ فرض کنید $f(x) = \cos^2(2x) + ax^2 + b$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ ، مقدار $a + b$ ، کدام است؟

-۸ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۲۴ خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x) = |\sin(2x)| + 1$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره خط AB ، کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۳)

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۲۵ تابع چندجمله‌ای درجه‌ی دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب ۲- و $\frac{1}{4}x + 1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟

۹ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه‌ی مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه‌ی مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷) در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ مقدار $f'(5) - f'(2)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۸) اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، مقدار $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۹) خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}}$ در نقطه‌ی $x = 4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -۴

۲) -۱

۳) ۲

۴) ۳

سراسری-ریاضی-۹۹

۳۰) اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x})$ و $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۱

سراسری-ریاضی-۹۹

۳۱) آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه‌ی $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

۱) $4 + \sqrt{2}$ ۲) $3 + 2\sqrt{2}$ ۳) $2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ۴) $2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-۹۹

۳۲) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{|x^2 - 2x|}{x}$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه‌ی $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای

آن در $x = \frac{3}{4}$ چه قدر کمتر است؟

- ۱) $0/0.3$ ۲) $0/0.4$ ۳) $0/0.5$ ۴) $0/0.6$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۴ خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در نقطه‌ی $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است.

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۵ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x+2)\sqrt{4x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 2]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن

در $x = \frac{3}{4}$ چه قدر بیشتر است؟

- ۱) $0/10$ ۲) $0/15$ ۳) $0/20$ ۴) $0/25$

سراسری-ریاضی-۹۸

۳۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{4}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$ ، در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

سراسری-ریاضی-۹۸

۳۷ اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۸ اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(1)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-۹۸

۳۹ اگر تابع f در $x = -2$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه مشتق $f(x)$ در $x = -2$ ،

کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۰ تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = 2$ کدام است؟

- ۱ $2/5$ ۲ 3 ۳ $3/5$ ۴ 4

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۴۱ به ازای کدام مقدار a به معادله $y = -3x + 2$ ، بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + a}{x - 2}$ مماس است؟

- ۱ -1 ۲ صفر ۳ 1 ۴ 2

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۴۲ اگر عبارت $x^4 + ax^3 - bx + 4$ بر $(x - 1)^2$ بخش پذیر باشد، b کدام است؟

- ۱ 3 ۲ 4 ۳ 5 ۴ 6

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۴۳ اگر $f(x) = 1 - |x|$ ، تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع با ضابطه $y = f(f(x))$ کدام است؟

- ۱ 1 ۲ 2 ۳ 3 ۴ صفر

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۴۴ اگر $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ ، مقدار $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟

- ۱ 1 ۲ 2 ۳ 3 ۴ 4

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۴۵ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \left[x + \frac{1}{3}\right] + [x]$ روی بازه $(0, 3)$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- ۱ 2 ۲ 3 ۳ 4 ۴ 5

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۴۶ اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin(\pi x)$ ، شیب خط مماس بر منحنی تابع $g \circ f$ در نقطه تلاقی آن با محور x ها، روی بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

- ۱ $-\pi$ ۲ $-\frac{\pi}{2}$ ۳ π ۴ 0

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۴۷ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 + |x|}$ در نقطه $x = \alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

- ۱ -1 ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ 1 ۴ تعریف نشده

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۴۸ اگر $f(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x - 1} \cot \frac{\pi}{x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

π (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$-\frac{\pi}{2}$ (۲)

$-\pi$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۴۹ اگر $f(x) = x + \cos^5(g(x))$ و $g(0) = \frac{\pi}{6}$ و $f'(0) = 1$ مقدار $f''(0)$ چند برابر $g''(0)$ است؟

$-\frac{45}{32}$ (۴)

$\frac{45}{32}$ (۳)

$\frac{45}{16}$ (۲)

$-\frac{45}{16}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۵۰ اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1 + x^2})$ کدام است؟

$\sqrt{1 + x^2}$ (۴)

$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ (۳)

$x - \sqrt{1 + x^2}$ (۲)

$-x + \sqrt{1 + x^2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'g - f = \frac{\cancel{f}}{\cancel{f} + \sin x} - \frac{(\cancel{f} - \sin x)(\cancel{f} + \cancel{f} \sin x + \sin^2 x)}{(\cancel{f} - \sin x)(\cancel{f} + \sin x)} = \frac{-\sin x(\cancel{f} + \sin x)}{(\cancel{f} + \sin x)} = -\sin x$$

$$(f'g - f)' \left(\frac{5\pi}{3} \right) = -\cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) = -\left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تابع در $x \geq a, x < a$ مشتق پذیر است، پس نقطه گوشه $x = a$ است.

