۱ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x(۱-|x|)}$ را درنظر بگیرید. اگر m و n به‌ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m+n+k$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x|x|-x}$ را درنظر بگیرید. اگر m و n به‌ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $\frac{km+n}{k-n}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳ به ازای چند مقدار صحیح m، تابع $y=\frac{mx+۲}{x-۱+m}$ روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ نزولی است؟ $(m\neq ۲)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴ خط مماس بر منحنی $y=x^۳+ax^۲+bx-۱$ در نقطه $(-۱,-۴)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۵ به ازای چند مقدار صحیح k، نقطه عطف منحنی $y=\frac{k}{۲}x^۳-(k+۲)x^۲$ در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) بیش از ۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶ کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y=-\sqrt{-x-[x^۲]}$ از خط $x-y-۱=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷) اگر f تابع هموگرافیک و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f^{-1}(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}$ باشد، کدام مورد می‌تواند محل تقاطع مجانب‌های تابع f باشد؟

۱) $(\sqrt{\pi},\pi)$ ۲) $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(1,2)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸) کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y=\sqrt{x-\left[x^2\right]}$ از خط $2x-y+2=0$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ۴) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۹) f تابع هموگرافیک، $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g^{-1}(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^{-1}(x)}{g(x)}$ است، کدام عدد می‌تواند حاصل $\lim\limits_{x\to0^+}f^{-1}(x)$ باشد؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۰) به ازای چند مقدار صحیح و منفی k، نقطه عطف منحنی $y=kx^3+(k+1)x^2$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیش از ۲ ۴) صفر

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۱) نقطه $A(-1,2)$، نقطه ماکزیمم نسبی تابع $y=ax^2+b|x|$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{8}{9}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) -8

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۲) به ازای مقادیری از α، تابع $f(x)=\dfrac{(1-\alpha)x-3}{x-\alpha(1+x)}$ موازی خط $y+\alpha=0$ است. به ازای مقادیر مختلف α، مجموع فاصله‌های مقادیر تابع f تا خط $y+\alpha=0$، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۶

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۳) تابع $f(x)=\dfrac{x}{1-x|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۴) نمودار تابع $f(x) = (m^۲ + ۱)x^۲ + (۲ - m)x - ۵$ محور xها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β بیشترین مقدار باشد، m کدام است؟

۱) $۲ + \sqrt{۵}$ ۲) $۲ + \sqrt{۳}$ ۳) $۲ - \sqrt{۵}$ ۴) $۲ - \sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۵) محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y = \dfrac{ax + ۳}{(a + ۱)x + (a - ۱)}$، نقطه مینیمم تابع $y = \dfrac{۳}{۲}x^۲ + x + \dfrac{۵}{۶}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) $\dfrac{۳}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۳}{۲}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۶) نقاط $A(۰, ۰)$ و $B(۱, ۱)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۶ ۳) ۳ ۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۷) نقطهٔ $A(-۱, ۱)$ اکسترمم نسبی تابع $y = x^۲|x| + ۳ax^۲ + b$ است. مقدار $\dfrac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\dfrac{۱}{۳}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۸) تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x) = \dfrac{x^۴ - ۳}{x^۲ - ۲}\ ; x \in (-۲, ۲)$، در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۹) فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x) = x^۴ - ۶x^۲ + ۵$ باشند. زاویه‌ی بین پاره‌خط های AB و CD، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۰) فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۱$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره‌خط AB است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۲۱) مجموعه‌ی مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

۱) $[-۱, \infty)$ ۲) $(-\infty, \infty)$ ۳) $[-۱, ۰) \cup (۰, \infty)$ ۴) $\left[-\sqrt[۳]{۳}, ۰\right]$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۲ بازه‌هایی که تابع $f(x)=\dfrac{x^{۴}}{x^{۳}-۸}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را درنظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

۱) ۲
۲) $\sqrt[۳]{۴}-۱$
۳) $۲\sqrt[۳]{۴}$
۴) $۲(\sqrt[۳]{۴}-۱)$

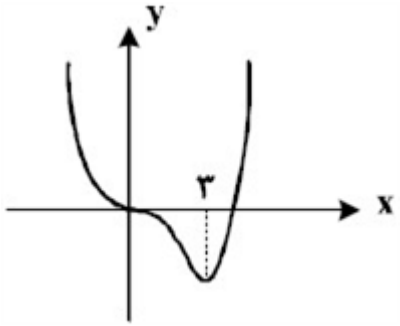
سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۲۳ کدام عبارت، برای تابع $f(x)=۲\sqrt{x}-\dfrac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}}$، درست است؟

۱) تابع f در بازه‌ی $(۰,۱)\cup(۱,\infty)$ صعودی است.
۲) تابع f در بازه‌های $(۱,\infty)$ و $(۰,۱)$ صعودی است.
۳) تابع f در بازه‌ی $(۱,\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(۰,۱)$ نزولی است.
۴) تابع f در بازه‌ی $(۱,\infty)$ نزولی و در بازه‌ی $(۰,۱)$ صعودی است.

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۲۴ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}$ است. $f(-۲)$ کدام است؟



۱) ۳۲
۲) ۳۶
۳) ۴۰
۴) ۴۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۵ فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=\dfrac{۲x-x^{۲}}{(x+۱)^{۲}}$، از خط مجانب افقی آن، کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۳}$
۲) ۱
۳) $\dfrac{۴}{۳}$
۴) $\dfrac{۳}{۲}$

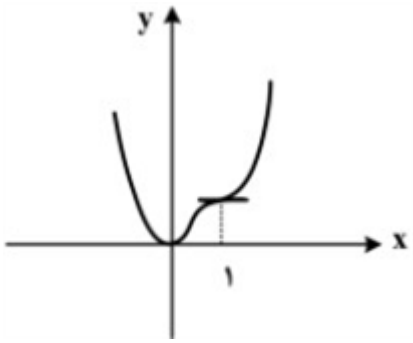
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۶ فاصله‌ی نقطه‌ی می‌نیمم مطلق تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۲x}{(x-۱)^{۲}}$، از خط مجانب قائم آن کدام است؟

۱) ۱
۲) $\dfrac{۴}{۳}$
۳) $\dfrac{۳}{۲}$
۴) ۲

سراسری-ریاضی-۹۸

۲۷ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = ۳x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx$ است.
a کدام است؟



۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۵ ۴) -۴

سراسری-ریاضی-۹۸

۲۸ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = (x-۱)^۲\sqrt[۳]{x^۲}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۹ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \frac{۱}{x}$ ، در کدام بازه، صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(-\infty, -۱)$ ۲) $(-۱, ۰)$ ۳) $(۰, ۱)$ ۴) $(۱, +\infty)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۰ بیش‌ترین مساحت، از بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن‌ها منطبق بر محور xها و دو رأس آن‌ها بر منحنی $y = \frac{۳}{۲}\sqrt{۸ - x^۲}$ قرار گیرند کدام است؟

۱) ۶ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) ۹ ۴) ۱۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۱ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x\left|x^۲ - ۱\right|$ و دامنه‌ی $(-۲, ۲)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

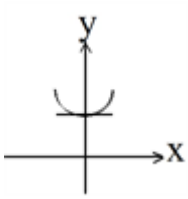
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

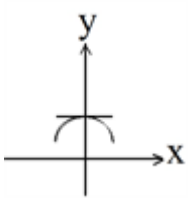
۳۲ تقعر نمودار تابع $y = x^۲\,|x - ۳|$، در بازه‌ی (a, b) به طرف yهای منفی است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

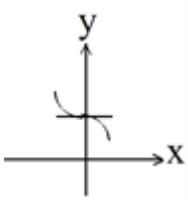
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

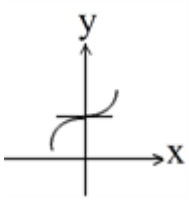
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۳ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}+۱}$ در نزدیکی نقطه‌ی $x = ۰$ چگونه است؟

۱ 

۲ 

۳ 

۴ 

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۴ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-۱)\left|x^{۲}+x-۲\right|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

۱ ۴ ۲ ۴/۵ ۳ ۶ ۴ ۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۵ بیش‌ترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می‌توان توسط یک طناب، از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است. طول طناب چند متر است؟

۱ ۶۸ ۲ ۷۰ ۳ ۷۱ ۴ ۷۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۶ طول نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{۳-x^{۲}}{۲} & ; x < ۱ \\ \frac{۱}{x} & ; x \geq ۱ \end{cases}$ ، در صورت وجود، کدام است؟

۱ -۱ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ فاقد عطف

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۷ به ازای کدام مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = x^{۲} + \frac{a}{x}$ ، دارای ماکزیمم نسبی است؟

۱ $|a| > ۲$ ۲ $a < ۰$ ۳ $a > ۰$ ۴ هیچ‌مقدار a

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x(|x|-۱)\le ۰ \Rightarrow x\le -۱, ۰\le x\le ۱ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۱]\cup[۰,۱]$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-x^۲} & ۰\le x\le ۱\\ \sqrt{x+x^۲} & x\le -۱\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{۱-۲x}{۲\sqrt{x-x^۲}} & ۰<x<۱\\ \frac{۱+۲x}{۲\sqrt{x+x^۲}} & x<-۱\end{cases}$$

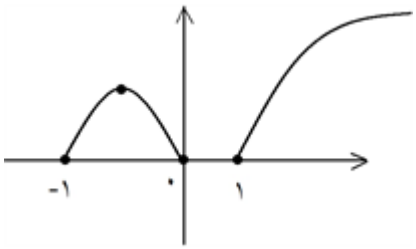
نقاط بحرانی $\begin{cases}x=۰\,,\ x=۱\,,\ x=-۱\\ x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$

این تابع ۴ نقطه بحرانی دارد که فقط $x=\frac{۱}{۲}$ ماکزیمم نسبی است. پس:

$$\left.\begin{array}{l}m=۱\\ n=۰\\ k=۴\end{array}\right\} m+n+k=۵$$

۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲-x} & x\ge ۰ \Rightarrow D: x\ge ۱\\ \sqrt{-x^۲-x} & x<۰ \Rightarrow D: -۱\le x\le ۰\end{cases}$$



$m=۱ \qquad n=۰ \quad k=۴$

$$\frac{\mathrm{km}+n}{k-n}=\frac{۴}{۴}=۱$$

۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ابتدا، بازهٔ $(۱,+\infty)$ باید زیرمجموعهٔ دامنه تابع باشد، یعنی مجانب قائم نمودار در این بازه نباشد: $\Rightarrow ۱-m\le ۱ \Rightarrow m\ge ۰ \ (۱)$

از طرفی تابع باید نزولی باشد:

$$\Rightarrow y'=\frac{m(m-۱)-۲}{(x+m-۱)^۲}<۰ \Rightarrow m^۲-m-۲=(m-۲)(m+۱)<۰ \Rightarrow -۱<m<۲ \ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۰\le m<۲ \xrightarrow{m\in Z} m=۰, m=۱$$

۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطهٔ $(-۱,-۴)$ نقطه عطف نمودار تابع است.