$x = a \Rightarrow f(x)$ پیوسته ✓

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cdot & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x > a \end{cases}$$

$$f'_-(a) = \cdot \Rightarrow f'_+(a) \neq \cdot \Rightarrow m(a-a)^{m-1} \neq \cdot \Rightarrow m = 1$$

$$f' \left(\frac{4\pi}{9} \right) - f'g' \left(\frac{4\pi}{9} \right) = (f - f'g)' \left(\frac{4\pi}{9} \right)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$= \left(\frac{(\cancel{\cos x} + \cancel{2})(\cos^2 x - \cancel{2} \cos x + \cancel{4})}{(\cancel{2} - \cos x)(\cancel{2} + \cancel{\cos x})} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{2} - \cos x} \right)' = \left(\frac{\cos x(\cancel{\cos x} - \cancel{2})}{-(\cancel{\cos x} - \cancel{2})} \right)'$$

$$= -(\cos x)' = \sin x = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{9} \right) = -\sin \frac{\pi}{9} = -\frac{1}{2}$$

۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1} = \frac{1}{1} f(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \cdot$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} = \cdot \xrightarrow{x=1} f'(1) \cdot g(1) - g'(1) f(1) = \cdot$$

۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع باید در $x = a$ نیز مشتق پذیر باشد. پس در این نقطه باید پیوسته باشد.

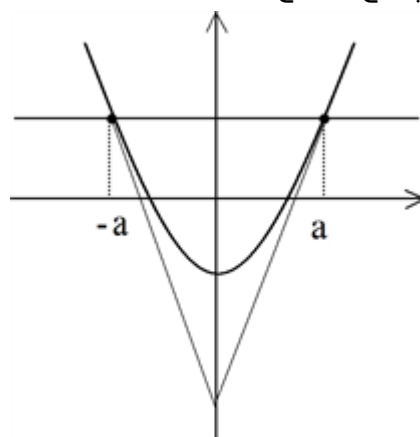
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = ab + c, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{1}{a} = f(a) \xrightarrow{\text{پیوستگی}} ab + c = \frac{1}{a} (*)$$

تابع مشتق را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} b & ; x < a \\ -\frac{1}{x^2} & ; x > a \end{cases} \Rightarrow f'_-(a) = b, f'_+(a) = -\frac{1}{a^2}$$

مشتق های چپ و راست نیز باید با هم برابر باشند:

$$b = -\frac{1}{a^2} \xrightarrow{(*)} a \left(-\frac{1}{a^2} \right) + c = \frac{1}{a} \Rightarrow c = \frac{2}{a} \Rightarrow ac = 2$$



$$y = x^2 - 1$$

$$y' = 2x \begin{cases} 2a \\ -2a \end{cases}$$

$$2a \times (-2a) = -1$$

$$a = +\frac{1}{2} \rightarrow y = \left(+\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$a = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

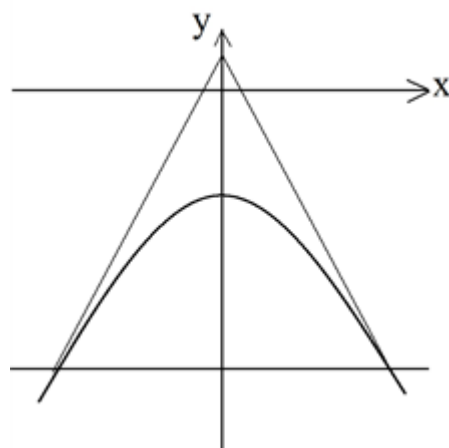
$$\text{مجموع} = -\frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط d سهمی $y = -x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع کرده است.