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -\frac{a}{۳}=-۱ \Rightarrow a=۳\\ \xrightarrow{x=-۱\,,\,y=-۴} -۴=(-۱)^۳+۳(-۱)^۲+b(-۱)-۱ \Rightarrow b=۵\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b}=۰/۶$$

۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

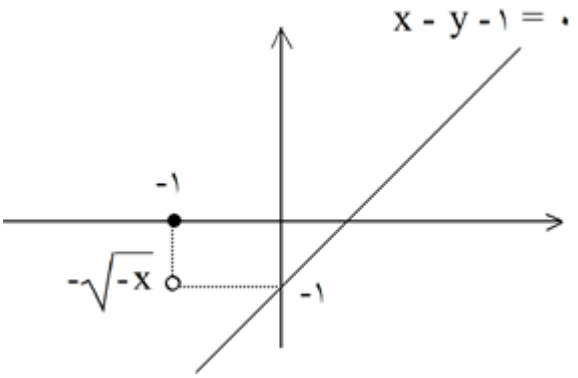
$$y=\frac{k}{۲}x^{۳}-(k+۲)x^{۲}\Rightarrow x_{\text{عطف}}=\frac{k+۲}{۳\left(\frac{k}{۲}\right)}=\frac{۲(k+۲)}{۳k}<۰\Rightarrow -۲<k<۰$$

تنها مقدار صحیح $k=-۱$ است پس:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{۱}{۲}x^{۳}-x^{۲} \\ x_{\text{عطف}}=-\frac{۲}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow y_{\text{عطف}}=-\frac{۱}{۲}\times\frac{-۸}{۲۷}-\frac{۴}{۹}=\frac{۴}{۲۷}-\frac{۱۲}{۲۷}=\frac{-۸}{۲۷}<۰$$

پس به ازای $k=-۱$ نقطه‌ی عطف در ناحیه سوم است.

۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$y=-\sqrt{-x-[x^{۲}]}$$

$$-x-[x^{۲}]\geq ۰\Rightarrow x+[x^{۲}]\leq ۰$$

$\downarrow$

فقط در $[-۱\ ,\ ۰]$

نقطهٔ A را روی $-\sqrt{-x}$ درنظر بگیرید پس داریم: $A(a,-\sqrt{-a})$

فاصله نقطه A از خط برابر است با:

$$\frac{\left|a+\sqrt{-a}-۱\right|}{\sqrt{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} ۱-\frac{۱}{۲\sqrt{-a}}=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{\left|-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}-۱\right|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$$

۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}$$

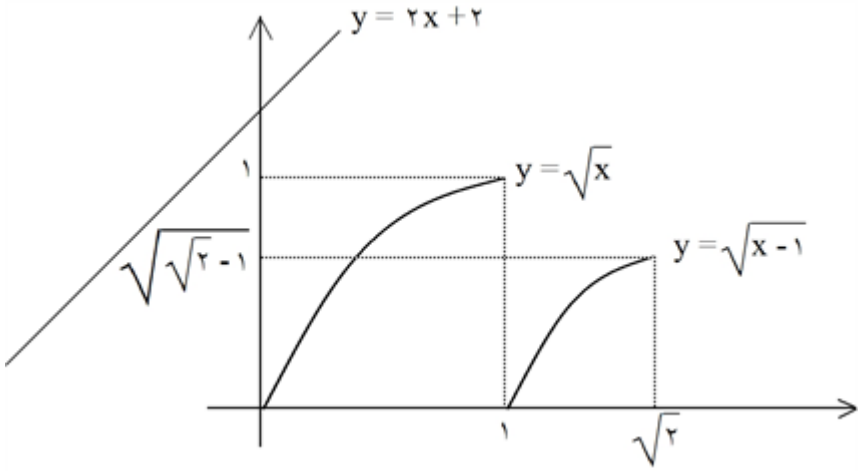
اگر $f(x)=\frac{\text{ax}+b}{\text{cx}+d}$ باشد پس $f^{-۱}(x)=\frac{-\text{dx}+b}{\text{cx}-a}$ است.

$$\frac{\frac{a}{c}}{-\frac{d}{c}}=\frac{-\frac{d}{c}}{\frac{a}{c}}\Rightarrow a^{۲}=d^{۲}\Rightarrow a=\pm d$$

پس گزینه ۳ جواب می‌تواند باشد
$$\begin{cases}\xrightarrow{a=d}\frac{\text{ax}+b}{\text{cx}+a}\Rightarrow\left(-\frac{a}{c},\frac{a}{c}\right)\Rightarrow y=-x\ \text{روی خط}\\ \xrightarrow{a=-d}f=f^{-۱}\Rightarrow y=x\ \text{روی خط است}\end{cases}$$

* متوجه نشدیم طراح، گزینه ۱ را از کجا آورده! شما می‌توانید حدس بزنید؟

۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y=\sqrt{x-\left[x^{۲}\right]}$ و خط $y=۲x+۲$ را در شکل زیر می‌بینیم:



کم‌ترین فاصله نقاط تابع از خط موردنظر، کم‌ترین فاصله نقاط روی نمودار $y=\sqrt{x}$ از خط $۲x-y+۲=۰$ است. نقط $(\alpha,\sqrt{\alpha})$ را درنظر می‌گیریم؛ فاصله برابر است با:

$$d=\frac{|۲\alpha-\sqrt{\alpha}+۲|}{\sqrt{۵}}$$

در نقطه بحرانی $d(\alpha)$، کم‌ترین مقدار رخ می‌دهد:

$$d'(\alpha)=۰\Rightarrow ۲-\frac{۱}{۲\sqrt{\alpha}}=۰\Rightarrow\sqrt{\alpha}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow d_{\min}=\frac{\left|\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۴}+۲\right|}{\sqrt{۵}}=\frac{\frac{۱۵}{۸}}{\sqrt{۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$$

۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$g(x)=\frac{cx+d}{ax+b}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g^{-۱}(x)}=\frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}}=-\frac{a^{۲}}{bc}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g^{-۱}(x)}{g(x)}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}-\frac{b}{c}\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{a^{۲}}{bc}=-\frac{b}{c}\xrightarrow{c\neq۰}\frac{a^{۲}}{b}=b\Rightarrow a^{۲}=b^{۲}$$

$$\Rightarrow a=\pm b\Rightarrow \lim_{x\to۰^{+}}f^{-۱}(x)=-\frac{b}{a}=\pm۱$$

۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه عطف نمودار تابع $y=ax^{۳}+bx^{۲}$ نقطه $I\left(-\frac{b}{۳a},\frac{۲}{۲۷},\left(\frac{b^{۳}}{a^{۲}}\right)\right)$ است، برای اینکه این نقطه در ربع دوم قرار گیرد، باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{c}-\frac{b}{a}<۰\\ \text{و}\\ \frac{b^{۳}}{a^{۲}}>۰\end{array}\right\}\Rightarrow a,b>۰$$

حال در این سؤال داریم:

$$\begin{cases}k>۰\\ k+۱>۰\end{cases}\Rightarrow k>-۱$$

که این بازه شامل هیچ عدد صحیح و منفی نمی‌باشد.

۱۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x < ۰ \Rightarrow y = \mathrm{ax}^۲ - \mathrm{bx} \Rightarrow y' = ۲\mathrm{ax} - b \xrightarrow{y'(-۱)=۰} -۲a - b = ۰ \otimes$$

$$A(-۱, ۲) \in \mathrm{y} \Rightarrow ۲ = a + b \xrightarrow{\otimes} a = -۲, b = ۴ \Rightarrow \mathrm{ab} = -۸$$

۱۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{(۱-\alpha)x - ۳}{(۱-\alpha)x - \alpha} \Rightarrow \mathrm{ad} - \mathrm{bc} = ۰ \Rightarrow (۱-\alpha)(-\alpha) + ۳(۱-\alpha) = ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = ۳ \Rightarrow f(x) = ۱ \xrightarrow{y+۳=۰ \Rightarrow y=-۳} ۱ - (-۳) = ۴ \\ \alpha = ۱ \Rightarrow f(x) = ۳ \xrightarrow{y+۱=۰ \Rightarrow y=-۱} ۳ - (-۱) = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجموع} = ۸$$

۱۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع روی دامنه‌اش یعنی $R - \{۱\}$ پیوسته است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱+x^۲} & ; x < ۰ \\ \frac{x}{۱-x^۲} & ; x \geq ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۱-x^۲}{(۱+x^۲)^۲} & ; x < ۰ \\ \frac{۱+x^۲}{(۱-x^۲)^۲} & ; x \geq ۰ \end{cases}$$

تابع در $x = ۰$ مشتق دارد و برابر یک است. $(f'(۰) = ۱)$

و با توجه به دامنه هر ضابطه فقط در $x = -۱$ مشتق برابر صفر دارد: $f'(-۱) = ۰$

پس تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد.

دقت کنید که $x = ۱$ عضو دامنه تابع نیست و نباید لحاظ شود.

۱۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S = \alpha + \beta = \frac{m-۲}{m^۲+۱}$$

$$S'(m) = -\frac{m^۲ - ۴m - ۱}{(m^۲-۱)^۲} \xrightarrow{s'(m)=۰} m^۲ - ۴m - ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۲ \pm \sqrt{۵}$$

جدول تغییرات رفتار تابع $S(m)$ را می‌نویسیم:

m		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$	
S'	-		+		-
S	↘	min نسبی	↗	max نسبی	↘

پس در $m = ۲ + \sqrt{۵}$ تابع S بیشترین مقدار است.

تذکر:

اصل سؤال به صورت $f(x) = (m^۲ - ۱)x^۲ + (۲ - m)x + ۵$ بوده که در آن حالت، سؤال غلط می‌شد. چون نه $\frac{m-۲}{m^۲-۱}$ ماکزیمم داشت و نه حتی به ازای $m = ۲ + \sqrt{۳}$ که ماکزیمم نسبی ایجاد می‌شد، معادله درجه ۲، ریشه می‌داشت.

۱۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. محل تلاقی مجانب‌ها همان مجانبهای قائم و افقی تابع است.

مجانب قائم $x = \frac{-(a-۱)}{a+۱}$ و مجانب افقی $y = \frac{a}{a+۱}$

طول نقطه مینیمم: $x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۱}{۳}$

با مساوی قرار دادن دو تا x داریم: $\frac{-(a-۱)}{a+۱} = \frac{-۱}{۳} \Rightarrow a = ۲$

پس تابع هموگرافیک داده شده به صورت $y = \frac{۲x+۳}{۳x+۱}$ میباشد که محل تلاقی آن با محور طولها $x = \frac{-۳}{۲}$ است.

۱۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطهٔ $A(۰,۰)$ نقطهٔ اکسترمم نمودار تابع است ($f'(۰) = ۰$ و $f(۰) = ۰$)، پس تابع باید عامل $x^۲$ را داشته باشد، در نتیجه $c = d = ۰$ و $f(x) = ax^۳ + bx^۲$ است.

$$B \in f \Rightarrow f(۱) = a + b = ۱ \quad (I)$$

$$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx \xrightarrow{f'(۱)=۰} ۳a + ۲b = ۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow[(II)]{(I)} a = -۲, b = ۳ \Rightarrow ab = -۶$$

۱۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = x^۲|x| + ۳ax^۴ + b \xrightarrow{(-۱,۱)} ۱ = ۱ + ۳a + b \Rightarrow ۳a + b = ۰ \Rightarrow b = -۳a \Rightarrow \frac{b}{a} = -۳$$

با فرض اول به جواب رسیدیم، ولی ادامه حل:

$$\Rightarrow y' = -۳x^۲ + ۶ax = -۳(-۱)^۲ + ۶a(-۱) = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۲}$$

$b = \frac{۳}{۲}$ و داریم: $\frac{b}{a} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = -۳$

۱۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. f' باید منفی باشد.

$$f'(x) = \frac{۴x^۳(x^۲-۲) - ۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲} = \frac{۲x^۵ - ۸x^۳ + ۶x}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

جدول تغییرات رفتار تابع را در بازه‌ی $(-۲,۲)$ می‌نویسیم:

x	-۲	$-\sqrt{۳}$		$-\sqrt{۲}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۲}$		$\sqrt{۳}$		۲
f'	-	۰	+	۰	+	۰	-	۰	+	۰	-	۰	-	۰	+	
f	↘		↗	$+\infty$	↗	$-\infty$	↘		↗		↘	$-\infty$	↘	$+\infty$	↗	

پس نمودار تابع روی بازه‌های $(-۲,-\sqrt{۳})$، $(-۱,۰)$، $(۱,\sqrt{۲})$ و $(\sqrt{۲},\sqrt{۳})$ اکیداً نزولی است.

۱۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x = ۴x(x^۲ - ۳) \xrightarrow{f'(x)=۰} x = ۰ \text{ یا } \pm\sqrt{۳}$$

$$f''(x) = ۱۲x^۲ - ۱۲ \xrightarrow{f''(x)=۰} x = \pm ۱$$

جدول تغییرات رفتار f را می‌نویسیم:

x		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$	
f''	+		+	○	-		-	○	+		+
f'	-	○	+		+	○	-		-	○	+
f	↘	-۴ min	↗	○ عطف	↗	۵ max	↘	○ عطف	↘	-۴ min	↗

نقاط $A(-\sqrt{۳}, -۴)$ و $B(\sqrt{۳}, -۴)$ مینیمم نسبی و نقاط $C(-۱, ۰)$ و $D(۱, ۰)$ عطف نمودار تابع هستند. شیب هر دو پاره‌خط AB و CD برابر صفر است، بنابراین موازی هستند و زاویه بین آن‌ها صفر است.

۲۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) = ۰$$

	-۱		۲	
+		−		+
↗	max	↘	min	↗

$x = -۱$ مینیمم و $x = ۲$ ماکزیمم تابع است.

$$A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۸\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}۲\\ -۱۹\end{matrix}\right. \qquad m_{AB} = \frac{۸+۱۹}{-۱-۲} = \frac{۲۷}{-۳} \Rightarrow m_{AB} = -۹$$

$$f'(x) = -۹ \Rightarrow ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = -۹ \Rightarrow ۶x^۲ - ۶x - ۳ = ۰$$

$\xrightarrow{\Delta>۰}$ دو جواب دارد پس دو نقطه یافت می‌شود.

۲۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} ۳\sqrt[۳]{x} - x & ; x \le ۰ \\ ۳\sqrt[۳]{x} + x & ; x \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} - ۱ & ; x < ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱ & ; x > ۰ \end{cases}$$

روی بازه‌ی $(۰, +\infty)$، مشتق تابع همواره مثبت است بنابراین تابع اکیداً صعودی است. حال برای مقادیر $x < ۰$ داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} - ۱ \ge ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} \ge ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲} \le ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ \le ۱ \xrightarrow{x<۰} -۱ \le x < ۰$$

چون تابع f پیوسته است پس فاصله‌ی صعودی کل بازه‌ی $[-۱, +\infty)$ است.

۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{x^{۴}}{x^{۳}-۸}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^{۶}-۳۲x^{۳}}{(x^{۳}-۸)^{۲}}=\frac{x^{۳}(x^{۳}-۳۲)}{(x^{۳}-۸)^{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow x=۰\,,\,x^{۳}=۳۲\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۳۲}\simeq ۳/\cdots$$

x	$-\infty$		۰		۲		$\sqrt[۳]{۳۲}$	
f'		+		−		−		+
f		↗		↘		↘		↗

فاصله‌های نزولی: $(۰,۲)$ و $(۲,\sqrt[۳]{۳۲})$ که طول بازه‌ها به ترتیب ۲ و $\sqrt[۳]{۳۲}-۲$ است که $\sqrt[۳]{۳۲}-۲$ کوچکتر است.