برای اینکه دو خط مماس بر هم عمود باشند، لازم است که شیب‌های آن‌ها +۱ و -۱ باشند، زیرا نسبت به خط $x = 0$ متقارن هستند، پس مشتق تابع را برابر ± 1 قرار می‌دهیم تا طول نقطه برخورد حاصل شود:

$$y' = -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{y = -x^2 - 1} y = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

این همان عرض خط d است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $1/25$ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x} \xrightarrow{f'(x)} f'(x) = \frac{-\Delta \sin x (1 - \sin x) + \cos x (\Delta \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$f(x) = xg(x) - 2x + \Delta \Rightarrow \frac{f(x) + 2x - \Delta}{x} = g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x - f(0)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} + 2 = f'(0) + 2 = \Delta + 2 = 7$$

$$y = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (\cos \sqrt{2}x - \sin \sqrt{2}x) \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \sqrt{2}x; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\cos \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) - \cos \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \right)}{\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = -2$$

$$f'(x) = -\pi \sin \sqrt{2}x \Rightarrow f' \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \right) = -\pi \sin \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \pi; \frac{\text{آهنگ متوسط}}{\text{آهنگ لحظه ای}} = \frac{-2}{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0)$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right) \left(\frac{\cos x (\sin x + 1 - \sin x + 1)}{(\sin x + 1)^2} \right) \Rightarrow f'(0) = 2(-1)(2) = -4$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 2 = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ناحیه چهارم} \\ \sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x = -8 \text{ ناحیه دوم} \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow m = g'(-8) = \frac{2}{3} (-8)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}, y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 8) \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -\frac{2}{3} \Rightarrow |y| = \frac{2}{3}$$

$$h'(x) = f' \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) + 2f' \left(2x - \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow h' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) + 2f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow h' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = 3f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = 3 \times \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\lambda} \right) = f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \otimes$$

$$f(x) = \sqrt[3]{ax} \left| x - \frac{3}{\sqrt{2}} \right| \Rightarrow \begin{cases} f'_+ \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{3a} \\ f'_- \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) = -\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{2}}} = -\sqrt[3]{3a} \end{cases}$$

$$f'_+ \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) - f'_- \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt[3]{3a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 16 \times 3a = 4 \times 6 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = (2 \tan x (1 + \tan^2 x) - \sqrt{2} \sin x) f'(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}}$$

$$g' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2f'(2) = \sqrt{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۵) گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آهنگ متوسط تابع اول:

$$a = \frac{-1 - 0}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

آهنگ متوسط تابع دوم:

$$y = \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos^2 x$$

$$b = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

۱۶) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط $y - 3x = 1$ برابر $\frac{1}{3}$ است، پس در نقطه مطلوب، شیب خط مماس باید برابر

$$-2 \text{ باشد.} \Rightarrow y' = 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

نقطه مطلوب $(1, 2)$ است.

۱۷) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مشتق را بدست آورید:

$$f(x) = (x - 4)\sqrt{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x + 3} + (x - 4) \times \frac{1}{2(\sqrt{x + 3})}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(5 - h) - f'(5) + 2}{h(5 - h)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(5 - h) - 1}{5 - h} \right) \times \left(-\frac{f(5 - h) - 2}{-h} \right) \\ &= \left(\frac{f(5) - 1}{5} \right) (-f'(5)) = \frac{1}{5} \times \frac{-25}{12} = \frac{-5}{12} \end{aligned}$$

تذکر: این مسأله با قاعده‌ی هوپیتال نیز قابل حل است.

۱۸) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = f(x + 1) + f(3x + 10) \Rightarrow g'(x) = f'(x + 1) + 3f'(3x + 10)$$

$$g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4)$$

چون دوره تناوب ۵ است پس:

$$f(x + 5) = f(x) \Rightarrow f'(x + 5) = f'(x) \xrightarrow{x=-1} f'(4) = f'(-1)$$

$$g'(-2) = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{3}{2}\right) = 6$$

۱۹) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون خط مماس بر هر دو رسم شده پس:

$$\frac{3}{4}\sin x = \sin x + \frac{1}{4}\cos x \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

پس نقطه تماس: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)$ و شیب خط مماس:

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{4}\sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} m = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{3}{4}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{y=0} x = \frac{\pi}{4} - 3$$

$$f'(x) = nx \cos x^{\frac{1}{n}} \sin^{n-1} x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f'(x)}{(1 - \cos x)^m}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x^{\frac{1}{n}} (nx \cos x^{\frac{1}{n}} \sin^{n-1} x^{\frac{1}{n}})}{(1 - \cos x)^m}$$

با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{\frac{1}{n}})^n (nx (x^{\frac{1}{n}})^{n-1})}{\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} n^{m+1} x^{n-m-1} = 32\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n - m - 1 = 0 \Rightarrow n = \frac{m+1}{2} \quad (*) \\ n^{m+1} = 32\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{m+1}{2}\right)^{m+1} = 32\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^{m+1} = 32\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow n = 2 \Rightarrow 2m + n = 9$$

به ازای $m = \frac{7}{2}$ تساوی بالا برقرار می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f اکیداً صعودی است، پس محل تقاطع آن با f^{-1} روی خط $y = x$ قرار دارد:

$$f(x) = x \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = x \Rightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x} \geq 0} \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

پس محل تلاقی f و f^{-1} نقطه $(4, 4)$ است:

$$f(x) = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m = f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$(f^{-1})'(4) = 4$$

اگر یک خط را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، شیب آن عکس می‌شود، پس:

زاویه‌ی بین دو خط با شیب‌های m و m' از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 1} \right| = \frac{15}{8}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{2 \left(\frac{15}{8} \right)}{1 + \left(\frac{15}{8} \right)^2} = \frac{\frac{15}{4}}{1 + \frac{225}{64}} = \frac{240}{289}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{با استفاده از اتحاد داریم:}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قضیه‌ی تقسیم را برای تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + 2x$ می‌نویسیم:

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$$

از طرفین تساوی بالا مشتق می‌گیریم:

$$P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

حال $x = -2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P'(-2) = (-2)Q(-2) + 0 + 3 = -2(3) + 3 = -3$$

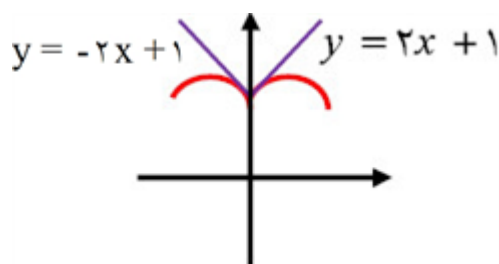
این مقدار همان باقی‌مانده $P'(x)$ بر $x + 2$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x + ax^2 + b}{x} = 0 \Rightarrow \text{حد صورت} = 0 \Rightarrow 1 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin^2 x \sin 2x + 2ax}{x} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin^2 x \left(\frac{\sin 2x}{x} \right) + \frac{2ax}{x} \right) = 2 \Rightarrow -1 \times 2 + 2a = 2 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 2 + (-1) = 1$$



$$\begin{cases} 2x + 1 = -x \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ -2x + 1 = -x \Rightarrow B = (1, -1) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P'(x) = 2ax + b$$

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b) \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) - 2 \Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + \frac{1}{2}bx + b - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{1}{2}b\right)x + b - 2 \Rightarrow b = 2a + \frac{1}{2}b \Rightarrow 2a = \frac{1}{2}b \Rightarrow 4a = b$$

$$\left. \begin{matrix} c = b - 2 \\ b = 4a \end{matrix} \right\} \Rightarrow c = 4a - 2 \Rightarrow p(x) = ax^2 + 4ax + 4a - 2 \Rightarrow p(1) = 9a - 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \min = 7$$

$$y = 4\sqrt{4} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

در نقطه A، y ها و همچنین y' ها برابر هستند.