جواب $=\sqrt[۳]{۳۲}-۲=۲\sqrt[۳]{۴}-۲=۲(\sqrt[۳]{۴}-۱)$

۲۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

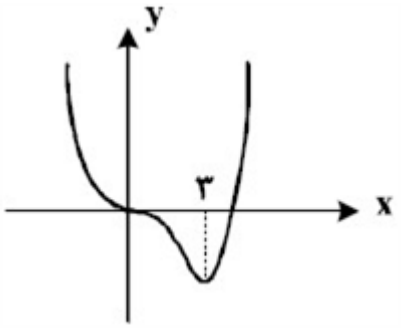
$$f(x)=۲x^{\frac{۱}{۲}}-\frac{۳}{۲}(x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow f'(x)=۲\left(\frac{۱}{۲}\right)x^{-\frac{۱}{۲}}-\frac{۳}{۲}\left(-\frac{۱}{۳}\right)(۲x)(x^{۲}-۱)^{\frac{-۴}{۳}}$$

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt[۳]{(x^{۲}-۱)^{۴}}}$$

x	۰		۱	
f'		+		+
f		↗		↗

این تابع در فواصلی که تعریف شده است، صعودی است.

۲۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$f(x)=x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}$$
$$f'(x)=۴x^{۳}+۳ax^{۲}+۲bx$$
$$f''(x)=۱۲x^{۲}+۶ax+۲b$$

$$f''(۰)=۰\Rightarrow ۲b=۰\Rightarrow b=۰$$
$$f'(۳)=۰\Rightarrow ۴(۳)^{۳}+۳a(۳)^{۲}+۰=۰\Rightarrow ۳^{۳}(۴+a)=۰\Rightarrow a=-۴$$
$$f(x)=x^{۴}-۴x^{۳}\Rightarrow f(-۲)=۱۶+۳۲=۴۸$$

۲۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x)=\frac{(۲-۲x)(x+۱)^۲-(۲x-x^۲)(۲(x+۱))}{(x+۱)^۴}=\frac{۲(x+۱)((۱-x)(۱+x)-۲x+x^۲)}{(x+۱)^۴}$$

$$f'(x)=\frac{۲(۱-x^۲-۲x+x^۲)}{(x+۱)^۳}=\frac{۲(۱-۲x)}{(x+۱)^۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}\ \text{ماکزیمم نسبی} \\ \text{فاصله } y=-۱ \text{ مجانب افقی} \end{array}\right\}\Rightarrow \text{فاصله}=\left|\frac{۱}{۳}-(-۱)\right|=\frac{۴}{۳}$$

۲۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

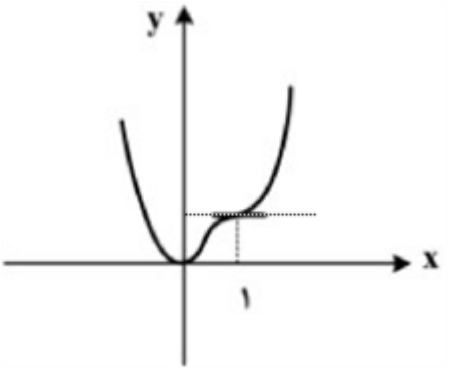
$$f(x)=\frac{x^۲+۲x}{(x-۱)^۲}$$

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x-۱)^۲-۲(x-۱)(x^۲+۲x)}{(x-۱)^۴}=\frac{۲(x-۱)((x+۱)(x-۱)-x^۲-۲x)}{(x-۱)^۴}$$

$$=\frac{۲(x^۲-۱-x^۲-۲x)}{(x-۱)^۳}=۰\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -۱-۲x=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \\ \text{مجانب قائم}:(x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱ \end{array}\right\}$$

$$\text{فاصله}=\left|۱-\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right|=\frac{۳}{۲}$$

۲۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$f(x)=۳x^۴+ax^۳+bx^۲+cx$$

$$f'(x)=۱۲x^۳+۳ax^۲+۲bx+c$$

$$f''(x)=۳۶x^۲+۶ax+۲b$$

$$f'(۰)=۰\Rightarrow c=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(۱)=۰\Rightarrow ۱۲+۳a+۲b=۰ \\ f''(۱)=۰\Rightarrow ۳۶+۶a+۲b= \end{array}\right\}\Rightarrow ۲۴+۳a=۰\Rightarrow a=-۸$$

۲۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y'=۲(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}+(x-۱)^۲\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۶x(x-۱)+۲(x-۱)^۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$y'=\frac{۸x^۲-۱۰x+۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\Rightarrow\begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۱}{۴} \\ x=۰ \end{cases}$$

x	$-\infty$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۱	$+\infty$
y'	−	+	−	+	
y	↘	↗	↘	↗	

$$x=\frac{۱}{۴}$$

۲۹ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=x+\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=۱-\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{۲}{x^۳}$$

برای این که این تابع صعودی باشد، باید $f'(x)>۰$ باشد، داریم:

$$f'(x)>۰\Rightarrow ۱-\frac{۱}{x^۲}>۰\Rightarrow ۱>\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow x^۲>۱\Rightarrow |x|>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱(I)$$

برای این که این تابع دارای تقعر رو به پایین باشد، باید $f''(x)<۰$ باشد، داریم:

$$\frac{۲}{x^۳}<۰\Rightarrow x^۳<۰\Rightarrow x<۰(\text{II})$$

با توجه به اشتراک مجموعه‌های (I) و (II) ، می‌توان گفت که تابع f در بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ دارای تقعر رو به پایین بوده و صعودی است.