$$A(4, 8) \Rightarrow \begin{cases} 16 + 4a + b = 8 \Rightarrow 4a + b = -8 \\ 2x + a = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow 8 + a = 2 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow -12 + b = -8 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$\left[\frac{5}{4} \right] = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن جواب از مشتق تابع مرکب استفاده می‌کنیم:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

$$g'(x) = \left(\frac{-\cos x (1 + \sin x) - \cos x (1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \right) f' \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right)$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} g' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{-2 \cos \frac{\pi}{2}}{(1 + \sin \frac{\pi}{2})^2} \right) f' \left(\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \right) \Rightarrow \frac{0}{3} = \frac{0}{\frac{3}{2}} f' \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow f' \left(\frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3}$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}(5x - 4)}{(\sqrt{x})^2} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \xrightarrow{x=4} y = 2$$

$$g(x) = f(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x})$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g'(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} f'(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \times f'(2)$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = f'(x) \Rightarrow -1 = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2 + 4x}} \Rightarrow \sqrt{21 - x^2 + 4x} = x - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\Delta' = 50$$

$$x = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2}, x = \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2} \otimes$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{|x(x^2 - 2)|}{x} = \frac{|x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})|}{x} = \frac{|x||x - \sqrt{2}||x + \sqrt{2}|}{x}$$

تابع در $x = 0$ مشتق ندارد چون $0 \notin D_f$

در $x = \pm\sqrt{2}$ نقطه‌ی گوشه (شکسته) است چون ریشه‌ی ساده قدرمطلق است. پس f در ۳ نقطه مشتق ندارد.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\left(3 + \frac{1}{5}\right) - (1 + 1)}{4} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{0.6}{4} = 0.15$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt[2]{\sqrt[4]{x} + 1}} - \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{17}{50} = 0.34$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.34 - 0.15 = 0.19$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در $x = 2$ بر منحنی $g(x)$ مماس است، پس:

$$\begin{cases} g(2) = 3(2) - 5 = 1 \\ g'(2) = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) f'(g(2)) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x+2)\sqrt[4]{4x+1}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 \times 3 - 2}{2} = 5$$

$$f'(x) = \sqrt[4]{4x+1} + (x+2) \frac{4}{\sqrt[4]{4x+1}} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \left(\frac{3}{4} + 2\right) \frac{4}{\sqrt[4]{4 \times \frac{3}{4} + 1}}$$

$$f'\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \frac{3}{4} + 2 = 4 + \frac{3}{4}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'\left(\frac{3}{4}\right) = 5 - 4 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه کنید:

$$x < 2 \Rightarrow x(x-2) < 0 \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow |x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{شرط پیوستگی: } -2^2 + 2(2) &= \frac{1}{2}(2^2) + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} -2x + 2 & x < 2 \\ x + a & x > 2 \end{cases} \Rightarrow -2(2) + 2 = 2 + a \Rightarrow a = -4 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b = 2$$

$$f(x) = \frac{x^2}{|1-x|} \cdot [x] \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = ? = f'_-(3)$$

$$x \rightarrow 3^- : f(x) = \frac{x^2}{x-1} \cdot [x^-] = \frac{2x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x)(x-1) - (1)(2x^2)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=3} \text{جایگذاری}$$

$$f'_-(3) = \frac{(12)(2) - (1)(18)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

تذکر: در اصل این حد وجود ندارد چون f در $x = 3$ پیوستگی چپ ندارد ولی متأسفانه غلط مورد علاقه کنکور سراسری است که منظور طراح سؤال همین راه حل است.

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$(x^2 f(x))' = 2xf(x) + x^2 f'(x) \xrightarrow{x=-2} -2f(-2) + 2f'(-2) = -2(-3) + 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = \frac{1}{2} \end{cases} = 12 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 9 \\ f'(2) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \times x$$

$$\xrightarrow{x=2} g'(2) = \sqrt{f(2)} + \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} \times 2 = 3 + \frac{\frac{2}{3}}{6} \times 2 = 3\frac{1}{9}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط مماس بودن آن است که y ها و y' ها برابر باشد و همچنین وقتی دو منحنی بر هم مماس هستند، با مساوی قرار دادن آنها باید $\Delta = 0$ باشد.

$$\frac{x^2 + a}{x - 2} = -2x + 2 \Rightarrow 4x^2 - 8x + a + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow a = 0$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است بنابراین مشتق آن نیز بر $x-1$ بخش‌پذیر است. یعنی $P'(1) = 0$ و $P(1) = 0$:

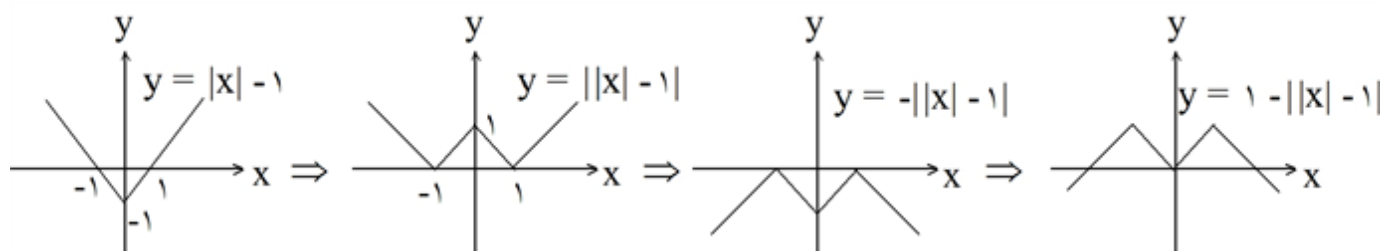
$$P(x) = x^2 + ax^2 - bx + 2 \Rightarrow P(1) = 1 + a - b + 2 = 0 \Rightarrow a - b = -3$$

$$P'(x) = 2x + 2ax - b \Rightarrow P'(1) = 2 + 2a - b = 0 \Rightarrow 2a - b = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 10 \\ 2a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow b = 4$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = f(f(x)) = 1 - |1 - |x|| = 1 - ||x| - 1|$$



تابع در ۳ نقطه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ مشتق ندارد.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ به راحتی به دست می‌آید و داریم $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ برای محاسبه‌ی $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ابتدا

ضابطه‌ی تابع را کمی تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x + 1}{\sin^2 x + 1}$$

مشتق توابع به فرم $f(x) = \frac{au + b}{cu + d}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{au + b}{cu + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cu + d)^2} u'$$

$$f(x) = \frac{-\sin^2 x + 1}{\sin^2 x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1 \times 1) - (1 \times 1)}{(\sin^2 x + 1)^2} \times 2 \sin x \cos x = \frac{-2 \sin x \cos x}{(\sin^2 x + 1)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}}{\left(\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 + 1\right)^2} = \frac{-2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right)^2} = \frac{-2}{\frac{9}{4}} = \frac{-8}{9}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} - 2 \times \frac{-8}{9} = \frac{1}{3} + \frac{16}{9} = \frac{19}{9} = 2$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که تابع داده شده مجموع دو تابع $y_1 = [x]$ و $y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right]$ می‌باشد،

ابتدا نقاط مشتق‌ناپذیر دو تابع اخیر را در بازه‌ی $(0, 3)$ مشخص می‌کنیم. با توجه به ساختار توابع y_1 و y_2 ، نقاط ناپیوستگی این دو تابع، همان نقاط مشتق‌ناپذیرشان هم هست:

y_1 در این دو نقطه ناپیوسته ولی y_2 در آن‌ها پیوسته است $x = 1, 2$ $\xrightarrow{x \in (0, 3)} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y_1 = [x]$

$$y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right] \Rightarrow x + \frac{1}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k - \frac{1}{3} \xrightarrow{x \in (0, 3)} x = \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$$

y_2 در این سه نقطه ناپیوسته ولی y_1 در آن‌ها پیوسته است. در هر یک از نقاط به طول $1, 2, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$ یکی از دو تابع

y_1 و y_2 پیوسته و دیگری ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x) = y_1 + y_2$ در هر یک از این پنج نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = \sin(\pi \cos x)$$

در نقطه‌ی تلاقی gof با محور x مقدار $\text{gof}(x)$ صفر می‌شود، پس داریم:

$$\text{gof}(x) = 0 \rightarrow \sin(\pi \cos x) = 0 \rightarrow \pi \cos x = k\pi \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\rightarrow \cos x = k; \quad k = 0, 1, -1$$

اگر $1 - \cos x = 0$ باشد، آن‌گاه معادله در بازه‌ی $(0, \pi)$ جواب ندارد، اما اگر $\cos x = 0$ باشد، آن‌گاه در فاصله‌ی

$$(0, \pi), \text{ جواب } x = \frac{\pi}{2} \text{ می‌شود پس نقطه‌ی تلاقی } \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ است.}$$