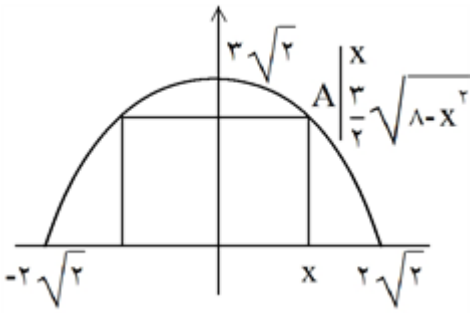
۳۰ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $y=\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}$ را رسم می‌کنیم. (نیم‌بیضی)

حال یک مستطیل فرضی را با شرایط مسأله در این نیم‌بیضی محاط می‌کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود، رأس A از این مستطیل بر روی نیم‌بیضی است و در نتیجه مختصات آن به صورت $\left(x,\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}\right)$ می‌باشد. بنابراین طول و عرض مستطیل مطابق شکل، برابر $۲x$ و $\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}$ است و داریم:

$$S_{\text{مستطیل}}=۲x\times\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}=۳x\sqrt{۸-x^۲}\Rightarrow S=۳\sqrt{۸x^۲-x^۴}$$

$$S'_x=۳\times\frac{۱۶x-۴x^۳}{۲}\sqrt{۸x^۲-x^۴}=۰\Rightarrow(۴x-x^۳)=۰\Rightarrow(x)(۴-x^۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ \text{ غ ق ق}\\ x=۲\\ x=-۲ \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

$$S_{\max}=۳\times۲\times\sqrt{۸-۲^۲}=۳\times۲\times۲=۱۲$$



۳۱ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ریشه‌های ساده‌ی درون قدرمطلق یعنی نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ بحرانی‌اند. حال به جستجوی سایر نقاط بحرانی می‌پردازیم:

$$f(x)=\begin{cases}x(x^۲-۱) & ;x^۲\geqslant ۱\\ x(-x^۲+۱) & ;x^۲<۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۳-x & ;x^۲\geqslant ۱\\ -x^۳+x & ;x^۲<۱\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f_۱(x)=x^۳-x\Rightarrow f'_۱(x)=۳x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳}\not\geqslant ۱ \text{ غ ق ق}\\ f_۲(x)=-x^۳+x\Rightarrow f'_۲(x)=-۳x^۲+۱=۰\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳}<۱ \text{ ق ق}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۱}{۳}}\end{cases}$$

پس نقاط $x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ نیز نقاط بحرانی تابع هستند. بنابراین این تابع در مجموع ۴ نقطه‌ی بحرانی در بازه‌ی $(-۲,۲)$ دارد.

۳۲ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با دقت در جدول تعیین علامت y'' درمی‌یابیم بازه‌ی مورد نظر، بازه‌ی $(۱,۳)$ می‌باشد که طول آن $b-a=۳-۱=۲$ است.

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
y''		+		−	‖	+	
y		∪	۲	∩	۰	∪	

$$y=\begin{cases} x^۳-۳x^۲ & ; x\geqslant ۳ \\ ۳x^۲-x^۳ & ; x<۳ \end{cases} \rightarrow y'=\begin{cases} ۳x^۲-۶x & ; x>۳ \\ ۶x-۳x^۲ & ; x<۳ \end{cases} \rightarrow y''=\begin{cases} ۶x-۶ & ; x>۳ \\ ۶-۶x & ; x<۳ \end{cases}$$

۳۳ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y=\frac{x^۲+۱}{x^۳+۱} \rightarrow y'=\frac{۲x(x^۳+۱)-۳x^۲(x^۲+۱)}{(x^۳+۱)^۲}=\frac{-x^۴-۳x^۲+۲x}{(x^۳+۱)^۲} \xrightarrow{y'=۰}$$

$$\rightarrow x(-x^۳-۳x+۲)=۰$$

حال با توجه به این‌که $x=۰$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق تابع می‌باشد، با استفاده از آزمون مشتق اول به بررسی وضعیت منحنی تابع در مجاورت این نقطه می‌پردازیم که در نتیجه نقطه‌ی $x=۰$ طول Min نسبی منحنی تابع داده شده می‌باشد.

x		۰	
y'	−		+
y	↘	min	↗

روش دوم: اگر $-۱<x<۰$ باشد، آن‌گاه $-۱<x^۳<۰<x^۲$، یعنی $x^۲>x^۳>-۱$ و در نتیجه $x^۲+۱>x^۳+۱>۰$ است و اگر $۰<x<۱$ باشد، آن‌گاه $x^۲>x^۳>۰$ و در نتیجه $x^۲+۱>x^۳+۱>۰$ است.