برای محاسبه‌ی شیب خط مماس کافی است مشتق را در این نقطه محاسبه کنیم:

$$(\text{gof})'(x) = (-\pi \sin x) \cdot \cos(\pi \cos x) \rightarrow (\text{gof})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\pi \cos \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\pi(\cos(0)) = -\pi$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ریشه‌های ساده‌ی داخل قدر مطلق طول نقاط زاویه‌دار منحنی تابع می‌باشند، پس نقطه‌ی

مورد نظر $x = 0$ می‌باشد.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+|x|} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\sqrt{1+x}} + \frac{x}{\cancel{\sqrt{1+x}}} - \cancel{\sqrt{1+x}}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+|x|} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{\sqrt{1-x}} - \frac{x}{\cancel{\sqrt{1-x}}} - \cancel{\sqrt{1-x}}}{x} = -\frac{1}{2}$$

در نتیجه مقدار عبارت $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ برابر با $1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \cot \frac{\pi}{x}}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + \sqrt{2x}) \cos \frac{\pi}{x}}{(x-1)(x-2) \sin \frac{\pi}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \sqrt{2x}}{(x-1) \sin \frac{\pi}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} = 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} \xrightarrow{\text{HOP}} 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}}{1} = 4 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

روش دوم: از آنجا که حد مورد نظر سوال، تعریف مشتق تابع f در $x = 2$ می‌باشد، پس کافی است $f'(2)$ را محاسبه کنیم، از طرف دیگر چون $f(2) = 0$ می‌شود یعنی $x = 2$ ریشه‌ی تابع f می‌باشد، کافی است مقدار مشتق عامل صفرشونده در $x = 2$ (یعنی $\cot \frac{\pi}{x}$) را محاسبه کرده و در مقدار مابقی تابع به ازای $x = 2$ ضرب کنیم.

$$\left(\cot \frac{\pi}{x} \right)' = \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) \left[- \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x} \right) \right] = \frac{\pi}{x^2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x} \right)$$

$$f'(2) = \frac{\pi}{(2)^2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{2 + \sqrt{2 \times 2}}{2 - 1} \right) = \pi$$

بنابراین $f'(2)$ برابر است با:

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x + \cos^5(g(x)) \rightarrow f'(x) = 1 - 5 \cos^4(g(x)) \sin(g(x)) g'(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = 1 - 5 g'(0) \sin(g(0)) \cos^4(g(0))$$

$$\xrightarrow{f'(0)=0} g'(0) \sin(g(0)) \cos^4(g(0)) = 0 \xrightarrow{g(0)=\frac{\pi}{6}} g'(0) \sin \frac{\pi}{6} \cos^4 \frac{\pi}{6} = 0 \rightarrow g'(0) = 0$$

حال برای محاسبه‌ی $f''(0)$ باید از $f'(x)$ مشتق گرفته و $x = 0$ را در آن قرار دهیم. از آنجا که در عبارت $g'(x) \cdot 5 \cos^4(g(x)) \sin(g(x))$ عامل $g'(x)$ در $x = 0$ عامل صفرشونده است ($g'(0) = 0$)، بنابراین کافی است از $g'(x)$ مشتق گرفته و در بقیه‌ی عبارت ضرب کنیم و در نهایت $x = 0$ را در آن قرار دهیم. داریم:

مشتق عامل صفر شونده

$$f'(x) = 1 - 5 \cos^4(g(x)) \sin(g(x)) \cdot g'(x) \rightarrow f''(0) = 0 - 5 \cos^4(g(0)) \sin(g(0)) \cdot g''(0)$$

$$\xrightarrow{g(0)=\frac{\pi}{6}} f''(0) = -5 \cos^4 \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot g''(0) = -5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right) \cdot g''(0)$$

$$\rightarrow f''(0) = \frac{-45}{32} g''(0)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی مشتق تابع مرکب، ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم:

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \cdot f'(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \cdot f'(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (*)$$

حال با توجه به این‌که ضابطه‌ی مشتق تابع f در صورت تست داده شده، داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \quad (**)$$

و با جایگذاری $(**)$ در رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$y' = \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right) \times \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴