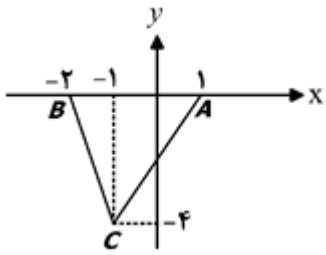
بنابراین در اطراف $x=۰$، $x^۲+۱>x^۳+۱>۰$ می‌باشد، پس $\frac{x^۲+۱}{x^۳+۱}>۱$ یعنی $f(x)>۱$، از طرفی $f(۰)=\frac{۰+۱}{۰+۱}=۱$، بنابراین نقطه به طول $x=۰$ می‌نیمم تابع $f(x)$ است وگزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۳۴ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. $x=-۲$ و $x=۱$ نقاط بحرانی می‌باشند، برای تعیین نقطه‌ی بحرانی دیگر از تابع مشتق می‌گیریم: (برای تعیین $f'=۰$ می‌توانیم قدرمطلق را برداریم.)

$$f(x)=(x-۱)\,|x-۱|\,|x+۲| \Rightarrow f(x)=(x-۱)^۲(x+۲)$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲(x-۱)(x+۲)+(x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow (x-۱)(۳x+۳)=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۴\times ۳)=۶$$



۳۵ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که در صورت تست قید شده که در یک طرف، رودخانه قرار دارد، پس طناب مورد استفاده فقط سه طرف زمین مستطیلی را پوشش می‌دهد. یعنی طول طناب برابر با محیط مستطیل (به جز طولی که کنار رودخانه قرار دارد) می‌باشد که برابر است با: $L = ۲y + x$.

از طرفی خود مساله ماکزیمم مقدار مساحت را با توجه به محدودیت‌های مساله تعیین کرده است که می‌توان با استفاده از آن، به عددا دسترسی پیدا نمود.

$$S = xy \xrightarrow{x=L-۲y} S = y(L-۲y) \Rightarrow S = Ly - ۲y^۲$$

$$S'_y = L - ۴y \xrightarrow{S'_y=۰} L - ۴y = ۰ \Rightarrow y = \frac{L}{۴}$$

$$S_{\max} = \frac{L}{۴}\left(L - \frac{L}{۲}\right) = \frac{L^۲}{۸} \xrightarrow{S_{\max}=۶۴۸} \frac{L^۲}{۸} = ۶۴۸ \Rightarrow L^۲ = ۸\times۶۴۸$$

$$\Rightarrow L^۲ = ۱۶\times۳۲۴ \Rightarrow L = ۴\times۱۸ = ۷۲$$

۳۶ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۳-x^۲}{۲} & x < ۱ \\ \frac{۱}{x} & x \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -x & x < ۱ \\ -\frac{۱}{x^۲} & x \geq ۱ \end{cases}$$

دقت کنید که حدهای راست و چپ و مقدار تابع f در نقطه‌ی ۱ برابر ۱ هستند و f در این نقطه پیوسته است. همچنین طبق قضیه‌ی حد تابع مشتق $f'_+(۱) = f'_-(۱) = -۱$ در ۱- مشتق‌پذیر است و به همین دلیل در ضابطه‌ی f' نقطه‌ی ۱ تعریف شده‌است.

$$f'(x) = \begin{cases} -x & x < ۱ \\ -\frac{۱}{x^۲} & x \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۱ \\ \frac{۲}{x^۳} & x > ۱ \end{cases}$$

توجه کنید که $f_+(۱) = ۲$ و $f_-(۱) = -۱$ و به همین دلیل f'' در ۱ وجود ندارد. حال جدول تعیین علامت f'' را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	-	||	+

(علامت || به معنی تعریف نشده‌است.)

بنابراین تقعر f در نقطه ۱ تغییر می‌کند و چون f در این نقطه مشتق‌پذیر است، مماس بر منحنی نیز وجود دارد و این نقطه‌ی عطف f محسوب می‌شود.

۳۷ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید نقطه‌ای به طول $x_۰$ ماکزیمم نسبی باشد، پس طبق آزمون مشتق دوم، داریم:

$$f'(x_۰) = ۰ \Rightarrow ۲x_۰ - \frac{a}{x_۰^۲} = ۰ \Rightarrow ۲x_۰^۳ = a \Rightarrow ۲a = ۴x_۰^۳$$

$$f''(x_۰) < ۰ \Rightarrow ۲ + \frac{۲a}{x_۰^۳} < ۰ \Rightarrow ۲ + ۴\frac{\cancel{x_۰^۳}}{\cancel{x_۰^۳}} < ۰ \Rightarrow ۶ < ۰$$

امکان ندارد یعنی این تابع هیچ‌گاه ماکزیمم نسبی نخواهد داشت.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	**۲**	۳	۴
۲	۱	۲	۳	**۴**
۳	۱	**۲**	۳	۴
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	۱	۲	**۳**	۴
۶	۱	۲	۳	**۴**
۷	۱	۲	**۳**	۴
۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	۱	۲	۳	**۴**
۱۱	۱	۲	۳	**۴**
۱۲	۱	**۲**	۳	۴
۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۴	**۱**	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	**۴**
۱۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۷	**۱**	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	**۳**	۴
۱۹	**۱**	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	**۳**	۴
۲۱	**۱**	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	**۴**
۲۳	۱	**۲**	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	**۴**
۲۵	۱	۲	**۳**	۴
۲۶	۱	۲	**۳**	۴
۲۷	**۱**	۲	۳	۴
۲۸	**۱**	۲	۳	۴
۲۹	**۱**	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	**۴**
۳۱	۱	**۲**	۳	۴
۳۲	۱	۲	**۳**	۴
۳۳	**۱**	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	**۳**	۴
۳۵	۱	۲	۳	**۴**
۳۶	۱	۲	**۳**	۴
۳۷	۱	۲	۳	**۴**